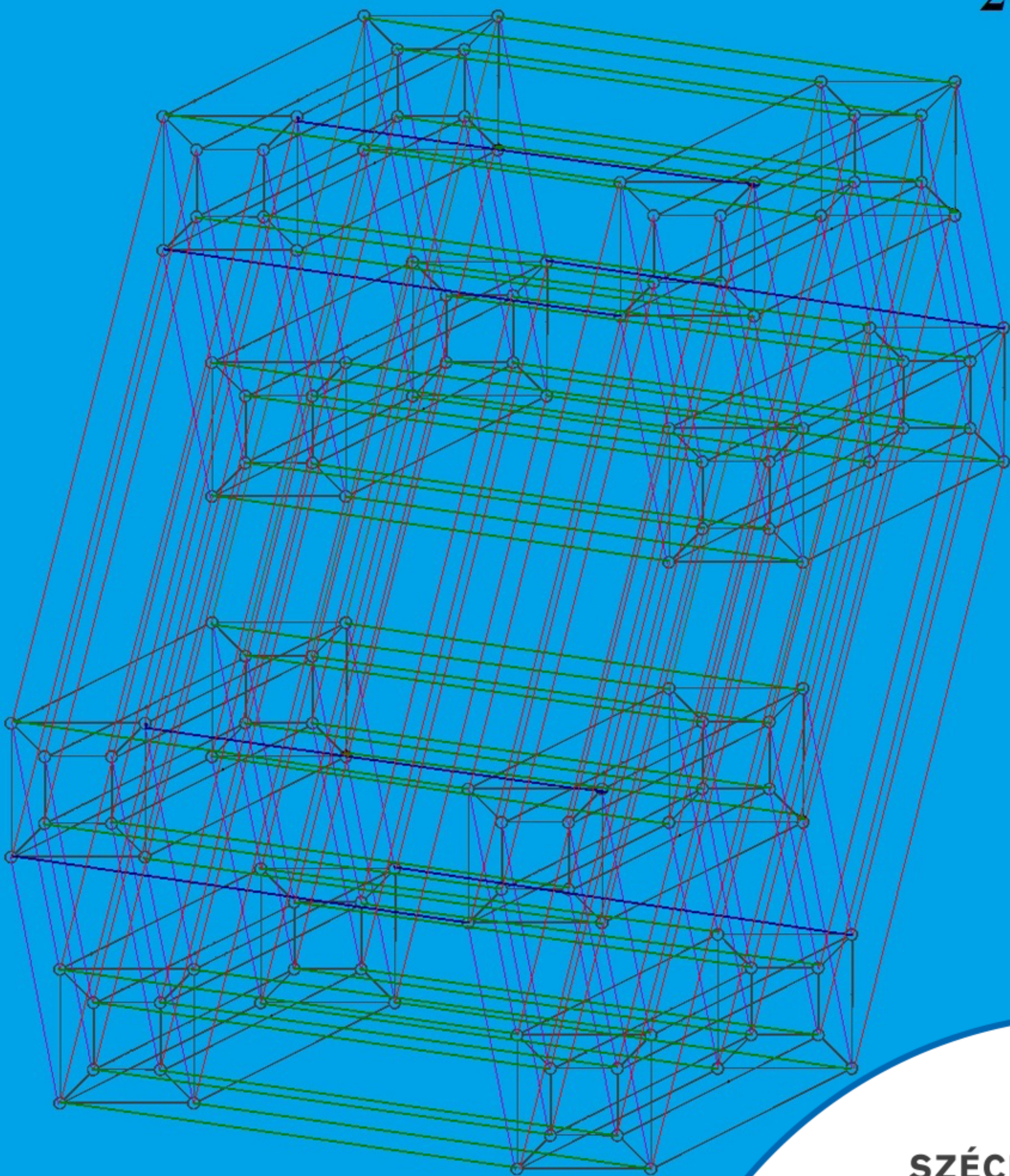
Dr. Szalkai István

Diszkrét matematika

2021.



A jegyzet az EFOP-3.4.3-16-2016-00009 számú
"A felsőfokú oktatás minőségének és hozzáférhetőségének
együttes javítása a Pannon Egyetemen"
projekt keretében készült.

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Diszkrét matematika

Szalkai István

2021. január 27.

Készült, digitális formában
35,4 ív terjedelemben
ISBN:978-963-396-187-2

Tartalomjegyzék

Bevezetés **ix**
0.1. Általános jelölések xii

I. Kombinatorika 1

1. Halmazok **3**
1.1. Halmazok definíciója 3
1.2. Boole - algebrák 6
1.3. Minőségi függetlenség és véges Boole-algebrák 12
1.4. Hivatkozások 18

2. Elemi leszámlálások **19**
2.1. Általános módszerek 19
2.2. Teljes indukció 22
2.3. Permutációk, variációk, kombinációk 25
2.3.1. Permutációk 26
2.3.2. Variációk, kombinációk 29
2.4. A Stirling formula 37
2.5. Feladatok 38
2.6. Megoldások 41
2.7. Hivatkozások 41

3. Binomiális és polinomiális együtthatók **43**
3.1. Binomiális és polinomiális tételek 43
3.2. A binomiális együtthatók tulajdonságai 46
3.3. Összegezési módszerek 51
3.3.1. Binomiális együtthatók összegei 52

3.3.2. Hatványok összege . . . 54
3.4. Rugalmas pénzérmék . . . 56
3.5. Feladatok . . . 58
3.6. Megoldások . . . 61
3.7. Hivatkozások . . . 61

4. A logikai szitaformula **63**
4.1. A formula . . . 63
4.2. Elcserélt levelek . . . 65
4.3. Additív halmazfüggvények . . . 69
4.4. Feladatok . . . 74
4.5. Megoldások . . . 75
4.6. Hivatkozások . . . 78

5. Rekurzív sorozatok **79**
5.1. Az iterációs módszer . . . 83
5.2. Lineáris rekurziók . . . 85
5.2.1. Algebrai összefüggések . . . 86
5.2.2. Állandó együtthatójú egyenletek . . . 89
5.3. A Fibonacci-sorozat . . . 92
5.4. Szimultán (többdimenziós) rekurziók . . . 94
5.5. Néhány nevezetes rekurzió . . . 97
5.5.1. Ackermann - függvény . . . 97
5.5.2. Lucas-Lehmer teszt . . . 97
5.5.3. Newton gyökvonási algoritmusa . . . 98
5.6. Magasabbrendű számtani sorozatok . . . 98
5.7. Feladatok . . . 102
5.8. Megoldások . . . 105
5.9. Függelék: Mersenne számok . . . 107
5.10. Hivatkozások . . . 107

6. Generátorfüggvények **109**
6.1. Lineáris rekurziók . . . 111
6.2. Nemlineáris rekurziók . . . 120
6.2.1. Catalan számok . . . 120
6.2.2. A pénzváltási probléma . . . 123
6.3. Más típusú generátorfüggvények . . . 126
6.4. Feladatok . . . 128

6.5. Megoldások 128
6.6. Hivatkozások 130

7. Extremális halmazrendszerek 131
7.1. Sperner tétele 131
7.2. Erdős-DeBruijn, Ryser és Fisher tételei 134
7.3. Erdős-Ko-Rado tétele 138
7.4. Egyéb eredmények 139
7.5. Szimplexek 141
7.6. Feladatok 146
7.7. Megoldások 146
7.8. Hivatkozások 147

8. Partíciós problémák 149
8.1. Számok felbontása 149
8.2. Halmazpartíciók 152
8.3. Összefoglalás 155
8.4. Hivatkozások 157

II. Gráfelmélet 159

1. Gráfelméleti alapfogalmak 161
1.1. Bevezetés 161
1.2. Nevezetes gráfok 167
1.3. Elemi definíciók és összefüggések 170
1.4. Utak, összefüggőség 173
1.5. Összefoglaló vizsgakérdések 179
1.6. Feladatok 181
1.7. Hivatkozások 181

2. Euler körök és utak 183
2.1. A königsbergi hidak 183
2.2. Euler tételei 186
2.3. Feladatok 189
2.4. Hivatkozás 189

3. Hamilton körök és utak **191**
3.1. Hamilton körök 192
3.2. Kockagráfok és Gray-kódok 197
3.3. Feladatok 201
3.4. Megoldás 201
3.5. Hivatkozások 202

4. Gráfok mátrixai **203**
4.1. Csúcsmátrixok 204
4.2. Élmátrixok 213
4.3. Egyéb mátrixok és ábrázolási módok 216
4.4. Feladatok 217
4.5. Hivatkozások 217

5. Útkereső algoritmusok **219**
5.1. Dijkstra algoritmusa 220
5.2. Hivatkozás 224

6. Fák **225**
6.1. Alapvető összefüggések 225
6.2. Fák összeszámlálása 229
6.2.1. Számozott csúcsú fák 230
6.2.2. Bináris fák 231
6.2.3. Paraffin molekulák 232
6.3. Fák alkalmazásai 233
6.3.1. Rendezésekről általában 233
6.3.2. Rendezés bináris fán 234
6.4. Feladatok 236
6.5. Hivatkozások 237

7. Feszítőfák **239**
7.1. Kruskal algoritmusa 240
7.2. Utazó ügynök metrikus gráfokban 245
7.3. Hivatkozás 248

8. Gráfok izomorfiája **249**
8.1. Izomorfizmusok 249
8.2. Invariáns tulajdonságok 253

8.3. Fák izomorfiája 254
8.4. Feladat 260
8.5. Megoldás 260
8.6. Hivatkozás 260

9. Síkgráfok 261
9.1. Definíciók és Kuratowsky tétele 261
9.1.1. Egyéb felületek 268
9.2. Euler poliédertétele 271
9.3. Fullerének 276
9.4. Térképek 278
9.5. Feladatok 279
9.6. Megoldások 279
9.7. Hivatkozások 279

10. Gráfok színezései 281
10.1. Csúcsszínezések 282
10.1.1. Alapfogalmak 282
10.1.2. Síkgráfok 284
10.1.3. Egyéb kérdések 289
10.2. Élszínezések 292
10.2.1. Ramsey-elmélet 292
10.2.2. Ramsey - számok 296
10.2.3. Egyéb kérdések 302
10.3. Feladatok 304
10.4. Megoldások 304
10.5. Hivatkozások 305

11. Kétpólusú gráfok 307
11.1. Páros gráfok 307
11.2. Párosítások 309
11.3. Következmények 313
11.4. Egy statikai alkalmazás 315
11.5. Hivatkozás 316

12. Extremális gráfok 317
12.1. Turán Pál Tétele 317
12.2. Egyéb eredmények 320

12.3. Hivatkozások 322

13. Gráfok spektruma **323**
13.1. Alapfogalmak 323
13.2. További eredmények 327
13.3. Feladat és megoldása 328
13.4. Hivatkozás 328

14. Hálózati folyamok **329**
14.1. Folyamok 329
14.2. Alkalmazások 340
14.3. Hivatkozások 341

15. Matroidok **343**
15.1. Alapvető definíciók és tulajdonságok 343
15.2. Alkalmazások 347
15.3. Feladatok 350
15.4. Hivatkozások 350

III. Függelék **351**

Az $\binom{x}{n}$ polinomok **353**

Az x^n polinomok koordinátái **355**

A $P_k(n) := \sum_{i=1}^{n} i^k$ polinomok **357**

Parciális törtekre bontás **359**

Általános irodalom **363**

Név- és tárgymutató **365**

Bevezetés

Könyvünk a Veszprémi Egyetemen Műszaki Informatikus szakos hallgatóinak tartott bevezető jellegű előadások alapján készült, azok kibővített változata, de tartalmát úgy próbáltuk összeállítani, hogy más egyetemek mérnök-, tanár- vagy programtervező szakos hallgatói is sikerrel forgathassák, nem csak vizsgákra való készülésük alkalmával, hanem az egyetem elvégzése után is.

A matematika címben szereplő "diszkrét" (latin eredetű) jelzőjét "elkülönült", "különálló" -nak kell fordítanunk: *véges* halmazokkal foglalkozunk[(1)], amiknek elemeit lehet "elkülöníteni" . (Vagyis (elsősorban) az analízisre és valószínűségszámításra jellemző "folytonos" jelző *ellentétéről* van szó.)

Két nagy ága a *kombinatorika* és a *gráfelmélet.*

A **kombinatorika** a véges halmazok *megszámlálásának, leszámlálásának* tudománya[(2)]. Ne feledjük azonban, hogy véges halmazokat általában nem olyan egyszerű megszámolni, mint például amikor kirándulás végeztével hazafelé zoknijaink számát ellenőrizzük, ugyanis véges halmazok mérete akár $10^{10^{10}}$ és még "kicsit" nagyobb is lehet ... ! Gondoljuk csak meg: a Világegyetem atomjainak száma is véges, vagy az alig millió atomból álló DNS molekulát alkotó *két* atomcsoport-pár hányféle változatos élőlényt tud kódolni, vagy akár az ABC 24 betűjéből hányféle változatos, legfeljebb 1000 oldalas könyvet lehet megírni, vagy emlékezzünk a sakkjáték feltalálója által kért (teljesíthetetlen) jutalomra[(3)].

A példákat bárki sokáig könnyedén sorolhatná. Hasonlóan nagy kife-

---

[1)] A "véges matematika" sajnos kicsit más tudományterületet takar, ezért használatos a "diszkrét" jelző.

[2)] a "kombinatorika" latin eredetű szó, jelentése *csoportosítás, rendezgetés* (ld. még a *kombináció* szó magyarázatát a 2.3. alfejezetben).

[3)] A sakktábla első mezőjére csak 1 búzaszemet, a másodikra csak 2 -őt, és minden további mezőre kétszer annyi szemet kért mint az azt megelőzőre. A hatvannégy mezőn így összesen csak $2^{64} - 1$ szem, azaz körülbelül $1,2 \cdot 10^{12}\ m^3$ búzát kért a feltaláló, a hagyomány szerint.

jezésekkel a Stirling formulánál, $n!$ -nál, binomiális együtthatóknál, pontosabban az egész könyvben szinte minden lapon találkozhatunk. Így nem meglepő, hogy a megszámlálások fortélyaival a 2. Fejezettől kezdődően *hét* fejezeten keresztül több mint 170 oldalon foglalkozunk (azért ”csak” ennyi, mert ez csak egy bevezető könyv[4].)

A **gráfelmélet**, általános iskolai ismereteinkkel ellentétben nem pontok és vonalak ”tudománya”, hanem sokkal általánosabb: egy (tetszőleges) halmaz elemeivel (valamik, objektumok, nem csak tárgyak) *és a közöttük levő kapcsolatok*kal foglalkozik. A kapcsolatok első közelítésben lehetnek egyszerűek (vagy van vagy nincs), vagy általánosabban sokfélék (”színezettek”). Az elmélet (nemtriviális) alapjait 15 Fejezetben ismerheti meg az Olvasó!

Tudomásunk szerint olyan magyar nyelvű korszerű, *modern*, átfogó irodalom, mely könnyen hozzáférhető *minden* egyetem hallgatóinak nincs. Hajnal Péter [*HaPé*,'97] *Gráfelmélet* c. könyve ugyan kivétel, de matematikus hallgatóknak szóló inkább elméleti mű, kombinatorikából pedig körülbelül 30 éve jelent meg összefoglaló ”modern” könyv.

Könnyen érthető, elsősorban mérnököknek szóló könyvet szándékoztunk írni. Gyakorlati alkalmazásokra, az algoritmikus szemléletre is igyekeztünk nagyobb súlyt fektetni, különösen a *gráfelmélet* részben. Emellett, amikor csak tehettük, a diszkrét matematika alkalmazásaiba, a matematika más ágaival való kapcsolatainak révén más területekre is elkalandoztunk, néha történeti megjegyzéseket és érdekességeket is bőven írtunk. Reméljük, ez nem válik az Olvasók kárára, hiszen a különböző tudományterületek közötti összefüggések *léte*, változatossága hozzák a legmeglepőbb, legnagyszerűbb felfedezéseket. Röviden: ha valaki (csak) vizsgára készüléskor veszi elő a könyvet, kihúzhat[5] belőle. Ismételjük azonban: könyvünk bevezető jellege miatt még így is csak vázlatosan tudjuk érinteni a diszkrét matematika főbb fejezeteit!

Mivel könyvünket elsősorban egyetemi hallgatóknak szántuk, feltételezzük a *szokásos* I. éves egyetemi analízis- és lineáris algebrai tananyag ismeretét (komplex számok, egyváltozós függvények deriválása és integrálása, végtelen sorok, parciális törtekre bontás módszere illetve absztrakt vektorterek, koordináták és bázistranszformációk, lineáris leképezések, sajátértékek és -vektorok, mátrixok diagonalizálása).

---

[4]) Javasoljuk a mondottakat az Olvasóknak (hallgatóknak) vizsgára készülés előtt megszívlelni.

[5]) Most még időben szólunk: csak az előadó utasításainak megfelelően !

Könyvünkben nem csak szárazon közöljük a tényeket (”definíció, tétel, megjegyzés”), hanem előadásszerű, **közvetlen stílus**t választottunk (talán sikerült), még ha néha túlmagyarázás vádja is érhet bennünket. A közölt rövid életrajzi adatok tájékoztató jellegűek, bővebb adatok például a

WWW-HISTORY.MCS.ST-AND.AC.UK/HISTORY/MATHEMATICS
címen is találhatók.

Bár minden fejezet végére igyekeztünk pár gyakorló feladatot elhelyezni, ezek sokszor csak érdekességek, gyakorlás céljára elsősorban a szerző [$SzIs,'$ 97] valamint Hajnal Péter [$HaPé,'$ 97] feladatgyűjteményeit ajánljuk.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a könyv legvégén található általános irodalom tételeire a részletesebb *[név,'évszám]* szerkezetű hivatkozások utalnak, míg az egyszerűbb *[betűk]* alakú hivatkozások az egyes fejezetek végén levő speciális irodalomjegyzékre utalnak.

Hálás köszönet illeti nagyszerű ELTE-s tanáromat, **Dr.Simonovits Miklós**-t, és barátaimat, **Dr.Hujter Mihály** -t és **Dr.Hajnal Péter** -t, akik baráti és szakmai támogatásukkal lehetővé tették a könyv megszületését!

Köszönet további kollégáimnak és barátaimnak, **Dr.Tarján Klárá** -nak, **Dr.Dósa György** -nek és **Róka Sándor** -nak, akik a kézirat alapos (és fáradságos) átolvasását vállalva számtalan helyen javították a könyv tartalmát. Köszönöm az EFOP-3.4.3-16-2016-00009 azonosító számú pályázat(6) támogatását is!

A könyv szedését, tördelését, nyomtatását LaTex (pontosabban SCIENTIFIC WORKPLACE) ”*segítségével*” (?) a Szerző sajátkezűleg végezte.
Az Olvasóktól bármilyen észrevételt, hibát, javaslatot, megjegyzést a Szerző örömmel fogad.

Veszprém, 2021. január

Dr. Szalkai István

SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

Pannon Egyetem

Matematikai Tanszék

6) "A felsőfokú oktatás minőségének és hozzáférhetőségének együttes javítása a Pannon Egyetemen"

0.1. Általános jelölések

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – rendre a természetes-, egész-, racionális-, valós- és komplex számok halmaza, ahol $0 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}_+$ – a nemnegatív valós számok halmaza

n – az $n \in \mathbb{N}$ természetes számot néha azonosítjuk az $\{1, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ halmazzal , és csak egyszerűen n -et írunk[7)]

$|A|$ vagy néha $\#A$ – a tetszőleges (véges) A halmaz számossága (elemeinek száma)

$f : A \hookrightarrow B$ = $f : A \to B$, f függvény, *és* $Dom(f) \subset A$ (azaz *nem* kötjük ki, hogy $Dom(f) = A$)

$\mathcal{P}(A) := \{X : X \subset A\}$ – az A halmaz **hatványhalmaza**, azaz (összes) részhalmazának családja (halmaza)

${}^{A}B := \{f : A \to B\ ,\ f\ \mathit{függvény}\}$

A^k – az A (tetszőleges) halmaz k -adik Descartes[8)] hatványa, $k \in \mathbb{N}$

$A^0 := \{\emptyset\}$ – az A halmaz 0 -adik Descartes hatványa[9)]

$A^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$ – az A halmazból képezhető összes, véges sorozatok ("szavak", stringek) halmaza

$A^{\mathbb{N}} := {}^{\mathbb{N}}A$ – az A halmazból képezhető összes, *végtelen* sorozatok (mint a matematikai analízisben) halmaza

$[A]^k := P_k(A) := \{X \subseteq A : |X| = k\}$ – az A halmaz k elemű részhalmazainak (szűkített hatvány-) halmaza, A tetszőleges halmaz, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám

---

7) tehát most nem a halmazelméletben szokásos $n = \{0, ..., n-1\}$ (azaz $n =$ "*az őt megelőzőek halmaza*") elvet követjük!

8) René Descartes (1596-1650) francia filozófus, matematikus és fizikus. A természettudományok deduktív (következtető) megismerését hirdette. Bár a jólismert, róla elnevezett koordinátarendszer alapjai már előtte is ismertek voltak, de róla írt műve hatására kezdtek kortársai és a későbbi matematikusok e módszerrel intenzívebben foglalkozni.

9) ekkor ugyanis már $n = 0$ esetén is igaz lesz az $A^{n+1} = A^n \times A$ összefüggés.

$[A]^{\leq k} := P_{\leq k}(A) := \{X \subseteq A : |X| \leq k\}$ – az A halmaz *legfeljebb k* elemű részhalmazainak (szűkített hatvány-) halmaza, A tetszőleges halmaz, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$ - zárt intervallum

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$ - nyílt intervallum

$[x] := \lfloor x \rfloor :=$ az $x \in \mathbb{R}$ valós szám *alsó* egészrésze, azaz a legnagyobb, x -nél nem nagyobb egész szám

$\lceil x \rceil :=$ az $x \in \mathbb{R}$ valós szám *felső* egészrésze, azaz a legkisebb, x -nél nem kisebb egész szám

$\mathcal{O}(f)$ – (olv: "*nagy ordó f*") - "körülbelül" f , ahol $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ függvény. (A pontos definíciót $[SzIs,'01]$ III. rész 2.1. Definíciójában adjuk meg.)

$f \sim g$ – f és g *aszimptotikusan egyenlő,* azaz ha $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

HF – Házi Feladat

Q.E.D. – bizonyítás vége. (Szó szerint: Quod erat demonstrandum = amit bizonyítani kellett (latin).)

$\square$ – definíció, állítás, tétel, bizonyítás, megjegyzés, egy nagyobb gondolati rész vége (akkor is, ha az állítást nem bizonyítjuk).

I. rész

Kombinatorika

1. fejezet

Halmazok

Halmazalgebra elemei: Venn-diagramok, alapműveletek és elemi tulajdonságaik, Cantor tétele. Boole-algebrák. Halmazok minőségi függetlensége és véges Boole-algebrák szerkezete.

Mielőtt a következő fejezettel kezdődően a sokféle összeszámlálási módszerrel és segédeszközzel megismerkednénk, jelen fejezetben magukat a halmazokat vizsgáljuk meg kicsit közelebbről. Bár csak futó megjegyzéseket teszünk, mind diszkrét matematikai mind algebrai tanulmányainkban sem lesznek haszontalanok az alábbiak.

1.1. Halmazok definíciója

Mi is a *halmaz,* amit már sok éve használunk matematikai számításaink során, sőt még azt is hallottuk, hogy az egész matematika felépíthető mindösszsze a *halmaz* és *eleme* fogalmak segítségével? Könyvünkben csak vázolni tudjuk a halmazelmélet axiomatikus precíz bevezetését, elsősorban csak a középiskolai naiv definíció (”*halmaz = azonos tulajdonságú elemek összessége*”) hibáira hívjuk fel a figyelmet. Mert mi is az a ”tulajdonság” , az ”elem” vagy ”összesség” , de még talán az ”azonos” szó is precíz magyarázatot igényel ... Ráadaásul Cantor alábbi tétele sem sok jót ígér:

1.1. Tétel (Cantor[1]): *Nem létezik olyan halmaz, mely (a ”világ”) minden elemét tartalmazná.*

[1] Georg Ferdinand Cantor (1845-1918) német matematikus, a modern matematika egyik előfutára, az axiomatikus halmazelmélet megteremtője. Ő vizsgálta először precízen

Bizonyítás: Indirekte tegyük fel, hogy Z mégis olyan halmaz, ami a világ minden elemét tartalmazza.

A halmaz definíciója szerint ekkor azonban az

$$Y := \{x \in Z \mid x \notin x\} \tag{1.1}$$

képlettel definiált "valami" is halmaz, hiszen "összesség" a $\{\}$ jel miatt, az $x \notin x$ képlet egy nyilvánvalóan értelmes tulajdonság (még példákat is könnyen találunk), és Z elemei biztosan jók "elemek" -nek.

Z definíciója szerint mindent tartalmaz, így Y -t is: $Y \in Z$. Ekkor már csak azt kell eldöntenünk, hogy Y eleme önmagának vagy sem, azaz $Y \in Y$ vagy $Y \notin Y$, más eset nem lehet[(2)].

I. eset: Ha $Y \notin Y$, akkor ($Y \in Z$ miatt) Y kielégíti az (1.1) definíció belsejében szereplő "$x \in Z \mid x \notin x$" tulajdonságot, vagyis eleme ezen tulajdonságú elemek halmazának, Y -nak. De ez $Y \in Y$ -t jelent, ami ellentmond az $Y \notin Y$ feltételnek.

II. eset: $Y \in Y$ esetén pedig Y nem elégíti ki az (1.1) definíció belsejében szereplő tulajdonságot, vagyis nem eleme ezen tulajdonságú elemek halmazának, Y -nak. Képletben ez $Y \in Y$ -t jelent, ami ismét ellentmond legutóbbi feltevésünknek, $Y \notin Y$ -nak.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, ami az indirekt feltétel helytelenségét, azaz a bizonyítás végét mutatja. □

A tétel szerint a szokásos naiv "definíció" (azaz "*halmaz = azonos tulajdonságú elemek összessége*") biztosan helytelen, hiszen szerinte Z -nek is halmaznak kellene lennie ... . A matematikai logika eszközeivel kikerülhetjük majd a fenti és hasonló ellentmondásokat. (Durván fogalmazva Z már túl nagy ahhoz, hogy "halmaz" lehessen, mindössze csak "osztály".)

Ízelítőül megmutatjuk a halmazelmélet néhány axiómáját és azok néhány elemi következményét.

1.2. Definíció (Axiómák): i) *A* **halmaz** *és az* **eleme** *($\in$ – reláció) fogalmakat nem definiáljuk (alapfogalmak). Minden vizsgált objektum hal-*

---

a végtelen számosságokat, melyekről részletesebben $[HS]$ vagy $[HH]$ -ban olvashatunk. *Kontinuum-hipotézis* néven ismert problémáját (azaz "van-e $\mathbb{R}$ -nek olyan X részhalmaza, melynek számossága $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ számossága között van, azaz $|\mathbb{N}| \subsetneqq |\mathbb{X}| \subsetneqq |\mathbb{R}|$") csak 1960 -ban oldotta meg P.J.Cohen amerikai matematikus: "*Tétel: A válasz a matematika szokásos alapfeltevései (axiómái) között* nem *adható meg !* " *(*Az általa felfedezett általános módszerről, a *forszolás* -ról magyar nyelven $[HJSz]$ -ben olvashatunk röviden.*)*

[2)] ld. az 1.2.(ii) Axiómát

maz, lehet eleme egy másik halmaznak, nincs ”elem” *és* ”halmaz” *megkülönböztetés.*

ii) *Tetszőleges x és A esetén az $x \in A$ és az $x \notin A$ relációk közül* **pontosan az egyik** *teljesül.*

Egy tetszőleges A halmaz pontosan akkor egyértelműen **megadott** *vagy* **meghatározott**, *ha tetszőleges x esetén az $x \in A$ és az $x \notin A$ relációk közül egyértelmű hogy melyik áll fenn.*

iii) *Két tetszőleges A , B halmaz pontosan akkor* **azonos,** *A=B , ha tetszőleges x esetén az $x \in A$ és az $x \in B$ relációk ugyanakkor teljesülnek (ill. nem teljesülnek).*

iv) *Egy tetszőleges A halmaz* **üres halmaz,** *ha minden x esetén $x \notin A$ teljesül.* □

A halmazelmélet szokásos, Zermelo-Fraenkel[3] féle összes axiómáját részletesen például Hajnal András és Hamburger Péter [HH] könyvének közepén az Appendixben olvashatjuk el.

1.3. Állítás: *Üres halmaz (legfeljebb) csak egy lehet.*

Bizonyítás: Ha A és B mindkettő üres halmaz, akkor minden x esetén az $x \notin A$ és az $x \notin B$ relációk mindegyike teljesül, vagyis a (iii) axióma szerint $A = B$. □

Bár közismert, de ismét felhívjuk a figyelmet: a halmaz elemeinek megadási módja lényegtelen, sőt elemeket többször felsorolva sem változik a halmaz ”összetétele”: csak az a fontos, hogy a halmaznak *mely* ”valamik” az elemei!

Néhány angol elnevezés: *set* = halmaz, *ground set* = alaphalmaz, *subset* = részhalmaz, *empty set* = üres halmaz, *power set* = hatványhalmaz, *intersection* = metszet, *union* = unió, *complement* = komplementer ($\neq$*compliment*=bók), *cardinality of* A = A számossága.

Most pedig a halmazok közötti *műveleteket* nézzük meg közelebbről.

---

[3] **Ernst Zermelo** (1871-1953) 1903 -ban alkotta meg a halmazelmélet ma elfogadott axiómarendszerét, **Adolf Fraenkel** (1891-1965) német matematikus 1921 -ben kelt levelében bizonyítja be először a *kiválasztási axióma* (Axiom of Choice=A**C**) függetlenségét, azaz szükségességét, innen a **ZFC** axiómarendszer elnevezése.

1.2. Boole - algebrák

A szokásos halmazműveleteket ismertnek tekintjük, bármelyik (közép- vagy általános iskolai) tankönyvben, részletesebben esetleg Urbán János $[UJ]$ vagy Hámori Miklós $[HM]$ könyveiben eleveníthetjük fel ismereteinket. Néhány gyakorló feladat a szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében is található.

A Venn[(4)] - diagramokkal is már találkozhattunk: a halmazok elemeit íróasztalunkonk úgy helyezzük el, hogy ceruzavonallal körül tudjuk keríteni az azonos halmazba eső elemeket, több halmazba eső elemeket természetesen különböző színű vonallal is körülkerítve, végeredményben így több különböző halmaz közötti kapcsolatot tudunk vizsgálni. A módszer nem csak kisiskolások számára ajánlott, hiszen Stone 1.11. tételében a diagramok jogosságáról szólunk, míg Grünbaum 1.15. tételében ügyes rajzolásuk mikéntjével foglalkozunk.

A halmazműveletek *legfontosabb* tulajdonságait az alábbiakban foglaljuk össze. (A komplementer művelet miatt egy I alaphalmazt kell előre rögzítenünk, amely tartalmazza az összes általunk használt halmazt.)

1.4. Állítás: *Tetszőleges $A, B, C \subseteq I$ halmazokra teljesülnek az alábbi azonosságok:*

kommutativitás	$A \cup B = B \cup A$	(BA1)
	$A \cap B = B \cap A$	(BA2)
asszociativitás	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(BA3)
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(BA4)
disztributivitás	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(BA5)
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(BA6)
elnyelési tulajdonságok	$A \cup (A \cap B) = A$	(BA7)
	$A \cap (A \cup B) = A$	(BA8)
$\emptyset$ és I tulajdonságai	$A \cup \overline{A} = I$	(BA9)
	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	(BA10)
	$A \cup \emptyset = A$	(BA11)
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(BA12)
	$A \cup I = I$	(BA13)
	$A \cap I = A$	(BA14)

□

[4)] Johann Venn (1834-1923) angol lelkész 1880 -ban írt cikket a róla elnevezett ábrák pedagógiai alkalmazásáról, bár Euler már több mint száz évvel előtte használta ezeket a halmazábrákat.

A fenti tulajdonságokat bárki könnyen beláthatja (akár a halmazműveletek "szóbeli" definíciója alapján, akár Venn-diagramok segítségével), sőt sok más azonosságot is könnyű találni és azokat is igazolni.

Sokkal hasznosabb azonban, ha a további azonosságokat megpróbáljuk a fentiekből levezetni (bizonyítani), és észrevesszük, hogy még sok más két- és egyváltozós művelet is teljesíti a fenti (BA1)-(BA14) tulajdonságokat — így a belőlük levezetett más azonosságokat is.

Az alábbi fogalmak és módszerek, tételek az absztrakt algebra körébe tartoznak, amit még vázlatosan sincs módunk érinteni, csak az általunk említett fogalmakat vázoljuk röviden.

1.5. Definíció: *Ha a H nemüres halmazon* (**alaphalmaz**) *adottak az* $f_1, ..., f_m$ **műveletek** *(azaz $f_i : H^{\tau(i)} \to H$ egy $\tau(i)$ -változós függvény)*, $R_1, ..., R_n$ **relációk** (*azaz $R_j \subseteq H^{\pi(j)}$, $\pi(j)$ -változós*) , *akkor az*

$$\mathcal{A} := (H, f_1, ..., f_m, R_1, ..., R_n)$$

rendezett $(1+m+n)$ *-est* **algebrai struktúrá***nak nevezzük. A struktúrában szereplő $c \in H$* **konstansok** *(kitüntetett elemek)* 0 *-változós függvényeknek tekinthetők, azaz $\tau(i) = 0$ a megfelelő i -re. Az $\mathcal{A}$ algebrai struktúra* **típusa**

$$\mathbf{type}(\mathcal{A}) := (\tau, \pi)$$

mutatja meg azt, hogy a műveletek és a relációk hány változósak (és hány konstans elem van a struktúrában). $\square$

1.6. Definíció: *A $\mathcal{B} = (H, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ struktúra* **Boole**$^{(5)}$**-algebra (BA),** *ha típusa* $((2, 2, 1, 0, 0), ())$ *(azaz a $\vee, \wedge$ műveletek kétváltozósak, $\neg$ egyváltozós H -n, $|, \circ \in H$ konstans elemek), és az 1.4. Állítás* (BA1)-(BA14) *tulajdonságai (a Boole - algebra* **axiómái***) teljesülnek (értelem szerűen az $\cup, \cap, ^-, I, \emptyset$ helyére rendre $\vee, \wedge, \neg, |, \circ$ -t írva).*

Az $\cup$ ill. $\vee$ műveletet általában **konjukció***nak, a $\cap$ ill. $\wedge$ műveletet* **diszjukció***nak, a $^-$ ill. $\neg$ műveletet* **komplementer***nek, míg az $I, \emptyset$ illetve $|, \circ$ elemeket* **egység-** *illetve* **nullelem***nek hívják.* $\square$

---

[5] **Georg Boole** (1815-1864) angol matematikus, a formális algebra első kutatója, a matematikában használatos "logikus gondolatmenetek" törvényszerűségeit vizsgálva jutott el a matematikai logika megalapozásához, a róla elnevezett algebrai struktúrák segítségével.

Megjegyezzük, hogy műveleti *jelek* (szimbólumok) formája lényegtelen, csak tulajdonságaik (a (BA1)-(BA14) axiómák) a lényegesek, mint a mostani példában is látható.

1.7. Példák: (a) Mint láttuk, a szokásos *halmazműveletek* Boole-algebrát alkotnak: tetszőleges I halmaz esetén: $H := \mathcal{P}(I)$ az I hatványhalmaza (*összes* részhalmazának halmaza), $\vee, \wedge, \neg, |, \circ$ pedig rendre a szokásos $\cup, \cap, ^-, I, \emptyset$. Ezt a Boole- algebrát **halmazalgebrá**nak nevezzük, és $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ -vel jelöljük.

(b) Legyen tetszőleges $I \neq \emptyset$ halmaz esetén $\mathbf{X} \subset \mathcal{P}(I)$ olyan halmazrendszer I *részhalmazaiból* (azaz I *néhány* részhalmazának halmaza), mely **zárt** a halmazműveletekre és tartalmazza I -t (azaz tetszőleges $A, B \in \mathbf{X}$ esetén $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \in \mathbf{X}$, valamint $I \in \mathbf{X}$, ekkor persze $\emptyset = \overline{I} \in \mathbf{X}$). Ekkor könnyen meggondolható, hogy az $\mathcal{X} := (\mathbf{X}, \cup, \cap, ^-, I, \emptyset)$ struktúra is Boole-algebra. Hiszen a halmazműveletek tulajdonságai minden halmazra igazak, vagyis $\mathbf{X}$ elemeire is, így a (BA1)-(BA14) axiómák $\mathcal{X}$ -ben is teljesülnek, az $\mathbf{X}$ alaphalmaz *zártsága* pedig biztosítja, hogy tetszőleges $A, B, C \in \mathbf{X}$ halmazok esetén az axiómákban szereplő $A \cup (B \cap C)$, stb. halmazokról $\mathcal{X}$ -ben egyáltalában mondhassunk valamit.

Az $\mathcal{X}$ struktúra alaphalmaza csupán a $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ struktúra alaphalmazának *részhalmaza*, azaz $\mathbf{X} \subseteq \mathcal{P}(I)$, a műveletek mindkét struktúrában azonosak, ezért az $\mathcal{X}$ -et a $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ **részstruktúrájának** mondhatjuk és röviden $\mathcal{X} \leq \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ -vel jelöljük.

(c) Mint jólismert, a *logikai műveletek* ("és","vagy","nem"/tagadás/) is Boole algebrát alkotnak, azaz a $H := \{h, i\}$ (hamis,igaz), $\vee :=$ "*vagy*", $\wedge :=$ "*és*" , $\neg :=$ "*nem*" , $| := i$, $\circ := h$ választással teljesülnek a (BA1)-(BA14) axiómák.

(d) A *háromértékű logika* alaphalmaza $H = \{h, k, i\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (k a *kvázi* (félig) igazságnak felel meg), a műveletek $a \cup b := \max\{a, b\}$, $ab := \min(a, b)$, $\overline{a} := 1 - a$. (Csak *kvázi*-BA, mert (BA9) és (BA10) nem teljesülnek.)
(Hasonlóan lehet értelmezni a több-, sőt végtelen értékű, általában pedig Boole- értékű logikát!)

(e) Legyen $N \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges *négyzetmentes* szám (azaz egyik prímtényezője sem szerepel 1 -nél magasabb hatványon), és legyen $H := \{N$ osztói$\}$, továbbá legyen tetszőleges $a, b \in H$ (azaz a és b osztói N -nek) esetén $a \vee b := lnko(a, b)$, $a \wedge b := lkkt(a, b)$ (legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös), $\neg a := \frac{N}{a}$, $| := N$ és $\circ := 1$. Mint belátható, az így definiált $(H, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ struktúra is Boole-algebra (mely a számelméletben játszik fontos szerepet).

(f) Legyen Ω egy tetszőleges eseménytér, és legyen $H := \mathcal{P}(\Omega)$ (azaz H elemei pontosan az Ω -beli események). Jelölje $\vee, \wedge, \neg, |, \circ$ rendre az események összegét, szorzatát, tagadását, a biztos és lehetelen eseményt. Valószínűségszámításai tanulmányaink szerint az így kapott *eseményalgebra* is teljesíti a (BA1)-(BA14) axiómákat, azaz ismét Boole algebra.

(g) Ismert és fontos példák a *kapcsoló-* és *csapalgebrák*: villanykapcsolók és vízcsapok soros, párhuzamos ill. fordított működésű kapcsolása, ahol $I =$*állandó áramlás* ("csőtörés") és $\emptyset =$*nincs áram.* Igen, ezek azonosak (izomorfak) a (c) pontban leírt logikai műveletek Boole- algebrájával. (Boole-algebrák izomorfizmusával az 1.10. Definícióban és az 1.11. Tételben foglalkozunk.)

(h) A színek keverésekor is van egy alaphalmazunk (a lehetséges kiindulási és kikeverhető színek halmaza), az $\vee$ és $\wedge$ műveleteket megfeleltethetjük az additív és szubtraktív keverésnek, a $\neg$ műveletet a komplementer (kiegészítő) színnek, természetesen $I :=$*fehér* és $\emptyset :=$*fekete.*

(i) Felhívjuk a figyelmet, hogy a valós számok szokásos összeadása és szorzása *nem* teljesíti a (BA1)-(BA14) axiómákat (házi feladat az Olvasóknak), azaz *nem* Boole algebra !

Az alábbi tulajdonságok csak a (BA1)-(BA14) összefüggések felhasználásával levezethetők, így nem csak a halmazműveletekre, hanem a fenti konkrét Boole-algebrák mindegyikére is igazak.

1.8. Állítás: *Tetszőleges* $(H, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *Boole-algebra tetszőleges* $a, b \in H$ *elemeire teljesülnek az alábbi azonosságok:*

(a)	$a \vee a = a\ ,\ \ a \wedge a = a$	($\vee$ és $\wedge$ idempotensek)
(b)	$\neg\neg a = a$	($\neg$ involúció)
(c)	$a \vee b = \,|\,$ és $a \wedge b = \circ$ akkor $b = \neg a$	($\neg$ unicitása/egyértelműsége)
(d)	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$	
(e)	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	(De Morgan azonosságok)
(f)	$\neg| = \circ$ és $\neg\circ = \,|$	

$\square$ [6]

Könnyen meglehet, hogy a kedves Olvasó más könyvet fellapozva a Boole-algebrák definíciójában nem a fenti (BA1)-(BA14) axiómákat találja, hanem néhányuk helyett a fenti (a)-(f) valamelyikét. Az igazság az, hogy azon más

[6] **Augustus De Morgan** (1806-1871) angol matematikus

axiómarendszerek *ekvivalensek* a fenti (BA1)-(BA14) axiómarendszerrel: mindegyik axiómarendszerből levezethető a másik axiómarendszer összes axiómája (és hasonlóan a (BA1)-(BA14) rendszerből is levezethetők más rendszerek axiómái), így annak minden következménye is levezethető a kiindulási axiómarendszerből. Vagyis Boole - algebrák említésekor nyugodtan gondolhatunk a (BA1)-(BA14) axiómákra (és a fenti (a)-(f) következményekre is).

Most néhány sorban felsoroljuk a Boole- algebrák elméletének legfontosabb eredményeit, de nem árt tudnunk, hogy a Boole-algebrák szoros kapcsolatban vannak az (algebrai) hálókkal, és mind a Boole- algebrák, mind a hálók elmélete az absztrakt algebra jelentős részei. Boole- algebrákról részletesebben Urbán János $[UJ]$ könyvében vagy (szinte) bármelyik absztrakt algebra könyvben olvashatnak az érdeklődők.

1.9. Tétel (a Dualitás Elve**):** *Legyen* Φ *egy olyan egyenlőség (formula), mely a Boole- algebrák nyelvén van felírva (azaz csak a* $\vee, \wedge, \neg, |, \circ$ *jeleket, változó- és zárójeleket tartalmaz, és az* $=$ jelet*) és a változók minden lehetséges értékére igaz (azaz* **azonosság***). Cseréljük fel* Φ -ben az $\vee$ *és* $\wedge$ *jeleket, valamint az* $|$ *és* $\circ$ *jeleket, a többi jelet hagyjuk változatlanul. Ekkor a* Φ *azonosság így kapott* Φ" **duálisa** *is azonosság, azaz* Φ" *is igaz a változók minden értéke esetén.*

A tétel részletes bizonyítása elég hosszadalmas, így csak annyit említünk meg, hogy ha Φ azonosság, akkor (Gödel[7] teljességi tétele szerint) levezethető a (BA1)-(BA14) axiómákból, és mivel ezen axiómák között mindegyiknek szerepel a duálisa, ezért nyilván Φ duálisa, Φ" is levezethető az axiómákból, vagyis Φ" is igaz a változók minden értékére (a logikában tanult Igazság Tétel szerint), vagyis szintén azonosság. □

A fenti tétel szerint, ha sikerült egy egyenlőségről (valamilyen módon) megmutatnunk, hogy a változók minden lehetséges értéke esetén igaz (vagyis azonosság), akkor vele párhuzamosan már egy újabb azonosságot is felfedeztünk, az azonosság duálisát, sőt be is bizonyítottuk azt! Így például elég az egyik DeMorgan azonosságot bebizonyítanunk, vagyis házifeladataink számát is csökkenthetjük ezáltal.

Gondoljuk csak meg: Boole - azonosságokat az igazságtáblázat (a változók összes lehetséges értékének megvizsgálása) segítségével ugyan 100% biz-

---

[7] **Kurt Gödel** (1906-1978) német matematikus, a modern matematikai logika megalapozója, 1930 körül bizonyított tételei a modern logika alaptételei

tonsággal elvégezhetjük, de n változó esetén ez $\mathcal{O}(2^n)$ lépést[8] jelent. Például $n = 50$ esetén "csak" évekig, $n = 100$ esetén pedig már évmilliárdokig kellene várni míg szuperszámítógépünk befejezné megszakítás nélküli éjjel-nappali futását! (Ez szemléletesen látszik $[SzIs,'01]$ az *A Függelék* táblázatából.)

A következő tétel a "különböző" Boole-algebrák szerkezetének (struktúrájának) "azonosságáról" szól, egy ún. *struktúratétel.* Előtte azonban a Boole- algebrák "azonosságát" (*izomorfiáját*[9]) kell röviden precízen definiálnunk.

1.10. Definíció: *Két tetszőleges* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *és* $\mathcal{C} = (C, \sqcup, \sqcap, \dagger, \top, \Diamond)$ *Boole- algebra* **izomorf**, *jelben* $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, *ha létezik alaphalmazaik között egy* $f : B \to C$ *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amely a műveletekkel összhangban van (* **műveletettartó bijekció,** *vagyis* **izomorfizmus**) : *minden* $a, b \in B$ *esetén* $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$, $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$, $f(\neg a) = \dagger f(a)$ *és* $f(|) = \top$, $f(\circ) = \Diamond$. □

1.11. Tétel (Stone[10], 1936**):** *Tetszőleges Boole- algebra izomorf egy halmazalgebra valamely rész- (Boole-) algebrájával.* □

(A halmazalgebrákat az 1.7.a/ pontban, míg rész- Boole-algebráikat az 1.7.b/ példában definiáltuk.**)**

Természetesen az 1.7.a) példában leírt halmazalgebrák alaphalmaza $H = \mathcal{P}(I)$ számossága 2^I , azaz 2 -nek egy hatványa, és mivel nem minden Boole-algebra elemszáma 2 hatványa, ezért a fenti Tétel csak rész- Boole-algebrákkal való izomorfizmust biztosíthat általában.

Az 1.7. pontban szereplő *mindegyik* példáról könnyen beláthatjuk magunk is, hogy valójában valamely alaphalmazon a szokásos halmazműveletekről van szó, ennek belátását gyakorlásképpen az Olvasónak is melegen javasoljuk (HF)! Azonban ne feledjük, hogy Stone tétele az *összes* Boole-algebráról

---

8) a $\mathcal{O}(f(n))$ függvényt $[SzIs,'01]$ III. részében definiáljuk pontosan, körülbelüli jelentése *"kb. f(n)"* .

9) *izo morf* = "azonos alakú" (görögül), ezért is hívják az alaktannal foglalkozó tudományágakat "morfológiának".

A Steiniz által 1910 -ben megfogalmazott *"izomorfia elv"* szerint a matematika minden ágában az izomorfnak deklarált objektumokat *azonos*nak kell tekintenünk, azok csak (a matematika *azon* ágában) lényegtelen tulajdonságaikban térnek el egymástól, hiszen az (általunk definiált) izomorfizmus éppen a lényeges, általunk vizsgált tulajdonságokat emeli ki.

10) **Marshall Harvey Stone** (1903-1989) amerikai matematikus. Elsősorban analízissel foglalkozott.

szól, nem csak az 1.7. Példában felsoroltakról, amiből persze végtelen sok féle is lehetséges, nem lehet mindet felsorolni és kipróbálni!

Számunkra Stone tétele azért hasznos, mert így bármilyen Boole- azonosságot elegendő Venn- diagramokkal ellenőriznünk, szemléltetnünk, minden más Boole- algebra ennek csak izomorf képe.

Stone fenti tétele után nem meglepő (bár nem azonnali következménye) az alábbi eredmény, amelynek a matematikai logikában van fundamentális szerepe:

1.12. Tétel (a Boole-algebrák teljessége**):** *Tetszőleges, a Boole- algebrák nyelvén felírt* Φ *egyenlőség* (*formula*) *vagy minden Boole-algebrában igaz, vagy minden Boole-algebrában hamis (azaz* Φ tagadása *igaz).*

Gödel teljességi tétele szerint ebből az is következik, hogy tetszőleges Φ *formula vagy annak tagadása bizonyítható (azaz eldönthető) a* (BA1)-(BA14) *axiómákból.*[11] □

Ez azért meglepő, mert éppen Gödel *nemteljességi tételei* szerint a "legtöbb" axiómarendszerben (mindig) van eldönthetetlen állítás ... – de kissé elkalandoztunk a kombinatorikától.

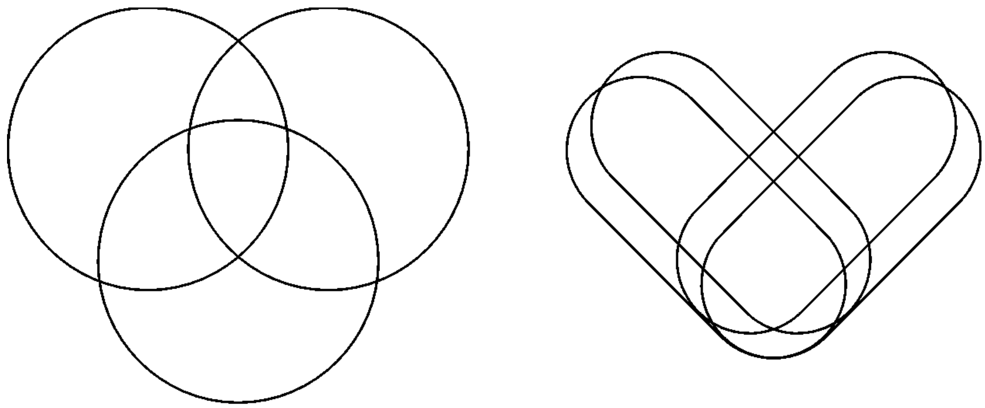
1.3. Halmazok minőségi függetlensége és véges Boole-algebrák szerkezete

Ebben az alfejezetben részletesebben megvizsgáljuk a véges halmazalgebrák (és így a véges Boole-algebrák) szerkezetét, annál is inkább, mivel véges halmazokon felmerülő (bármilyen) kérdés már a kombinatorikához tartozik. A felmerülő kombinatorikai problémákat javasoljuk az Olvasónak gyakorlás céljából meggondolni, az eredmények a későbbi matematikai logikai tanulmányoknál is hasznosak lesznek.

Emlékezzünk csak vissza: milyen ábrákat is szoktunk rajzolni, ha három, esetleg négy *általános* halmazról beszélünk, minden előzetes megkötés nélkül?

---

[11] azaz a Boole algebrák axiómarendszere *teljes.*



1.1. ábra
Minőségileg független halmazok

Halmazok általános "helyzetű" ábrázolása alatt azt értjük, hogy minden előfordulható metszetet ("egyik halmaz(ok)ban benne van, másik(ak)ban nincs") ábránkon meg tudjunk mutatni, szerepeljen ilyen részhalmazt jelképező tartomány.

Először a szükséges halmazelméleti fogalmat definiáljuk, majd az 1.14.Állításban ismertetett és B. Grünbaum 1975 -ös eredményével (1.15.Tétel) megnyugtatjuk az Olvasót: tetszőleges számú halmaz esetén fel lehet rajzolni a fentihez hasonló Venn-diagramokat (amelyek ráadásul szépek is)!

1.13. Definíció: *Legyen rögzített egy I alaphalmaz. Ekkor tetszőleges $A \subset I$ részhalmaz esetén legyen*

$$A^{+1} := A \quad \text{és} \quad A^{-1} := \overline{A} \quad .$$

Ekkor tetszőleges $A_1, ..., A_n$ halmazok **minőségileg függetlenek**[(12)]**,** *ha tetszőleges $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \{+1, -1\}$ számok esetén*

$$A_1^{\varepsilon_1} \cap ... \cap A_n^{\varepsilon_n} \neq \emptyset \qquad \square$$

Vagyis valóban tetszőleges metszet nem üres, azaz létezik.

[12)] sokféle függetlenséget vizsgálunk még a halmazelméleten belül is, ezért hangsúlyozzuk a "minőségileg" jelzőt a továbbiakban mindig. (A *mennyiségileg független* halmazrendszereket a 4.3. "Additív halmazfüggvények" c. alfejezet 4.17.(iv) pontjában definiáljuk.)

A matematikai precízség megköveteli, hogy megmutassuk: független halmazok igenis léteznek. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy az alábbi állítás és bizonyítása tisztán kombinatorikai jellegű, kombinatorikai szempontból is lényeges, tanulmányozását tehát fokozottan ajánljuk!

1.14. Állítás: (i) *Ha $A_1, ..., A_n \subset I$ tetszőleges, minőségileg független halmazok, akkor $|I| \geq 2^n$.*

(ii) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan 2^n elemű I halmaz és annak $A_1, ..., A_n \subset I$ részhalmazai, melyek minőségileg függetlenek.*

Bizonyítás: (i) Az A_i halmazok kitevőinek $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{+1, -1\}^n$ sorozatát 2^n féleképpen tudjuk megválasztani, és mivel az $A_1^{\varepsilon_1} \cap ... \cap A_n^{\varepsilon_n}$ metszetek egymástól diszjunktak és egyikük sem üres, ezért az I alaphalmaznak legalább 2^n elemének kell lennie.

(ii) Minimális méretű I alaphalmazt csak úgy érhetünk el, ha mindegyik $A_1^{\varepsilon_1} \cap ... \cap A_n^{\varepsilon_n}$ metszet egyelemű. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges. Legyen ezért $I := \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, és legyen

$$A_i \quad := \quad \{x \in I \ : \ (x)_i^{[2]} = i\}$$

ahol

$$(\mathbf{x})_{\mathbf{i}}^{[\mathbf{2}]} := \quad x \ \ 2 \textit{-es számrendszerbeli alakjának } i \textit{ -edik számjegye } .$$

Ekkor tetszőleges $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in (\{+1, -1\})^n$ kitevősorozat esetén nyilván

$$A_1^{\varepsilon_1} \cap ... \cap A_n^{\varepsilon_n} = \{ \ \overline{\varepsilon_1 ... \varepsilon_n}^{[2]} \ \} \ ,$$

vagyis a metszet éppen egyedül azt az x számot tartalmazó (rész)halmaz, aminek kettes számrendszerbeli alakja éppen $\overline{\varepsilon_1 ... \varepsilon_n}^{[2]} = x$. □

Persze, a (ii) állítás bizonyítása alapján *bármely* 2^n elemű H halmazban található n minőségileg független $A_i^H \subset H$ részhalmaz, csak egy $\varphi : I \to H$ bijekciót kell keresnünk, és az I halmazban talált konstrukciót kell φ segítségével H -ba átvinnünk (azaz legyen $A_i^H := \varphi(A_i)$ minden $i \leq n$ -re).

1.15. Tétel: (Grünbaum, [*GB*]) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén léteznek a síkon minőségileg független konvex sokszögek (azaz egyenes szakaszokkal határolt síkidomok, melyek minden szöge 180^o -nál kisebb).* □

Most pedig vizsgáljuk meg a véges (pontosabban végesen *generált*) Boole-algebrák *szerkezetét*, melynek halmazelméletben, logikában, mértékelméletben (analízis, valószínűségszámítás), számelméletben, stb. vehetjük hasznát.

Bár a *részalgebrák* és a *generátum* általános algebrai fogalmak, most és az alábbiakban elég, ha az Olvasó csak az 1.7.a) és b) példákban bemutatott halmaz- Boole-algebrákra gondol, és a *részalgebra* fogalmát az 1.7.b) példából jól megértette!

1.16. Definíció: *Legyen* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *egy tetszőleges rögzített Boole- algebra és legyen* $Y \subset B$ tetszőleges *részhalmaz. Ekkor* Y **generátuma** *a legszűkebb/ legkisebb* $\mathcal{D} \leq \mathcal{B}$ *részalgebrája* $\mathcal{B}$ *-nek,* $\mathcal{D} = (D, ...)$, *melynek alaphalmaza tartalmazza* Y *-t, azaz* $Y \subseteq D$*, és minden* $\mathcal{E} = (E, ...) \leq \mathcal{B}$, $Y \subseteq E$ *esetén* $D \subseteq E$. Y *generátumát* $[\mathbf{Y}]$ *-el jelöljük (mind* $\mathcal{D}$ *-t, mind* D *-t).*

A $\mathcal{B}$ *Boole- algebrát* $Y \subseteq B$ *részhalmaza* **generálja,** *ha* $[Y] = B$, *ekkor* Y *-t* $\mathcal{B}$ **generátorrendszeré***nek hívjuk. A* $\mathcal{B}$ *Boole- algebra* **végesen generált,** *ha létezik véges* $Y \subseteq B$ *generátorrendszere.* □

Az 1.7.b) példa jelöléseivel $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{B} = (B, \cup, \cap, , |, \circ)$ ahol $B \subseteq \mathcal{P}(I)$ a halmazműveletekre zárt, és $Y \subseteq B$ *tetszőleges* részhalmaz.

Vegyük észre, hogy egy *véges* struktúra (azaz ha a B alaphalmaz véges) mindig magától értetődően végesen generált, hiszen $[B] = B$. Így a következő állításokban érdemes végesen generált struktúrákról beszélnünk véges (alaphalmazú) struktúrák helyett, hiszen így általánosabb összefüggéseket nyerünk.

A következő állítás és tétel ismét *struktúratételek,* hiszen a végesen generált Boole- algebrák szerkezetét (struktúráját) írják le.

1.17. Állítás: *Legyen* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *egy tetszőleges Boole- algebra, legyen* $Y = \{a_1, ..., a_m\} \subseteq B$ *egy tetszőleges véges részhalmaz Ekkor* $[Y]$ *pontosan a*

$$x = \bigvee_{\overrightarrow{\varepsilon} \in S_x} \bigwedge_{i=1}^{m} a_i^{\varepsilon_i} \tag{1.2}$$

alakú kifejezéseket (B *fenti elemeit) tartalmazza, ahol* $\overrightarrow{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $S_x \subseteq \{+1, -1\}^m$ *csak* x *-től függ, és szokás szerint* $a^{+1} = a$, $a^{-1} = \overline{a}$;

továbbá fenti elemek (kifejezések) felírhatók

$$x = \bigwedge_{\overrightarrow{\nu} \in R_x} \bigvee_{i=1}^{m} a_i^{\nu_i} \tag{1.3}$$

alakban is, ahol $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_m)$ és $R_x \subseteq \{+1, -1\}^m$ *szintén csak* x *-től függ.*

Bizonyítás: A generátum definíciójából azonnal adódik, hogy a (1.2) kifejezések mind elemei Y generátumának.

Ügyeskezű Olvasók minden Y -beli $a \in Y$ elemre találhatnak olyan $S_a, R_a \subseteq \{+1,-1\}^m$ részhalmazokat, melyek (1.2) segítségével éppen a kívánt a elemet adják meg.

Azt pedig a legkönyebb belátni, hogy a (1.2) egyenlőség által meghatározott elemek $\vee$ és $\wedge$ műveletekkel összekapcsolt ill. $\neg$ művelettel "módosított", bonyolultabb kifejezések is (előbb- utóbb) (1.2) alakúra hozhatók, ez pedig azt jelenti, hogy a (1.2) -beli kifejezések olyan Z részhalmazát alkotják B -nek, ami zárt a $\vee, \wedge, \neg$ műveletekre, azaz *részalgebrája* B -nek. No jó, még $|$ -t és $\circ$ -t is elő kell állítanunk (1.2) alakú kifejezésként, de ez már semmiség az előző házifeladatokhoz képest ...

A fenti három eredmény pedig azt mutatja, hogy a (1.2) alakú kifejezések halmaza egy Y -t tartalmazó részalgebrája B -nek, ráadásul a legszűkebb, vagyis csak $[Y]$ lehet!

A fenti gondolatmenetet szóról szóra végigvihetjük a (1.3) alakú kifejezésekre is, vagyis az ilyen alakú kifejezések halmaza is éppen $[Y]$ -t adja. $\square$

A fenti állítás alapján írhatjuk, hogy

$$[Y] = \left\{ \bigvee_{\vec{\varepsilon} \in S} \bigwedge_{i=1}^{m} a_i^{\varepsilon_i} \ : \ S \subseteq \{+1,-1\}^m \right\} \quad ,$$

vagy ízlés szerint

$$[Y] = \left\{ \bigwedge_{\vec{\nu} \in R} \bigvee_{i=1}^{m} a_i^{\nu_i} \ : \ R \subseteq \{+1,-1\}^m \right\} \quad .$$

1.18. Tétel: *Legyen $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ egy tetszőleges, végesen generált Boole- algebra, $Y = \{a_1, ..., a_m\} \subseteq B$ egy generátorrendszere. Ekkor B minden $b \in B$ eleme előáll mind*

$$b = \bigvee_{\vec{\varepsilon} \in S_b} \bigwedge_{i=1}^{m} a_i^{\varepsilon_i}$$

mind

$$b = \bigwedge_{\vec{\nu} \in R_b} \bigvee_{i=1}^{m} a_i^{\nu_i}$$

alakban is, ahol $\overrightarrow{\varepsilon}$, $\overrightarrow{\nu}$, R_b , S_b *jelentését a fenti* (1.2), (1.3) *képletekben írtuk le.*

Bizonyítás: Egyenesen következik az előző állításból. □

A fenti állítások szerint egy tetszőleges Boole algebra $\{a_1, ..., a_2\}$ elemei által generált (előállítható) elemek mind standard, egységes (latinul uniform) módon felírhatók a (1.2) ill. (1.3) képletek szerint, ezért e formuláknak külön elnevezésük is született:

1.19. Definíció: *Legyen* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *egy tetszőleges, végesen generált Boole- algebra,* $Y = \{a_1, ..., a_m\} \subseteq B$ *egy rögzített generátorrendszere. Tetszőleges* $x \in B$ *elem (*1.2*) -beli előállítását* **diszjunktív normálformá***nak* **(DNF),** *míg* (1.3) **-***beli előállítását* **konjuktív normálformá***nak* **(CNF)** *hívjuk*(13) . □

Érdemes még a (matematikai) logikában és az elektromos áramkörök elméletében (ld. 1.7. Példa) megismert CNF és DNF normálformák definícióját és alkalmazásukat, egymásba való átírásukat (konvertálásukat) felidéznünk.

Ezek után már semmi más dolgunk nincs, mint hogy Venn diagramokat rajzolgassunk, és a normálformák bonyolult képleteit tanulmányoznunk, vagy tetszőleges halmaztartományokat(14) normálformákban felírni!

Hasznos lesz számunkra a képletekben gyakran szereplő részekre rövidebb jelöléseket bevezetni (természetesen akkor, ha az $\{a_1, ..., a_m\}$ generátorrendszer már rögzített). Legyen tehát

$$m_{\overrightarrow{\varepsilon}} := \bigwedge_{i=1}^{m} a_i^{\varepsilon_i} \tag{1.4}$$

és

$$M_{\overrightarrow{v}} := \bigvee_{i=1}^{m} a_i^{\nu_i}$$

melyeket elektromos áramkörök tervezésénél **minterm** és **maxterm -**nek neveznek.(15)

13) *conjuction* (konjukció=kötés /latin/) a ∧ , míg *disjunction* (diszjunkció=szétválasztás /latin/) a ∨ művelet angol elnevezése. Vagyis a DNF konjukciók diszjunkciója, míg a CNF diszjunkciók konjukciója.

14) és többváltozós $f : \{i, h\}^n \to \{i, h\}$ logikai függvényeket

15) term = tag (angolul)

Végezetül már "csak" egy kombinatorikai eredményt ismertetünk, mely szerint kevés elemmel generált struktúra csak kevés elemből állhat:

1.20. Következmény: *Ha a* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, |, \circ)$ *Boole- algebra* **m** *elemmel generált, azaz* $\mathcal{B} = [a_1, ..., a_m]$*, akkor*

$$|B| \leq 2^{2^m} \quad . \tag{1.5}$$

Egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha az $\{a_1, ..., a_m\}$ *generátorelemek minőségileg függetlenek.*

Bizonyítás: Bár a minőségi függetlenséget csak halmazelgebrák esetén definiáltuk, tetszőleges Boole- algebrában ugyanúgy használhatjuk e fogalmat. (Újabb Házi Feladat, Kedves Olvasó!)

Az $\{+1, -1\}^m$ indexhalmaz számossága 2^m, ami (1.2) -ben használt $m_{\vec{\varepsilon}}$ mintermek számát adja meg. DNF esetén az $S_{\vec{\varepsilon}} \subseteq \{+1, -1\}^m$ részhalmazok adják meg a ténylegesen felhasznált mintermek számát, így $|\mathcal{P}(\{+1, -1\}^m)| = 2^{2^m}$ miatt valóban 2^{2^m} a lehetséges DNF -ek száma, ez bizonyítja a (1.5) felső becslést.

A felírt DNF -ek azonban általában nem mind különbözőek, például ha valamelyik $m_{\vec{\varepsilon}}$ minterm éppen $\circ$ -rel egyenlő, vagyis a generátorelemek nem minőségileg függetlenek. Kiszámolható azonban, hogy minőségileg független generátorelemek esetén minden lehetséges DNF különböző, vagyis ez esetben a (1.5) becslésben egyenlőség áll fenn. $\square$

1.4. Hivatkozások

[GB] Grünbaum,B.: *Venn Diagrams and Independent Families of Sets,* 1975

[HH] Hajnal András - Hamburger Péter: *Halmazelmélet,* Tankönyvkiadó, 1983

[HM] Hámori Miklós: *Halmazok és matemaikai logika,* Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó 1972

[HS] Halmos Pál - Siegler.L.E.: *Elemi halmazelmélet, Halmazelméleti feladatok,* Műszaki Kiadó, 1981

[$HJSz$] Horváth Miklós - Joó István - Szalkai István: *A "Banach elv" -ről,* Matematikai Lapok 34 (1991), 253-300. oldalak

[UJ] Urbán János: *Matematikai Logika, Példatár,* Bolyai könyvek sorozat, Műszaki Kiadó 1987

2. fejezet

Elemi leszámlálások

VÉGES HALMAZOK, A KOMBINATORIKA KÉT (HÁROM) ALAPELVE ÉS ELEMI LESZÁMLÁLÁSI MÓDSZERE (+ ÉS ·). TELJES INDUKCIÓ. PERMUTÁCIÓK, KOMBINÁCIÓK, VARIÁCIÓK ÉS KAPCSOLATAIK. A STIRLING FORMULA, NAGYÉRTÉKŰ KIFEJEZÉSEK BECSLÉSE.

Mint a bevezetőben is említettük: a kombinatorika a *megszámlálások*, szakkifejezéssel a *leszámlálások* tudománya, aminek elemeit e fejezetben kezdjük el. Bár véges halmazokkal foglalkozunk, a bevezetőben azt is szemléltettük, hogy ez jó pár évmilliárdunkba kerülhet, ha nem vagyunk eléggé ügyesek.

A halmazok számosságát (elemeinek számát) $|A|$ vagy $\#(A)$ -val jelöljük.

2.1. Általános módszerek

Egy véges halmaz (mondjuk útiholmik kirándulás előtt ill. után) összeszámlálásakor mindegyikünk kínosan ügyel az alábbi *két* természetes követelmény betartására:

2.1. Tanács (A kombinatorika alapelvei) :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\textbf{1.)} & \textbf{Mindent összeszámoltunk ?}\\ \textbf{2.)} & \textbf{Semmit sem számoltunk kétszer ?}\\ \textbf{3.)} & \textbf{Csak a halmaz elemeit számoltuk meg ?}\end{array}} \tag{2.1}$$

Éppen ezért javasoljuk a kedves Olvasónak, hogy ZH[1] írásakor se feledkezzen meg a kombinatorika fenti *két* alapelvéről! (Igen, az összeszám-

[1] = zárthelyi dolgozat (egyetemi zsargon, magyar)

lálás nehéz, kényes művelet, nemhiába a kombinatorika "az összeszámlálás művészete".[2]) $\square$

Az összes lehetőség összeszámlálásakor akár "gyalogos" módon csak felsoroljuk az összes esetet, akár elméleti alapon számítjuk ki a lehetőségek számát, az alábbi két módszert szoktunk használni (pontosabban a diákok csak összekeverni):

2.2.: I. Módszer (Az összeszámlálás *két* alapmódszere)**:**
a) Ha a megszámlálandó eseteket *diszjunkt* (különálló) halmazokba osztottuk (szortíroztuk, partícionáltuk), akkor az egyes halmazokban levő eseteket nyilván **összeadjuk.** (Hiszen a halmazok diszjunkt úniójának az $+$ "felel meg".)
b) Ha a megszámlálandó lehetőségek több összetevőből állnak össze (épülnek fel), és az egyes összetevők egymástól függetlenül választhatók meg, azaz *bármelyik* "A" összetevőhöz *bármelyik* "B" összetevő párosítható, akkor a két (vagy több) összetevők lehetséges számát **összeszorozzuk.** (Hiszen a halmazok Descartes-szorzatának a $\cdot$ "felel meg".) $\square$

2.3. Példa: a) *Hányféle lyukasztás lehet a buszjegyek* 3×3 *mezőjében, ha a lyukasztógép legfeljebb* 3 *lyukat "készít" ?*
b) *A "francia" kártyacsomagból öt lapot osztva hányféleképpen lehet pár* (két azonos figura) *a kezünkben (a lapok kiosztásának sorrendje nem számít)?*

Megoldás: (Az $\binom{n}{k}$ *binomiális együtthatókat* [*kombinációk*] a 2.3.2 alfejezetben (2.17) -ben ismertetjük.)
a) A lyukak száma ezek szerint $1, 2$ vagy 3 (0 nem) lehet . Ezek száma $3\times 3 = 9$ miatt rendre $\binom{9}{1}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{9}{3}$, vagyis a lehetőségek száma összesen $\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3} = 129$.
b) A "francia" -csomag $=$ 4 szín $\times$ 13 figura $=$ 52 lap. A két azonos figura (a *pár*) a 13 figura bármelyike lehet, ez $\binom{13}{1}$ lehetőség. Színeiket $\binom{4}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki, de még a maradék 12 figurából kell 3 különbözőt kiválasztanunk, bármilyen színből. Ez $\binom{12}{3}\cdot 4^3$ lehetőség. Vagyis az összes lehetőségek száma $\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot 4^3 = 1\ 098\ 240$. $\square$

További általános, a kombinatorikában gyakran használt módszer az alábbi.

---

[2]) a *matematikus* szerint *három*féle ember létezik: aki tud számolni és aki nem. Komolyra fordítva a szót (gyengébbek kedvéért): (2.1) -ben valójában *három* fő szabályt soroltunk fel.

2.4. II. Módszer (bijekciók)**:** *A feladatot átfogalmazzuk, vagyis a keresett lehetőségek* halmaza *és egy másik (könyebben összeszámolható) halmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) keresünk, és az eredeti halmaz számossága (elemeinek száma) nyilván éppen az új halmaz számossága!*

2.5. Példa: *Hány részhalmaza van egy tetszőleges n -elemű halmaznak összesen, azaz mekkora $|\mathcal{P}(A)|$ ha $|A| = n$?*

Megoldás: Ne feledjük, hogy $\emptyset$ és A is elemei $\mathcal{P}(A)$ -nak. Írjuk fel A elemeit $\{a_1, ..., a_n\}$ alakban. Minden $X \subseteq A$ részhalmazt egyértelműen jellemez az, hogy az a_i elemek közül éppen melyek elemei X -nek és melyek nem. Ha minden $i \leq n$ index esetén 0 jelöli az $a_i \notin X$ és 1 jelöli az $a_i \in X$ relációt, akkor magát az X halmazt kódolhatjuk az $x_1 x_2 ... x_n^{[2}$ kettes számrendszerbeli számmal, ráadásul ez a megfeleltetés $\mathcal{P}(A)$ elemei és az n hosszúságú kettes számrendszerbeli számok között kölcsönösen egy-egy értelmű. Márpedig a legkisebb szám $00...0^{[2} = 0$, a legnagyobb $11...1^{[2} = 2^n - 1$, a kettő között mindegyik szám pontosan egyszer előfordul, vagyis az n hosszúságú, kettes számrendszerbeli számok száma 2^n, ami éppen $\mathcal{P}(A)$ pontos mérete. $\square$

A II. Módszer alkalmazására a 2.23.Állítás bizonyításában láthatunk még példákat.

2.6. Feladat: *Számítsuk ki hasonlóan az*

$$B^A := \{ f : A \to B \mid f \text{ függvény } \} \tag{2.2}$$

halmaz számosságát!

Útmutatás: Most m -alapú számrendszerben írjunk fel számokat, ahol $m = |B|$, a számok , n -jegyűek. $\square$

Felhívjuk a figyelmet a fenti (2.2) egyenlőségben szereplő B^A hatványban a betűk sorrendjére!

Legfontosabb azonban a megoldandó feladat pontos *értelmezése*! Nehéz megfogalmazni, eldönteni, hogy pontosan milyen eseteket tekintünk különbözőnek vagy azonosnak, de még azt is, miket is kell egyáltalában megszámlálnunk! Erre mindig ügyeljünk feladatmegoldás közben!

2.2. Teljes indukció

Nem csak a kombinatorikában, hanem a matematika bármely területén találkozhatunk a következő típusú állításokkal:

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N} \textit{ természetes számra igaz, hogy ... }\text{"} \tag{2.3}$$

és a ... helyén egy (n -től függő) valamilyen állítás van. Ha ezt az állítást most $\Phi(n)$ *formulá*nak hívjuk, akkor bizonyítandó állításunk

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N} \text{ természetes számra igaz } \Phi(n) \text{ . "} \tag{2.4}$$

alakú lesz. Sok esetben azonban nem *minden* $n \in \mathbb{N}$, hanem csak *valamilyen (de adott!)* $n_0 \in \mathbb{N}$ számmal kezdődően, azaz csak $n \geq n_0$ esetén teljesül $\Phi(n)$ (legalábbis a bizonyítandó állítás szerint). Vagyis az általános alak:

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N} \text{ , } n \geq n_0 \quad \text{természetes számra igaz } \lneqq(n) \text{ ."} \tag{2.5}$$

A továbbiakban mindig ez utóbbi általános alakra fogunk hivatkozni, hiszen a (2.4) alak éppen az $n_0 = 0$ speciális eset. n_0 pontos értékét legtöbbször nem feszegetjük, ez a feladat állításából általában kiderül: legkisebb olyannak választjuk, amelynél nagyobb *minden* $n \geq n_0$ számra $\Phi(n)$ már igaz.

Természetesen úgy nem igazolhatjuk a fenti (2.5) állítást hogy rendre ellenőrizzük $\Phi(n_0)$, $\Phi(n_0 + 1)$, $\Phi(n_0 + 2)$ ... értékeit, hiszen végtelen sok esetet nem is tudnánk véges időn belül ellenőrizni! Egy kicsit gyorsabb módszert kell választanunk!

2.7. Módszer (A Teljes Indukció)**:**
1. Kezdő lépés: *Ellenőrizzük* $\Phi(n_0)$ *értékét.*
2. Indukciós lépés: *Bizonyítsuk be az alábbi következtetés helyességét* tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *természetes számra:*

$$\text{"}\textit{ Ha } \Phi(n) \textit{ igaz, akkor } \Phi(n+1) \textit{ is igaz . }\text{"} \tag{2.6}$$

Ekkor, a fenti két lépés sikeres elvégzése után igazoltuk $\Phi(n)$ *teljesülését* minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *számra.* □

A Teljes Indukció működését (elindulás és következtetés / indukálás) szokás végtelen lépcsőhöz is hasonlítani: "ha a legelső lépcsőfokra rá tudok lépni, és *minden* lépcsőfok után tovább tudok menni, akkor "természetesen" az összes lépcsőfokra fel tudok lépni"[3]. Bár ez a szemléltetés segíthet a módszer megértéséhez, az alábbi 2.8. Tételt nem helyettesíti!

Közelebb járunk az igazsághoz, ha a Teljes Indukció módszerét a " $\forall n \Phi(n)$ " típusú állítások igazolásának egy hatékony módszerének ("mankó") tekintjük: nem a $\Phi(n)$ állítást kell igazolnunk (ráadásul nem az összes $n \in \mathbb{N}$ természetes számra egyszerre), hanem csak két, jóval egyszerűbb összefüggést: a fenti 1. és 2. lépésben leírtakat.

A gyakorlatban sokszor az indukciós lépésben $\Phi(n+1)$ igazolásához nem csak a közvetlen megelőző $\Phi(n)$ állítást, hanem (néhány vagy az összes) előző $\Phi(i)$ értéket is fel kell használnunk. Vagyis $n \geq n_0$ esetén

$$\Phi(n_0) \wedge \Phi(n_0+1) \wedge ... \wedge \Phi(n) \quad \Rightarrow \quad \Phi(n+1) \ ,$$

vagy rövidebben

$$\bigwedge_{n_0 \leq i \leq n} \Phi(i) \quad \Rightarrow \quad \Phi(n+1)$$

alakú indukciós következtetést (lépést) használunk. A következő tétel mindezek legalitását is biztosítja.

2.8.Tétel (Teljes Indukció Tétele[4]): *Ha* $\Phi(n_0)$ *igaz* ("**kezdőlépés**"), *és minden* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ *természetes számra igaz a*

$$\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1) \tag{2.7}$$

---

[3] vagy végtelen sok, sorban álló pletykás vénasszony közül elég a legelsőnek elmondani

[4] *Történeti megjegyzések:* A matematikai indukció módszerét *legelőször* **Francesco Maurolico** (1494-1575) olasz matematikus használta egyik könyvében annak igazolására hogy az első n páratlan szám összege pontosan n^2 (HF!). Maurolico egyébként geometriával és optikával foglalkozott behatóan.

Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus és fizikus nevéhez fűződik a módszer legelső *pontos* leírása. (Pascal -t a 3. fejezetben, a 3.10.Állításban bemutatott "Pascal-háromszög" kapcsán méltatjuk.)

Giuseppe Peano (1858-1932) olasz matematikus az aritmetika és a számelmélet (róla elnevezett) axiómarendszerében a Teljes Indukció -t axiómának tünteti fel, és megmutatja, hogy ezek segítségével az aritmetika és a számelmélet valóban teljes egészében felépíthetők.

Gottlob Frege (1848-1925) német matematikus igazolta először 1884 -ben a teljes indukció módszerének helyességét (azaz a 2.8.Tételt), a halmazelmélet axiómáinak (ZFC) felhasználásával.

Gerhard Gentzen (1909-1945) német matematikus, ő vezette le először az aritmetika (PA = Peano Axiómarendszer) ellentmondástalanságát a halmazelmélet (ZFC) axiómáiból.

vagy a

$$\bigwedge_{n_0 \le i \le n} \Phi(i) \Rightarrow \Phi(n+1) \tag{2.8}$$

következtetés (”**indukciós lépés**”), *akkor* $\Phi(n)$ *igaz minden* $n \geq n_0$ *természetes számra, azaz igaz a*

$$\forall n \geq n_0 \quad \Phi(n)$$

állítás. $\square$

A Tételt természetesen úgy használjuk, hogy *igazoljuk* (ellenőrizzük) a $\Phi(n_0)$ állítást és a $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$ következtetést *minden* $n \geq n_0$ index esetén, amint az alábbi példában ezt részletesen meg is mutatjuk. Felhívjuk a kezdő Olvasók figyelmét, hogy a (2.7) illetve a (2.8) következtetések (”indukciós lépés”) igazolásánál *nem* a $\Phi(n)$ vagy a $\Phi(n+1)$ állítást magát, *hanem* a ”$\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$” illetve az ”$\bigwedge_{n_0 \le i \le n} \Phi(i) \Rightarrow \Phi(n+1)$” következtetést kell ellenőriznünk! [5]

2.9.Példa (Általánosított háromszög-egyenlőtlenség)**:** *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *komplex számokra*

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n| \ ,$$

vagy rövidebben

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \tag{2.9}$$

Megoldás: A *kezdőlépés* nem okozhat gondot: legyen $n_0 = 1$, hiszen $n = 1$ esetén a (2.9) egyenlőtlenség a $|z_1| \leq |z_1|$ alakot ölti, ami triviálisan igaz.

Az indukciós lépésben $\Phi(n+1)$ igazolásához azonban a megelőző $\Phi(n)$ állítás nem elég, fel kell használnunk az $n = 2$ esetet is, ezért ezt az esetet is előbb (külön) igazolnunk kell.

$n = 2$ esetén a (2.9) egyenlőtlenség az

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

[5] Emlékeztetünk arra a sokszor nehezen emészthető tényre, hogy a matematikai logikában a $h \Rightarrow h$ és $h \Rightarrow i$ (hamisból minden következik) *következtetés* maga igaz - nak van elfogadva, még ha a következtetés végeredménye hamis is.

összefüggést állítja, ami éppen az ún. *háromszög-egyenlőtlenség.* (HF: gondoljuk át a vektorokra [=komplex számok] vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján!)

Most már rátérhetünk az indukciós lépés igazolására. $\Phi(n+1)$ ekkor a (2.9) egyenlőtlenséget állítja, de eggyel több, $n+1$ komplex szám összegére. A felső becslés (az egyenlőtlenség jobb oldala) eléréséhez a bal oldalt alakítjuk át, az eredeti n -tagú és kéttagú összegekre való bontások (az indukciós feltételek) felhasználásával:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Ezzel az indukciós állítást (lépést) bebizonyítottuk, így a 2.8. "Teljes Indukció" Tétele alapján a (2.9) állítás *minden* $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz. $\square$

A fejezet végén a feladatok között jó néhány állítást sorolunk fel, amik segítségével a teljes indukciós bizonyítást gyakorolni lehet. Kiemeljük azonban, hogy nem csak a jelen fejezetben, hanem a diszkrét matematika szinte minden fejezetében (sőt az egész matematikában) lesz segítségünkre ez a bizonyítási módszer.

2.3. Permutációk, variációk, kombinációk

A most következő alfejezet első olvasásra úgy tűnhet (ami egyébként a vizsgázók gyakori hibája), hogy a permutációk, variációk, kombinációkra adott képletek "univerzálisak", "minden feladathoz" csak meg kell keresnünk ebben az alfejezetben bizonyított hat képlet valamelyikét és már is megoldottuk a feladatot ... !? Csak meggondolatlanul szabad bármelyik feladatra rávágni, hogy a feladat (mondjuk) "... ismétléses *kombinááááációóóóó" !* "

Tény, hogy ezzel a hat képlettel gyakran találkozunk véges (kombinatorikai) mennyiségek számolásakor, de nem mindig ilyen egyszerű a végeredmény. Azonban mindössze csak hat új *alapművelet*ről van szó, segítségükkel és az eddigi négy alapművelettel tudjuk az egyes mennyiségeket (feladatokat) megszámolni, a 2.1.("Általános módszerek") alfejezetben leírt 2.2. I.Módszer (és a 2.1. pontban említett "A kombinatorika két alapelve") útmutatásai alapján.

Még egy utolsó jó tanács: megtévesztő, hogy az elemi leszámlálási módszereket lényegében csak egy rövid alfejezetben (ebben) ismertetjük. Bár ebben minden elméleti ismeretet megtalálunk, a feladatok megoldásához gyakorlatot kell szereznünk, amire nem szabad sajnálnunk a több hónapos (!) gyakorlás idejét !

A következő fejezettől kezdődően (életünk, vagy legalábbis a könyv végéig) hasznunkra válik a következő rövid jelölés és egy egyszerű rekurzív összefüggés:

2.10. Definíció: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, $n \geq 1$ esetén*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \tag{2.10}$$

és

$$0! := 1$$

az n szám **faktoriálisa**. □

2.11.Állítás: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra*

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{2.11}$$

Bizonyítás: A definíció alapján azonnal látható. □

2.3.1. Permutációk

A *permutáció* szó latin eredetű, felcserélést, sorbarendezést jelent. A következő típusú feladatokat nevezzük permutációnak:

" n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni ? "

Hangsúlyozzuk, hogy nem feltétlenül kell fizikai, kézzel fogható tárgyakra gondolnunk, hiszen elvont "akármiket", "valamiket" is sorbarendezhetünk. Ez jól látható a 2.23. Tétel bizonyításának végén.

Olvasóink hiába edződtek meg a halmazelmélet kemény megpróbáltatásain, most egy n elemű halmaz elemeiről sem szólhatunk, hiszen a sorbarendezendő elemek között lehetnek azonosak is, és ez esettel is meg kell bírkóznunk (később) jelen alfejezetben !

2.12. Definíció: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén n különböző elem összes lehetséges sorbarendezéseinek számát* **n elem (ismétlés nélküli) permutációjá***nak hívjuk, és* $\mathbf{P_n}$ *-el jelöljük.*

Ha az elemek között azonosak is lehetnek, méghozzá összesen s -féle és az egyes típusokból rendre $k_1, ..., k_s$ van (azaz $k_1 + ... + k_s = n$), akkor az összes lehetséges sorbarendezések számát **n elem s -edrendű ismétléses permutációjá***nak hívjuk, és* $\mathbf{P_n^{k_1,...,k_s\,(ism)}}$ *-el jelöljük.* □

Angolul *permutation* és *generalized permutation* az ismétlés nélküli és az ismétléses permutációk elnevezése.

2.13.Állítás: *Tetszőleges $n, s \in \mathbb{N}$ természetes számokra*
(i) *n elem ismétlés nélküli permutációinak száma*

$$P_n = n!$$

(ii) *n elem ismétléses permutációinak száma, $k_1, ..., k_s \in \mathbb{N}$, $k_1 + ... + k_s = n$ esetén*

$$P_n^{k_1,...,k_s\;(ism)} = \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_s!} \tag{2.12}$$

Bizonyítás: (i) Az állítást legegyszerűbb teljes indukcióval igazolni, ami házi feladat.

A közvetlen igazolás is hasonló: az n (különböző) elem sorbarendezésénél n helyre kell az elemeket elhelyeznünk. Az első helyre az n elem bármelyikét helyezhetjük, ez n lehetőség. Bármelyiket is helyeztük az első helyre, a második helyre mindig $n-1$ másik elemet rakhatunk, sőt ez azt is jelenti, hogy *bármelyik* (n) első helyen levő elem esetén *bármelyik* $n-1$ második helyen levő elemet párosíthatjuk, azaz (a 2.2. pontban leírt I.b) Módszer alapján) az első két helyre $n \cdot (n-1)$ -féleképpen helyezhetünk el két elemet.

A gondolatmenetet folytatva hasonlóan láthatjuk be, hogy az első két hely *bármilyen* betöltése esetén *további* $n-2$ -féleképpen tölthetjük fel a harmadik helyet, és mivel *bármelyik* $n \cdot (n-1)$ első két helyen levő elem esetén *bármelyik* $n-2$ harmadik helyen levő elemet tehetjük, így ismét az I.b) Módszer alapján az első három helyre $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ -féleképpen helyezhetünk el három elemet az adott n elem közül.

Tovább folytathatjuk gondolatmenetünket, n -szer ($n \in \mathbb{N}$ tetszőleges) a fenti gondolathoz hasonlóan, megkaphatjuk, hogy a lehetőségek száma $P = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ ami valóban $n!$.

Az $n = 0$ speciális esetben az állítás (pontosabban a 2.11.b)Definíció) $0! = 1$ ”sorbarendezés” lehetőségét állítja, ami ”hihető” is: az elemekhez hozzá sem kell nyúlnunk: ez valóban 1 lehetőség[6] .

(ii) Legegyszerűbb a feladat megoldását úgy megérteni, hogy n (billiárd) golyóra gondolunk, amik közül k_1 db 1 -színű, k_2 db 2 -színű, s.í.t., és végül k_s db s -színű.

A golyók *fizikailag mind különbözőek*, tehát a valóságban ismét $n!$ különféle sorrend van, csak mi nem akarunk megkülönböztetni sok fizikai sorrendet, mondván: "minden sárga színű golyó egyforma".

Például, ha egy (akármilyen) sorbarendezésnél az 1 -színű golyókat egymás között csereberélgetjük (*permutáljuk*), ami $k_1!$ -féle sorrend, mi ezeket csak egyetlen sorrendnek vagyunk hajlandóak tekinteni! Mint említettük, ez a "szemet húnyásunk" (vagyis $k_1!$ *különféle* fizikainak sorrendet *azonosnak* tekintünk) AKÁRMILYEN sorbarendezésnél ugyanúgy $k_1!$ különféle sorrendet tekint azonosnak. Vagyis az összes $n!$ fizikai sorrendet csoportosíthatjuk: egy-egy csoportban az azonosnak látszó $k_1!$ sorrend kerül.

Hány sorrendnek is számoljuk tehát az összes sorrendet (ha *csak* az 1 -típusú golyókat nem különböztetjük meg)? Ahány csoportot az előbb képeztünk, azaz $\frac{n!}{k_1!}$.

Ha a 2 -típusú golyókat sem különböztetjük meg egymás között, akkor — a fenti gondolatmenethez hasonlóan — az előbb készített csoportokat tovább csoportosíthatjuk nagyobb csoportokra, mindegyik nagyobb csoport $k_2!$ előbbi kisebb csoportot tartalmaz, vagyis már csak $\frac{n!}{k_1!k_2!}$ általunk megkülönböztethető (nagy) csoport van.

A fenti gondolatmenetet mindegyik típusra elvégezve valóban azt kapjuk, hogy az általunk megkülönböztethető sorrendek száma valóban

$$P_n^{k_1,\dots,k_s\,(ism)} = \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!}$$

amint állítottuk. Q.E.D. □

Megjegyezzük, hogy a (ii) -beli gondolatmenetet továbbfejlesztve (komoly algebrai és kombinatorikai segédeszközök mesteri ötvözésével) Pólya György[7] rendkívül hatékony összeszámlálási módszert dolgozott ki, amely-

[6] Ez nem nézőpont kérdése, hanem további kombinatorikai összefüggéseink (képleteink), pl. a (2.11) rekurzív összefüggés csak a $0! = 1$ definíció esetén maradnak igazak minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, a $P_0 = 1$ definíció is ezzel van összhangban, ami végülis szemléletünket sem "bántja".

[7] Pólya György (1887-1985) magyar matematikust a 8. Fejezet 6. lábjegyzetében méltatjuk.

lyel kémiai vegyületek különböző izomerjeinek számát és egyéb kombinatorikai feladatokat tudott sikeresen megoldani. Módszeréről Harris-Hirst-Mossinghoff $[HHM]$ könyvében a "*Pólya's Theory of Counting*" fejezetben, vagy Pólya és Read eredeti $[P]$ és $[PR]$ cikkeiben olvashatunk bővebben.

Az előző állításban szereplő (2.12) kifejezés (is) más diszkrét matematikai összefüggések leírásában is előfordul, ezért más jelölésük és elnevezésük is használatos.

2.14. Definíció: *Tetszőleges* n, $k_1, ..., k_s$ $, s \in \mathbb{N}$ *természetes számokra,* $k_1 + ... + k_s = n$ *, esetén a*

$$\binom{n}{k_1, ..., k_s} := \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_s!} \tag{2.13}$$

kifejezezést **polinomiális együttható***nak nevezzük.* □

A polinomiális együtthatók *egyik* alkalmazását a 3.5. Polinomiális Tételben mutatjuk be.

2.3.2. Variációk, kombinációk

Ismét latin eredetű szakkifejezésekkel találkoztunk. Eredetileg a *variáció* szó változatosságot, a *kombináció* kiválasztást, kiválogatást, csoportosítást jelent, hétköznapi használatuk is ennek megfelelő. Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy az alábbi definíciókban precíz jelentéseket rendelünk e szavakhoz, vagyis e pillanattól kezdve feladatok, problémák megoldásánál tartózkodjunk a felelőtlen "a variációk száma ..." és hasonló megjegyzésektől, inkább használjuk "a *lehetőségek* száma ..." szófordulatot.

Mind a variációkat mind a kombinációkat jelen alfejezetben egyszerre tárgyaljuk, mert nagyon sok hasonlóság és a kapcsolat van közöttük, sőt könnyen össze is keverhetők.

Mindkét probléma egy halmaz elemei közül néhányuk (összes lehetséges) kiválasztásának számát kérdezi, bizonyos szempontok szerint. A szemléletesség kedvéért *tárgyak kihúzásá*t emlegetjük, de természetesen *bármely elvont halmaz* elemeinek *kiválasztásá*ra is ugyanazok az összefüggések lesznek igazak. E fejezetben feltehetjük, hogy az alaphalmaz elemei különbözőek, mert ha az egyik típusú elemből több példányt szeretnénk feltételezni, akkor egyszerűen tegyük vissza a korábban kihúzott elemeket a kalapba, így ismét kihúzhatjuk őket. Persze, a visszatevés előtt megjegyezzük (vagy felírjuk) a kihúzott elemek fajtáját, sorrendjét, számát és egyéb (számunkra) fontos adatait. Megnyugtatjuk az Olvasót: az alábbi definíciók elolvasása után érthetőbb lesz a *fenti* gondolatmenet (legalábbis reméljük).

Alaposan figyeljük meg a variációk és a kombinációk közötti hasonlóságokat és különbségeket, ezt készítjük elő az alábbi két definícióban!

2.15. Definíció: *Legyen A egy tetszőleges halmaz.*[8]

Visszatevéses mintavétel*nek nevezzük azt, ha a halmaz elemeit egyesével kivesszük, feljegyezzük, de minden következő elem kihúzása előtt az előzőleg kihúzott eleme(ke)t visszatesszük a halmazba.*

Ha csak a halmaz elemeit húzzuk ki egyesével (persze csak amíg lehet), és az előzőleg kihúzott elemeket nem *tesszük vissza, akkor* **visszatevés nélküli mintavétel***ről beszélünk.* □

2.16. Definíció: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n különböző elem halmazából k elem visszatevés nélküli mintavételeinek (kihúzásainak) összes lehetséges számát* **n elem k -adrendű (ismétlés/visszatevés nélküli)** *vagy egyszerűen csak* **variációjá***nak nevezzük, ha a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényeges, *és $\mathbf{V_n^k}$ -el jelöljük !*

Ha a kihúzás (mintavétel) visszatevéses, akkor **ismétléses/ visszatevéses variáció***ról beszélünk, $\mathbf{V_n^{k\,(ism)}}$ -el jelöljük, és ismét a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényeges! □

2.17. Definíció: *Ha a fenti definícióban a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényegtelen, *akkor* **n elem k -adrendű (ismétlés/ visszatevés nélküli)** *vagy egyszerűen csak* **kombinációjá***ról beszélünk és $\mathbf{C_n^k}$ -val jelöljük, illetve a második esetben* **ismétléses/visszatevéses kombináció**r*ól van szó, amit $\mathbf{C_n^{k\,(ism)}}$ -el jelölünk.* □

Ismételten felhívjuk a figyelmet a *variációk* és a *kombinációk* definíciói közötti különbségekre !

Angolul *variation* és *combination* az ismétlés nélküli, míg *generalized variation* és *generalized combination* az ismétléses variációk/kombinációk elnevezése.

2.18. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok, $k \geq 1$ esetén n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma*

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \tag{2.14}$$

[8] A halmaz definíciója szerint elemei mind különbözőek !

Bizonyítás: Lényegében itt is a 2.13.Állítás (ismétlés nélküli permutációk) gondolatmenete mutatja meg a lehetőségek számát.

Mivel a halmaz elemei, amelyeket egyesével és *visszatevés nélkül* húzunk ki egymás után, mind különbözőek, ezért az egyes kihúzások alkalmával az egyes lehetőségek száma rendre n , n-1 , n-2 ,... . Mivel a kihúzott elemek kihúzási sorrendje (variáció lévén) *lényeges*, így a 2.4.Állítás (permutációk) bizonyításában leírtakhoz hasonlóan beláthatjuk, hogy ezen lehetőségek számát *össze kell szoroznunk*! De meddig ?

A legutolsó elem, a k -adik kihúzásakor éppen $n-(k-1)$ elem közül választhatunk, hiszen előtte $k-1$ elemet húztunk ki (és persze eredetileg n elemünk volt.)

Ezzel éppen a (2.14) egyenlőséget kaptuk, amit bizonyítanunk kellett. Q.E.D. □

Megjegyzések: Vigyázzunk a (2.14) kifejezés legutolsó szorzótényezőjére: az *nem* $(n-k)$ (amit persze megjegyezni könnyebb lenne), hanem

$$(n-(k-1)) = n-k+1 \quad ,$$

hiszen, mint a bizonyításban meggondoltuk: $k-1$ elemet vettünk ki a legutolsó (k -adik) elem előtt. Ha pedig[9] gyorsabban kell a képletet elővennünk mint a fenti bizonyítást meg tudjuk gondolni, akkor csak a következő "versikét" motyogjuk el: " k tárgyat $\Rightarrow$ k szorzótényező".

Érdemes külön meggondolnunk a $k>n$ és a $k=0$ eseteket is (a többi esetet a bizonyításban meggondoltuk) . $k>n$ esetben mind a (2.14) kifejezés (képlet), mind szemléletünk is $V_n^k = 0$ -át ad. Ugyanis a (2.14) kifejezésben $k>n$ esetén szerepel az $n-n=0$ szorzótényező, míg hétköznapi (és matematikai) tapasztalatunk szerint többet egyetlen halmazból sem lehet kivenni mint amennyi eleme eredetileg benne volt, ha *ismétlés nélküli* mintavételről van szó.

A $k=0$ esetben hozzá sem kell nyúlnunk a halmaz elemeihez, ez egyetlen lehetőség. A (2.14) kifejezés is ugyanezt az eredményt adja, hiszen, ha a szorzat tagjai n -től *csökkennek* $n+1$ -ig, akkor *egyetlen tagja sincs* a (2.14) -beli szorzatnak, ami pedig *megállapodás* (definíció) szerint $:= 1$.

Vagyis a (2.14) összefüggésben $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges* természetes szám lehet!

---

[9] de csak a gyengébbek kedvéért!

2.19. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -adosztályú ismétléses variációinak száma*

$$V_n^{k\,(ism)} = n^k \tag{2.15}$$

Bizonyítás: Mint az előző bizonyításban is, az egyes elemek kihúzásainak lehetséges számát kell meghatároznunk és egyszerűen csak összeszoroznunk, hiszen a (kihúzott) elemek kihúzási sorrendje megint *lényeges.* Márpedig most, mivel visszatesszük mindegyik kihúzott elemet, a soron következő *mindegyik* elem kihúzására mindig ugyanannyi, n lehetőségünk van, azaz az összes lehetőségek száma most valóban n , amit bizonyítanunk kellett. □

Megjegyezzük, hogy a most bizonyított Állításban szereplő (2.15) kifejezésben $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges* természetes szám lehet, akár $k > n$ vagy akár $k = 0$. A $k > n$ esettel felesleges foglalkoznunk, hiszen (a visszatevések miatt) akármeddig folytathatjuk a mintavételezést! $k = 0$ esetén pedig a (2.15) képlet ismét 0 -val egyenlő, míg a gyakorlatban is ez azt jelenti, hogy hozzá sem kell kezdenünk az elemek kiválasztásához.

2.20. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{2.16}$$

Bizonyítás: Idézzük csak fel, mi is a *különbség* a kombinációk és a variációk között? A kiválasztott (kihúzott) elemek csak maguk érdekesek, vagy az is, hogy milyen sorrendben lettek kiválasztva!

Mivel a 2.18.Állításban sem tettük vissza a már kiválasztott elemeket, akárcsak a jelen Állításunkban, próbáljuk meg a (2.14) eredményt mostani feladatunkhoz felhasználni. Továbbá, a kiválasztott elemek mind *különbözőek,* hiszen mindig újat húztunk, és az eredeti halmaz elemei is mind különbözőek voltak.

Tekintsünk egy lehetőséget, azaz a kiválasztott elemek egy halmazát. Ha a kombináció szemszögéből nézzük, akkor ez valóban halmaz, hiszen a (kiválasztott) elemek sorrendje lényegtelen, vagyis egy lehetőség, míg a variáció szemszögéből nézve ez többféleképpen, többféle sorrendben volt lehetséges, a kihúzott elemek kihúzási sorrendjei tekintetében, vagyis $P_k = k!$ -féleképpen.

Vagyis a kombináció *minden* megszámlálandó kiválasztásához a (2.14) variáció $k!$ lehetősége tartozik, ráadásul különböző kiválasztásokhoz a lehetőségek különböző (diszjunkt) részhalmazai, ami alapján

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} \ ,$$

majd a (2.14) összefüggés miatt

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

amit bizonyítanunk kellett, Q.E.D. $\square$

Az ismétlés nélküli kombinációkra elterjedtebb az alábbi jelölés, mi is a könyv hátralevő részében ezt használjuk.

2.21. Definíció: *Tetszőleges* $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén bevezetjük a következő jelölést:*

$$\binom{n}{k} \quad := \quad C_n^k \quad = \quad \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{2.17}$$

amit **binomiális együttható** *-nak nevezünk, és* "n alatt k" *-nak*[10] *olvasunk.* $\square$

2.22. Megjegyzések: (i) Ügyeljünk a kombinációk kétféle jelölésének írásmódjára: n és k fordított elhelyzésben van! A *kerek* $\binom{n}{k}$ zárójeles jelölésnél nincs törtvonal, a számelméletben használatos $\left(\frac{a}{p}\right)$ *Legendre-szimbólum* -mal ne tévesszük össze!

(ii) A 2.20.Állításban bizonyított (2.16) összefüggést sokszor úgy alkalmazzuk, hogy a kiválasztandó elemeket nem egyesével, egymás után vesszük ki az alaphalmazból (és utána feledkezünk el a kihúzásuk sorrendjéről[11]), hanem egyszerűen egyszerre markoljuk meg és vesszük ki őket (ún. "*merítőkanál*" -módszer).

(iii) A binomiális együtthatóknál (ismétlés *nélküli* kombinációknál) a k és n paraméterek ismét *tetszőleges* természetes számok: $n = 0$, $k = 0$

[10] Vigyázat: angolul " *n over k* " $= \frac{n}{k}$ és " *n choose k* " $= \binom{n}{k}$.

[11] mint a hagyományos "90 -es" lottó sorsolásakor is a kihúzás után állítják "emelkedő számsorrendbe" a kihúzott számokat

vagy $k > n$ esetén mind a képlet mind ”gyakorlati” feladatunk (azaz elemek kihúzása) is 0 eredményt ad !

(iv) A binomiális együtthatók (2.17) definíciójában szereplő képletét többféleképpen is kiszámolhatjuk, mint például

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.18}$$

vagy

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1}$$

és még sok más módon is, e képletek azonosságát minden Olvasó könnyen beláthatja (HF). A 3.2. ”Binomiális együtthatók tulajdonságai” c. alfejezet elején részletesebben foglalkozunk ezzel a kérdéssel is.

(v) A ”binomiális” és ”polinomiális” elnevezésekből[12] valamely kapcsolatot sejtünk a binomiális és polinomiális együtthatók között. Jól érezzük: az alábbi 2.25.Állításban megmutatjuk, hogy az $s = 2$ speciális esetben (kétféle, de sok elemet kell sorbarendeznünk) éppen a binomiális együtthatókat kapjuk. A megegyezés annál is érdekesebb, mert a *binomiális* együtthatókkal a *kombináció*knál (elemek kiválasztásánál), míg a *polinomiális* együtthatókkal a *permutáció*knál (elemek sorbarendezésénél) találkoztunk. A következő fejezetben ismertetjük Newton ”binomiális” tételét (3.1.Tétel) és a 3.5.”Polinomiális” tételt, melyek még jobban rávilágítanak e két mennyiség kapcsolatára. Használatos még az $s = 3$ esetben a *trinomiális* együttható elnevezés is.

2.23. Tétel: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$C_n^{k\ (ism)} = \binom{n+k-1}{n-1} \tag{2.19}$$

Bizonyítás: Itt sajnos nem használhatjuk fel a variációknál (akár ismétléses akár ismétlés nélküli) igazolt összefüggéseket, mert hiába tudjuk megszámolni az egyes (bizonyos ismétlődéssel) kihúzott elemek kihúzási sorrendjeinek számát, az ismétléses permutációknál megismertek szerint: az egyes sorrendek száma *különböző*! , az ismétlődő elemek fajtáitól és számától függően!

---

[12] *bi nom* = két tag, *tri nom* = három tag, *poli nom* = sok tag (görögül)

A következő ötlettel ("*jegyzetlapok*") azonban célhoz érhetünk: mivel n különböző elem közül választunk ki néhányat, de csak a kihúzottak milyensége és *nem* sorrendje a lényeg, vegyünk elő a húzások megkezdése előtt n jegyzetlapot, az n kihúzható elem mindegyike számára egyet-egyet, és a húzás folyamán minden egyes kihúzott elemnél, visszatevése előtt, húzzunk egyszerűen egy vonalkát (strigulát[13]) a megfelelő papírlapra. Most már csak az a kérdés, hogy *"hányféleképpen húzhatunk k vonalat n papírlapra ? "*

Már a fenti gondolatmenetben is a 2.4. pontban jelzett II.Módszert ("bijekciók") használtuk: elemek kihúzása és rendezgetése helyett papírlapra írogattunk vonalkákat, és mivel e két halmaznak: elemek visszatevéses de sorrend nélküli mintavételeinek halmaza *és* a papírlapokra írt vonalka - sorozatok halmazának ugyanannyi eleme van (újabb HF!), elegendő ez utóbbi halmaz elemeit összeszámolnunk!

Ez utóbbi problémánkon pedig ismét egy átfogalmazással (bijekció) segíthetünk. Hiába raktuk ugyanis sorba az n papírlapot, a rajtuk levő strigulák sorozata összemosódna, ha a papírlapok (pontosabban a rajtuk levő vonalkák) közé nem raknánk valami elválasztó jelet, mondjuk egy-egy 0 számjegyet. Hát rakjunk, összesen $n-1$ -et!

Így a következő újabb feladathoz jutunk:

" Hány olyan, $n+k-1$ hosszú, 0 *és* 1 *jelekből álló (bináris) jelsorozatunk van, amelyben $n-1$ számú* 0 *és k darab* 1 *jel van ? "*

Természetesen előbb meg kell gondolnunk, hogy a két halmaznak (vonalak a papírlapokon és a fenti jelsorozatok) ugyanannyi eleme van (újabb HF.) !

Ez pedig már gyerekjáték, pontosabban ismétlés *nélküli* kombináció, hiszen $n+k-1$ különböző elem (a jelek pozíciói, a helyiértékek) közül kell kiválasztanunk $n-1$ -et, a 0 jelek helyeit, méghozzá kiválasztásuk sorrendje lényegtelen, ez pedig valóban ismétlés nélküli kombináció! A 0 jelek választják el az egyes papírlapokat. Így, a 2.20.Állítás alapján a lehetőségek száma valóban

$$C_n^{k\ (ism)} = C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

amit bizonyítanunk kellett, Q.E.D. □

2.24. Megjegyzések: (i) A fenti bizonyítás végén pozíciókból (helyiértékekből) választottunk ki néhányat, azaz, mint már kezdettől fogva hangsúlyoztuk, legtöbbször nem valódi tárgyakból hanem elvontabb elemek közül kell kiválasztanunk néhányat.

---

[13] kis vonal, pipa (német)

(ii) Vegyük észre, hogy a most megvizsgált *ismétléses* kombinációknál az n és k paraméterek *tetszőleges* természetes számok lehetnek: mind a (2.19) kifejezés (képlet) mind a gyakorlati probléma (húzogatások) értelmezhetők, és a fenti bizonyítás is érvényes.

(iii) Nehéz megjegyezni a (2.19) kifejezésben[14] a betűk pontos helyét és számát, főleg ha megemlítjük az alábbi alternatívát:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ezt bárki könnyen pár perc alatt igazolhatja a (2.18) képlet alapján (újabb HF!), bár a 3.2. "Binomiális együtthatók tulajdonságai" c. alfejezet 3.9.(iii) Állításában részletesen foglalkozunk a binomiális együtthatók fenti és hasonló tulajdonságaival.

Visszatérve a (2.19) képlet memorizálására, saját tapasztalatunk alapján csak egy módszert ajánlhatunk: a bizonyítás fejben (pillanatok alatti) "végigpörgetését" .

Már említettük, hogy a különböző permutációk, variációk és kombinációk között szoros kapcsolat van. Két egyszerűbb összefüggés igazolásával zárjuk alfejezetünket. További összefüggéseket és tulajdonságkat találhatunk a 3.2. alfejezetben.

2.25. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén*

$$V_n^n = P_n$$

és

$$C_n^k = P_n^{k,n-k\ (ism)}$$

ami képletben

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} .$$

Bizonyítás: Mint *minden* kombinatorikai összefüggést, a fentieket is bizonyíthatjuk mind kombinatorikai okoskodással, mind a képletek alakításával. Most az egyszer utoljára mind a két módszert részletesen ismertetjük.

V_n^n nem más, mint n elemet a halmazból egyesével kihúzunk és a sorrendet is feljegyezzük, mondjuk úgy, hogy a kihúzás sorrendjében sorban

[14] mint minden képletben

lerakjuk őket. Ez pedig mindig egy sorbarendezés azaz permutáció, ráadásul P_n , hiszen mind az n különböző elemet minden lehetséges módon ki kell választani azaz sorbarendezni.

A képletek alapján pedig

$$V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-n+1) = n! = P_n \ ,$$

C_n^k és $P_n^{k,n-k\ (ism)}$ mindketten $k > n$ esetén 0 értéket adnak, vagyis azonosak. (Algebrai bizonyítás vége.)

Legyen tehát $0 \leq k \leq n$ rögzített. $P_n^{k,n-k\ (ism)}$ kombinatorikailag azt jelenti, hogy kétféle elemünk van, k illetve $n-k$ példányban, azaz összesen n elem, amiket sorba kell raknunk (persze az összes lehetséges módon). Egy sorbarendezést pedig úgy is elkészíthetünk, hogy először az egyik típusú elemek helyeit (pozícióit) választjuk ki, a kiválasztás sorrendje lényegtelen mert mindegyik első típusú elemet azonosnak tekintünk, majd végül a maradék második típusú elemeket egyszerűen csak letesszük az üres helyekre. Márpedig, amikor az első típusú elemek helyeit választjuk ki, n különböző elem (helyek, pozíciók) közül kell k -t kiválasztanunk, ismétlés nélkül és a helyek kiválasztásának sorrendje sem lényeges. Ez pedig éppen egy ismétlés nélküli kombináció, pontosabban C_n^k . (Kombinatorikai bizonyítás vége.)

A képletek alapján egyszerű az egyenlőség igazolása: a (2.13) és (2.18) összefüggések alapján

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} = P_n^{k,n-k\ (ism)}$$

amit bizonyítanunk kellett, Q.E.D. □

A fenti bizonyítás alapján az az érzésünk támadhat, hogy képletekkel sokkal egyszerűbb bármilyen összefüggést bebizonyítanunk, a kombinatorikai okoskodás sokkal megerőltetőbb. Hiába ismételgetnénk, hogy a kombinatorika sem a képletek alakítgatásának tudománya. Meggyőzőbb inkább, ha például a 2.2. Feladatot ajánljuk az Olvasó figyelmébe, vagy többek között a szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményének 7.11, 7.24, 7.25, 7.27, 7.30, 8.6, 8.7, 8.14, 8.20, 8.21, 8.31 vagy 8.37 feladatait.

2.4. A Stirling formula

Már eddig is gyakran kellett alkalmaznunk képleteinkben az $n!$ mennyiséget, sőt a binomiális együtthatók "fő alkotórészének" is tekinthetjük. Ezért is hasznos számunkra a J.Stirling által felfedezett alábbi közelítő formula, mely $n!$ nagyságrendjét nagyon is pontosan adja meg:

2.26. Tétel (J.Stirling[(15)] "- formula")**:** *Elég nagy*[(16)] $n \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\ , \tag{2.20}$$

sőt kicsit pontosabban

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}} \quad \square \tag{2.21}$$

Mi elsősorban a binomiális együtthatók $\left(\binom{n}{k}\right.$ és $\left.\binom{n}{n/2}\right)$ értékének, valamint $\mathcal{O}(2^n)$ és $\mathcal{O}(n!)$ futásidejű algoritmusok összehasonlítására használjuk a fenti formulákat. Az A Függelék táblázata is ezek felhasználásával készült nagy n értékek esetén.

2.5. Feladatok

A szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményének 5. és 6., de még inkább a 7. és 8. fejezeteiben sok változatos és megoldással ellátott feladatot találunk gyakorlás céljára. Ajánlhatjuk még Hajnal Péter $[HaPé,'97/1]$ és Vilenkin $[ViNJ'87]$ feladatgyűjteményeinek idevágó részeit.

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy hiába kevés elméleti eredménnyel találkoztunk jelen fejezetben, de a gyakorlati problémák megoldásához szükséges ügyességet csak hosszú hónapok alapos gyakorlásával szerezhetjük meg! A kezdők örök dilemmája és hibalehetősége: "összeadni" vagy "összeszorozni" "kell", lehet-e egyáltalán valamelyik képletet használni és melyiket, vagy csak "gyalogosan" fel kell sorolni az összes lehetőséget, esetleg valamely szempontok szerint csoportosítva, kicsit megkönnyítve a tengernyi eset felsorolását, és a legfontosabb: Mindent összeszámoltunk? Semmit sem számoltunk kétszer? Csak a halmaz elemeit számoltuk meg[(17)]?

2.0.Feladat: Keressünk a mindennapi életben példákat permutációkra, variációkra és kombinációkra!

[15)] James Stirling (1692-1770) skót matematikus, elsősorban statisztikával, végtelen sorok konvergenciájával, mechanikával foglalkozott.

[16)] függvények aszimptotikájának pontos definícióját analízisben tanuljuk, itt most nem foglalkozunk vele.

[17)] Lásd a fejezet legelején írt (2.1.) jótanácsunkat !

2.1.Feladat: Igazoljuk az alábbi állításokat[18] *teljes indukcióval* !

/1/

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad .$$

/2/ Ha $n \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} \geq \frac{n}{2} \quad .$$

/3/

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

/4/

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

/5/ Ha $a \in \mathbb{R}$ olyan valós szám, amelyre $a + \frac{1}{a}$ egész szám, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $a^n + \frac{1}{a^n}$ is egész szám.

/6/ n egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja.

/7/ Az $1, 2, ..., 2^n$ számok két azonos méretű és diszjunkt A, B csoportba oszthatók úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok összege azonos legyen.

/8/ Az első n páratlan természetes szám összege pontosan n^2 .

/9/

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

/10/

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{ahol} \quad H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}$$

(ún. "harmonikus" számok[19])

---

[18] Természetes számok bármely hatványainak összegére a fentihez hasonló zárt formulák (képletek) "gyártását" a 3.3 "Összegezési módszerek" alfejezetben fogjuk bemutatni, az érdeklődő Olvasók a D Függelékben megtalálják az eredményeket, az ún. $P_k(n)$ polinomokat – és teljes indukcióval már bizonyíthatják is őket ...

[19] Euler tétele szerint $\lim\limits_{n\to\infty} (H_n - ln(n)) = C$ ahol $C \approx 0,577215$ az ún. "Euler-féle" konstans.

/11/

$$H_1 + ... + H_n = (n+1) \cdot H_n - n$$

/12/

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad > \quad 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

/13/

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

/14/

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

/15/

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

/16/ Tetszőleges $a, q \in \mathbb{C}$ rögzített komplex számokra

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

(mértani sorozat összegképlete).

/17/ Minden n -elemű halmaznak 2^n részhalmaza van, azaz

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n \quad ha \quad |A| = n$$

/18/

$$n < 2^n < n!$$

/19/ Tetszőleges $A_1, ..., A_n$ halmazokra

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

és

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

(általánosított De Morgan szabályok)

/20/ A $2^n \times 2^n$ méretű sakktábla bal felső mezőjét elhagyva a maradék tábla mezői hiánytalanul és egy rétegben lefedhetők 3 négyzetből álló L alakú lapocskákkal.

/21/ $n^3 - n$ osztható 3 -mal, azaz $3\,|n^3 - n$.

/22/ Tetszőleges $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ pozitív valós számokra

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$$

(számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség).

/23/ Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ Forintot ki lehet fizetni 4 - és 5 - Forintos érmékkel.

2.2. Feladat: Hány nemnegatív megoldása van az

$$y_1 + ... + y_k = n$$

egyenletnek tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám esetén ?

2.3. Feladat: Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex n -szög átlóinak a sokszög belsejében?

2.6. Megoldások

2.2. Feladat: A feladat éppen egy *ismétléses kombináció:* az egyenlet jobb oldalán levő n -et kell k részre szétosztanunk az $y_1, ..., y_k$ változók között, vagyis k különböző név közül kell visszatevéssel n -szer húznunk, így a válasz $C_k^{n,(ism)} = \binom{n+k-1}{k-1}$. (Ld. még a 6.5. Feladatot is a 6. fejezet végén!)

2.3. Feladat: $\binom{n}{4}$ mert a sokszög bármely négy csúcsát kiválasztva *pontosan* egyféleképpen (keresztben) tudjuk őket átlókkal összekötni úgy, hogy az átlóknak a sokszög belsejében legyen metszéspontjuk.

2.7. Hivatkozások

[*B*] Berg,L.: *Másodrendű differenciaegyenletek,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[HHM] Harris,J.M.,Hirst,J.L.,Mossinghof,M.J.: *Combinatorics and Graph Theory,* Springer Verlag, 2000.

[P] Pólya György: *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds,* Acta Math. 68 (1937), 145-254.

[PR] Pólya, Read: *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds,* Springer Verlag, 1987.

3. fejezet

Binomiális és polinomiális együtthatók

A BINOMIÁLIS ÉS POLINOMIÁLIS TÉTELEK. NEWTON TÉTELE. A BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK ÉS TULAJDONSÁGAIK. ÖSSZEGEZÉSI MÓDSZEREK, ZÁRT FORMULA $\sum i^k$ -RE.

3.1. Binomiális és polinomiális tételek

Közismert az $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ képlet, vagyis tetszőleges kéttagú *(binom)* összeget (majdnem!) "tagonként" tudunk hatványozni. Természetesen a és b tetszőleges valós vagy komplex számok, esetleg kvaterniók[1], vagy akár polinomok, tetszőleges függvények stb. is lehetnek. Hasonlóan könnyű több tagú összeget *(polinom[2])* is magasabb hatványra emelni. (Az egyszerűség miatt mi csak komplex számokkal foglalkozunk.)

Kezdjük a binomiális tétellel.

3.1. Tétel: (Newton[3] binomiális tétele[4]) *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ komplex*

---

[1] a kvaterniók számteste $\mathbf{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ahol $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ és $ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$ és természetesen $\mathbb{C} \subset \mathbf{Q}$.

[2] görög szóösszetételek, szó szerinti fordításban *bi nom = két tag, tri nom = három tag, poli nom = sok tag*

[3] Isaac Newton (1643-1727) közismert angol matematikus és fizikus

[4] a formulát többek között már *Omar Khajjám* (1048-1131) perzsa és *Hiasszedin* arab matematikusok, sőt *Blaise Pascal* (1623-1662) is ismerték. Newton érdeme viszont a tétel általánosítása, mely eredményeket az alfejezet többi tételében ismertetjük.

számok és $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} \tag{3.1}$$

Bizonyítás: A tételt általában n -re vonatkozó indukcióval szokás bizonyítani, a 3.10. Állítás (3.6) összefüggése alapján. (Javasoljuk az Olvasónak gyakorlásképpen azt a bizonyítást is átgondolni.) Mi inkább egy közvetlen számolási módszert választottunk, ami egyrészt a tétel felfedezésének élményét is adja, másrészt a kombinatorikai fogalmakkal való kapcsolatát is jobban felfedi.

Számoljuk ki tehát a hatványt a definíció alapján:

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$$

(n -tagú szorzat).

Persze minden tagot mindegyikkel megszorzunk. De nem először csak az első két zárójelet, majd a szorzatot a harmadik zárójellel szorozzuk be és így tovább! Hanem az n zárójelet egyszerre: mindegyik zárójelből minden lehetséges módon kiveszünk vagy a -t vagy b -t, és ezeket a tagokat szorozzuk össze egymással (vagyis valóban $a^i b^{n-i}$ alakú tagokat kapunk minden lehetséges $0 \le i \le n$ értékre), és persze a végén az azonos hatványokat összegyűjtjük egy $\sum$ -ba.

Hányféleképpen kaphatunk $a^i b^{n-i}$ alakú szorzatokat rögzített i esetén? Vagyis az adott n zárójel közül kell i -ből az a tagot kiválasztanunk, és a maradék $n-i$ zárójelből választunk ki b tagot. (Vagyis tényleg $0 \le i \le n$.) Márpedig tudjuk, hogy n különböző "valami" közül i -t kiválasztani pontosan $\binom{n}{i}$ -féleképpen lehet. $\square$

Newton (és tőle függetlenül Bolyai János is) általánosította a fenti eredményt *tetszőleges* $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőre, a pontos eredményt a 3.4. Tételben találjuk meg.

A 3.1. Tétel egy érdekes változata az alábbi, amely viszont teljes indukcióval igazolható könyebben (ezt is javasoljuk az Olvasónak átgondolni.)

3.2. Tétel: (Newton) *Tetszőleges n természetes számra és $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x -ben n -szer differenciálható függvényekre teljesül:*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot f(x)^{(i)} \cdot g(x)^{(n-i)} \quad . \qquad \square$$

Bár csak a 6. fejezetben lesz szükségünk rá, de mégis ide kívánkozik Newton következő tétele is, melyet tőle függetlenül Bolyai János is felfedezett(5). Ehhez szükségünk lesz a binomiális együtthatók általánosítására: (6)

3.3. Definíció: *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{C}$ komplex és $n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén legyenek az* **általánosított binomiális együtthatók**

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot ... \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad . \qquad \square \tag{3.2}$$

3.4. Tétel: (Newton binomiális sora) *Tetszőleges $x, a \in \mathbb{C}$ komplex számok, $|x| < |a|$ és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám esetén teljesül az*

$$(a + x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a^{\alpha - i} \cdot \binom{\alpha}{i} \cdot x^i$$

egyenlőség (és persze a végtelen hatványsor abszolút konvergens ha $|x| < |a|$).

Bizonyítás: Lásd analízis előadáson. $\square$

Javasoljuk az Olvasónak az $\alpha = -1$ eset tanulmányozását, amire a 6. fejezetben ("*Generátorfüggvények*") lesz szükségünk.

A binomiális tétel változatai után lássuk a másik általánosítási irányt, többtagúak hatványait:

3.5. Tétel: (Polinomiális tétel) *Tetszőleges $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$ komplex számok és $s, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén fennáll az*

$$(a_1 + ... + a_s)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1, ..., k_s \le n \\ k_1 + ... + k_s = n}} \binom{n}{k_1, ..., k_s} \cdot a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_s^{k_s}$$

összefüggés.

Mint az előző alfejezetben láttuk, $s = 2$ esetén az $\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, n - k_1}$ polinomiális együttható éppen az $\binom{n}{k_1}$ binomiális együtthatóval egyezik meg, vagyis tényleg a 3.1. Tétel általánosításáról van szó. Az általunk adott

---

5) 1823-ban, ld. [*BS*] 154–158. oldalakon.

6) ld. még a 3.16. Definícióban bevezetendő $\binom{x}{n}$ "*binomiális polinomokat*" .

bizonyítás is ennek megfelelően hasonló a 3.1. Tétel bizonyításához: ismét nem teljes indukciót, hanem csak a hatványozás definícióját használjuk.

Bizonyítás: Számoljuk ki a hatványt a tanult módon, amint a 3.1. Tétel bizonyításában is tettük:

$$(a_1 + ... + a_s)^n = (a_1 + ... + a_s) \cdot (a_1 + ... + a_s) \cdot ... \cdot (a_1 + ... + a_s)$$

(n -tagú szorzat).

Minden tagot mindegyikkel megszorzunk,mégpedig az n zárójelből egyszerre: mindegyik zárójelból minden lehetséges módon kivesszük valamelyik a_i -t, és ezeket a tagokat szorozzuk össze egymással. Vagyis valóban $a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_s^{k_s}$ alakú tagokat kapunk ahol $0 \leq k_1, ..., k_s \leq n$ és $k_1 + ... + k_s = n$. A végén az azonos hatványokat összegyűjtjük egy $\sum$ -ba, amihez már csak azt kell meggondolnunk, hogy hányféleképpen kaphatunk $a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_s^{k_s}$ alakú szorzatokat rögzített, fenti tulajdonságú $k_1, ..., k_s$ kitevők esetén?

Az adott n zárójel közül kell tehát k_1 -ből az a_1 tagot kiválasztanunk, k_2 -ből az a_2 -őt, és így tovább, és a maradék k_s zárójelből az a_s tagot. (Persze $k_i = 0$ vagy $k_i = n$ is lehetséges, de ismételjük: $k_1 + ... + k_s = n$, és most a $k_1, ..., k_s$ kitevők rögzítettek.) E feladathoz legegyszerűbb, ha n zsetont elővesziünk, ezek közül k_1 -re a_1 -et írunk, k_2 -re a_2 -őt, és így tovább, a maradék k_s zsetonra pedig a_s -et. Sorbarakjuk a zsetonokat a zárójelek alá, és mindegyik zárójelből azt az a_i számot választjuk ki, amely a zsetonra van írva. Márpedig e zsetonok sorbarakása ismétléses permutáció. Így a lehetőségek száma a tanultak szerint éppen az $\binom{n}{k_1,...,k_s}$ kifejezés, amit most már joggal hívhatunk *polinomiális együttható*nak. $\square$

Speciális esetként már találkoztunk a *binomiális* ($s = 2$) együtthatókkal (ellenőrizzük!), használatos még a $s = 3$ esetén a *trinomiális* együttható elnevezés is. Mi részletesen nem foglalkozunk a trinomiális együtthatókkal, de sok helyen, pl. $[K]$ -ban vagy $[C]$ -ben is találkozhatunk velük.

3.2. A binomiális együtthatók tulajdonságai

Mint az előző fejezetben láttuk, definíció szerint az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók *kombinatorikailag* csak $1 \leq k \leq n$ esetén értelmezhetők. A (2.17) formula alapján azonban tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra értelmezhetők (csak megismételjük a (2.17) definíciót):

3.6. Definíció: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén legyen*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \qquad \square \tag{3.3}$$

Könnyen belátható, hogy a fenti kifejezés valóban *tetszőleges* $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra értelmezhető, és $0 \leq k \leq n$ esetén megegyezik a (2.16) és a (2.18) formulákkal:

3.7. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok, $0 \leq k \leq n$ esetén fennáll az*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{3.4}$$

azonosság. $\square$

(Emlékeztetünk arra, hogy $0! = 1$.)

Megjegyzések: Bár elméleti számításoknál általában a (3.4) formula kényelmesebb, nagy számok esetén azonban gyakran a benne szereplő faktoriálisok már el sem férnek a számológépen ($70! \approx 1,198 \cdot 10^{100}$ vagy gondoljunk csak Stirling (2.20) tételére), így csak a (3.3) képlet a kivitelezhető. Például a lottóhúzásban szereplő $\binom{90}{5}$ értéke nem számolható ki a $\frac{90!}{5! \cdot 85!}$ módon, míg a $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ formula kiszámítása másodpercekbe sem telik.

Még nagyobb számokra még a (3.4) formulát is óvatosan kell alkalmazni. Például a $\binom{200}{100} = \frac{200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 101}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$ számítási módszer sem járható út, de a

$$\binom{200}{100} = \frac{200}{100} \cdot \frac{199}{99} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{1}$$

átalakítással könnyedén célhoz érhetünk, és megkaphatjuk:

$$\binom{200}{100} \approx 9,05 \cdot 10^{58} \quad . \tag{3.5}$$

3.8. Feladat: *Becsüljük meg a* (2.20) *Sirling formula segítségével* $\binom{n}{k}$ *értékét nagy n és k esetén!* $\square$

Az alábbiakban felsoroljuk a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságait. A legtöbb azonosság igazolható akár kombinatorikai megfontolásokkal, akár a (3.3) vagy (3.4) képletek segítségével. Ahol lehetséges, mi a kombinatorikai gondolatmeneteket részesítjük előnyben, azonban javasoljuk az Olvasónak a (3.3) és (3.4) képletek alapján a számításos "ellenőrzést" is!

Hangsúlyozzuk, hogy mi csak néhány elemi azonosságot ismertetünk, Gould 1972-ben megjelent $[G]$ könyvében félezer azonosság található, a lista azóta többszörösére növekedett. Sok érdekes azonosság található még Hajnal Péter $[HaPé,' 97/2]$ könyvének 34-36. oldalain, Vilenkin $[ViNJ,' 87]$ feladatai között, és szinte minden kombinatorikai könyvben.

3.9. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igazak az alábbi összefüggések:*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{i}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{ii}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{iii}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{ha} \ \ k > n \tag{iv}$$

Bizonyítás: **(i)** n elemből 0 elem kiválasztása: hozzá sem nyúlunk a halmazhoz. n elem kiválasztása: az összeset ki kell vennünk Mind a két alkalommal a lehetőségek száma 1 .

(ii) n elemből 1 elem kiválasztása: *valamelyiket* kell kivennünk, ez n lehetőség. $n-1$ elem kiválasztása: pontosan egyiket, valamelyiket kell *bennt hagynunk,* ez is n lehetőség.

(iii) n elemből $n-k$ elem kiválasztása *pontosan* azt jelenti, hogy kiválasztjuk azt a k elemet, amit a halmazban *bennthagyunk,* vagyis a többi k elemet tesszük ki a kalapból.

A (iii) tulajdonságot szokás **szimmetria - tulajdonság -**nak is nevezni.

(iv) n elemből semmiképpen sem tudunk többet kiválasztani (visszatevés nélkül) mint amennyien vannak. $\square$

3.10. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{3.6}$$

Bizonyítás: n régi és $+1$ új elemből k elemet kiválasztani lehet úgy is, hogy az új elemet is kiválasztottuk, vagyis már csak $k-1$ elem kiválasztásán kell gondolkoznunk, ami $\binom{n}{k-1}$ lehetőség, vagy pedig mindegyik kiválasztandó elem régi, ami pedig $\binom{n}{k}$ lehetőség. $\square$

A fenti azonosság az alapja az ún. Pascal[7] - háromszögnek, amikor is a binomiális együtthatókat háromszög alakban rendezzük el, szemléltetés céljából:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\end{array}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

azaz

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

A 3.9. Állítás (i) összefüggése szerint mindegyik sor szélső elemei 1 - ek, továbbá a (3.6) összefüggés szerint mindegyik elem a "felette" (balra és jobbra) levő elemek összege, így a Pascal háromszög akármeddig könnyen folytatható. (A Pascal háromszög a "*Négyjegyű függvénytáblázatok*" c. középiskolai segédkönyvben is megtalálható a 14.B. táblázatban.)

A binomiális együtthatók eddigi és további tételei is szemléltethetőek a Pascal háromszög soraiban, átlóiban stb., ezek vizsgálatára mi most nem térünk ki.

---

[7] Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus, fizikus aki filozófiával és irodalommal is behatóan foglalkozott. Többek között a valószínűségszámításban, projektív geometriában, differenciál- és intergrálszámításban, számelméletben vannak fontos eredményei, a teljes indukció módszerét ő határozta meg először precízen. 16 évesen már dolgozata jelent meg a kúpszeletekben írható hatszögekről.

$[K]$ -ban a trinomiális együtthatók alkotta "Pascal"-háromszöggel ismerkedhetünk meg.

A (3.6) összefüggés alábbi két általánosítását sok feladatban felhasználhatjuk, például a 3.3. alfejezetben is.

3.11. Állítás ("Vandermonde[8] konvolúció "): *Tetszőleges* $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{\ell}{k-i} = \binom{n+\ell}{k} . \tag{3.7}$$

Bizonyítás: Hasonlít a (3.6) összefüggés bizonyításához.

Az $n+\ell$ elem közül n elem Jóska tulajdona míg ℓ Marié. Ha k elemet kell tőlük kölcsönkérnünk, akkor valamennyit, mondjuk i -t Jóskától, míg $k-i$ -t Maritól kapunk, külön-külön ez $\binom{n}{i}$ ill. $\binom{\ell}{k-i}$ -féle lehetőség rögzített i esetén. Mivel egymástól függetlenül kapunk tőlük, ezért kell e két mennyiséget összeszorozni, és mivel különböző i -kre ezek más-más esetek, ezért lehet összeadni. (Lásd még az "Összeszámlálás két alapmódszerét" a 2. fejezet 2.2. pontjában.) $\square$

A most bizonyított összefüggés valóban a (3.6) általánosítása, hiszen $\ell = 1$ választással az összegnek csak két tagja van: $i = 0$ és 1 .

3.12. Állítás: *Tetszőleges* $k, n \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + ... + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{3.8}$$

Bizonyítás: Hányféleképpen lehet az $1, 2, ..., n+1$ számok közül $k+1$ -et kiválasztani? Számoljuk külön azon esetek szerint, amikor is a legnagyobb kiválasztott szám $k+1$ (kisebb nem lehet), $k+2$, ... vagy $n+1$. Ekkor a maradék k számot a legnagyobb szám alatt lehet kiválasztani, rendre a k , $k+1$, ... , n számok közül, ami pedig rendre $\binom{k}{k}$, $\binom{k+1}{k}$, ... , $\binom{n}{k}$ lehetőség. Az összeszámolt lehetőségek mind különbözőek. $\square$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fenti összeg

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

[8] Vandermonde munkásságát az 5. Fejezet (8.) lábjegyzetében ismertetjük.

alakban is írható, hiszen a 3.9.(iv) összefüggés alapján $i < k$ esetén az összeadandó tagok mind 0 -ák !

Mint említettük, a binomiális együtthatókra vonatkozó összefüggések az együtthatók (2.17) vagy (2.18) képlete alapján számolással is igazolhatók. A fenti (3.8) összefüggés például a (3.6) alapján is igazolható, n -re vonatkozó teljes indukcióval.

3.13. Állítás : *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az $\binom{n}{i}$ binomiális együtthatók $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ esetén szigorúan monoton növekednek míg $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq i \leq n$ esetén szigorúan monoton csökkennek.*

Bizonyítás: A triviális

$$\binom{n}{i+1} = \binom{n}{i} \cdot \frac{n-i}{i+1}$$

összefüggés alapján az állítás könnyen belátható. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 3.9. Állítás (iii) összefüggése szerint elegendő csak a jelen állítás egyik felét igazolni. Vagyis az $\binom{n}{i}$ együtthatók (rögzített n esetén) a sorozat közepéig monoton nőnek, majd szimmetrikusan csökkennek. Emlékeztetünk arra, hogy a sorozat két szélén $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ és $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ áll, míg a közepén elhelyezkedő legnagyobb elem, $\binom{n}{n/2}$ értéke az előző fejezetben megismert (2.20) Stirling- formula alapján

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \approx 2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} .$$

3.3. Összegezési módszerek

Ebben az alfejezetben az analízis és a lineáris algebra módszereivel (és a binomiális együtthatók segítségével) kapunk zárt alakot különböző összegekre. Az eredmények és módszerek a valószínűségszámításban és a matematika más fejezeteiben is fontosak.

Elsősorban nem a kapott összefüggéseket, hanem az alkalmazott módszereket ajánljuk az Olvasó figyelmébe, amik segítségével később egyedül is zárt alakra tud hozni bizonyos, binomiális együtthatókat tartalmazó más összegeket.

3.3.1. Binomiális együtthatók összegei

Már a binomiális és polinomiális tételekből is egyszerűen nyerhetünk fontos összefüggéseket:

3.14. Tétel: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \tag{i}$$

és

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = 0 \ . \tag{ii}$$

Bizonyítás: Newton (3.1) binomiális tétele alapján kapjuk, hogy

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{n-i}$$

illetve

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot 1^{n-i} \quad ,$$

valamint használjuk fel az $1+1=2$ és az $1-1=0$ összefüggéseket is. □

Más szóval, ha a Pascal háromszög (bármelyik) sorában összeadjuk az elemeket, 2 megfelelő hatványát kapjuk, illetve a tagokat váltakozó előjellel összadva 0 -át kapunk. Páros n esetén ez azonnal következik a binomiális együtthatók 3.9.Állítás (iii) -ben ismertetett szimmetria tulajdonságából, de páratlan n -re ez már nem olyan nyilvánvaló.

A fenti eredményt ismét lehetne teljes indukcióval is igazolni.

(i) kombinatorikai igazolása a véges mennyiségek közötti jobb eligazodást is segíti, ezért érdemes vele is megismerkedni:

(i) kombinatorikai bizonyítása: Hány részhalmaza van egy n -elemű halmaznak? Persze pontosan 2^n de részletesebben: vannak $0, 1, ..., i, ..., n$ elemű részhalmazok, melyekből rendre $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{i}$, ..., $\binom{n}{n}$ van. Egyazon mennyiséget kétféleképpen számolva ugyanaz (általában) az eredmény, vagyis $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, amint állítottuk. □

A 3.12. Tétel (3.8) összefüggésében a $\binom{\cdot}{\cdot}$ binomiális együtthatók "felső" tagja szerint, míg jelen Tételben az alsó tagok szerint történt az összegezés.

További egyenlőségeket nyerhetünk, ha az analízis fegyvereit is bevetjük. Ismételjük: a bizonyításban ismertetett módszer az, amit elsősorban az Olvasó figyelmébe ajánlunk!

3.15. Tétel: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1} \tag{i}$$

és

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{i+1} = \frac{2^{n-1}}{n+1} \tag{ii}$$

Bizonyítás: Megint Newton binomiális tételéből indulunk ki, de honnan eredhetnek az i szorzó- ill. osztótényezők? Az x^i függvények *deriválásából* ill. *integrálásából*! Ezért, mivel n rögzített, tekinthetjük az

$$f(x) := (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i$$

függvényt ahol $x \in [0,1]$, és most kivételesen legyen $0^0 = 1$. Ekkor az egyenlőség mindhárom oldalát deriválva ill. integrálva kapjuk, hogy

$$f'(x) := n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i \cdot x^{i-1}$$

és

$$\int_0 f(x) := \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

(az egyértelműség miatt vettünk 0-ban eltűnő integrált). A fenti egyenlőségekbe x helyére 1-et helyettesítve kapjuk a bizonyítandó összefüggéseket. □

További azonosságok felfedezéséhez tekinthetjük még a

$$g(x) := (1-x)^n$$

függvényt is, komplex számokat is alkalmazhatunk, további ötleteket találunk még a fejezet végén levő feladatoknál vagy a szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében.

3.3.2. Hatványok összege

Bizonyára sokak előtt nem ismeretlen a természetes számok összege 1 -től n -ig, vagy esetleg a négyzetszámok, köbszámok, stb. összege (pontosabban ezen összegek zárt vagy explicit alakja):

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

a D Függelékben még magasabbrendű hatványok összegét is megtaláljuk.(9)

A fenti összefüggések mindegyike n -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen igazolható. Azonban számunkra a fontosabb kérdés: *hogyan* lehet a fenti és hasonló összefüggéseket megtalálni?

Jelen fejezetben egy *módszert* mutatunk be, amely ötletet adhat más hasonló összefüggések megtalálásához is. Az ötletet a (3.8) összefüggés adhatja, ami szintén egy összegképlet.

De előbb meg kell ismerkednünk egy újfajta, a kombinatorikában hasznos polinom - sorozattal is:

3.16. Definíció: *Tetszőleges $j \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyenek*

$$\binom{x}{j} := \frac{x(x-1)...(x-j+1)}{j!} \tag{3.9}$$

j -edfokú polinomok(10)*, a* **binomiális polinom***ok.* □

3.17. Tétel: *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik egy olyan $k+1$ -edfokú $P_k(n)$ polinom, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra*

---

(9) Még a 2.d) feladatot említhetjük, vagy a $[SzIs,'97]$ feladatgyűjtemény 7.oldalán levő megjegyzéseket.

(10) nyilvánvalóan a binomiális együtthatók egy újabb általánosításáról van szó, v.ö. az $\binom{\alpha}{n}$ kifejezések definícióját a (3.2) -ben.

teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = P_k(n)$$

összefüggés.

Bizonyítás: Tekintsünk egy szokatlan bázist a legfeljebb k -adfokú polinomok vektorterében, $\mathbb{P}_k$ -ban:

$$\left\{ \binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \ldots, \binom{x}{k} \right\}$$

ami könnyen láthatóan bázis $\mathbb{P}_k$ -ban[11] .

Írjuk fel fenti (új) bázisunkban a $\sum_{i=1}^{n} i^k$ összegben szereplő x^k polinomot, azaz legyen

$$x^k := \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \binom{x}{j} \tag{3.10}$$

ahol $b_j \in \mathbb{R}$ rögzített valós számok. Ekkor az általunk keresett összeg nem más, mint x helyére i -t írunk és összegezünk i szerint. A dupla $\sum$ -át felcserélve és a (3.8) összefüggést felhasználva kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{k} b_j \sum_{i=1}^{n} \cdot \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{k} b_j \binom{n+1}{j+1} .$$

(Ugyan a (3.8) összegben $i \geq j$ lehet csak, de mint a 3.4. Állítás (iv) pontjában láttuk, $i < j$ esetén úgyis $\binom{i}{j} = 0$.)

A legutolsó $\sum$ -ban szereplő $\binom{n+1}{j+1}$ binomiális együtthatók nyilván n -nek $j+1$ -edfokú polinomjai, melyek tetszőleges lineáris kombinációja egy $k+1$ -edfokú polinom, vagyis a legutolsó kifejezés éppen a P_k polinomot adja:

$$P_k(n) := \sum_{j=0}^{k} b_j \binom{n+1}{j+1}$$

ami a fentiek szerint valóban egy $k+1$ -edfokú polinom. $\square$

A tétel $k = 0$ esetén is igaz, ekkor $P(n) = n$.

[11] függetlenek mert fokszámaik különbözőek, és bázis, mert számuk éppen $k+1$, megegyezik a tér dimenziójával.

Most még annyit tudunk, hogy az összegképlet egy polinom. Vegyük észre azonban, hogy a tétel bizonyításakor nem csak a P_k polinomok létezését igazoltuk, hanem az ismertetett konstrukció alapján meg is szerkeszthetjük e polinomokat (HF). A C Függelékben nem csak a P_k polinomokat, hanem a szükséges bázistranszformáció táblázatát (a (3.10)-ban szereplő b_k számokat) is megtaláljuk.

A tétel alapján természetesen nem csak a (természetes) számok hatványainak összegét, hanem azok lineáris kombinációinak, azaz polinomok helyettesítési értékeinek összegét is ki tudjuk számolni:

Állítás: *Tetszőleges* $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ m -*edfokú polinom helyettesítési értékeinek összege*

$$\sum_{i=1}^{n} p(i) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(n) \quad . \qquad \square$$

Hadd hívjuk fel az Olvasó figyelmét ismét arra, hogy a módszer (elemi) lineáris algebrát használ, vagyis a kombinatorikában nem idegen a matematika más területeinek felhasználása.

3.4. Rugalmas pénzérmék

Végezetül hadd mutassuk meg a binomiális együtthatók egy érdekes felhasználását egy valószínűségszámítási problémában. A téma részletesebb kifejtését (a megoldatlan problémák megoldásainak kivételével) az érdeklődő Olvasó $[SzV1]$ és $[SzV2]$ -ben találja meg.

Bemelegítésképpen vegyünk elő egy olyan érmét, amely $p := \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fej és $1-p = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel írás. Ezt az érmét háromszor feldobva, három azonos dobás (három fej vagy három írás) valószínűsége éppen $p^3 + (1-p)^3 = \frac{1}{2}$; vagyis érménkkel *szimulálhatjuk* a szokásos (szabályos érmét). Sőt, érménket kétszer feldobva a különböző dobások (egy fej egy írás) valószínűsége pedig $2p(1-p) = \frac{1}{3}$, vagyis az $\frac{1}{3}$ valószínűséggel fej érmét is tudjuk szimulálni! Ennek megfelelően az alábbi általános definíciót tudjuk ajánlani:

3.18. Definíció: *Tetszőleges* $p, q \in [0,1]$ *valószínűségek esetén* p **szimulálja** q *-t, ha található egy olyan* $n \in \mathbb{N}$ *természetes szám és az* n *hosszúságú fej-írás dobássorozatoknak olyan* $E \subseteqq \{f, í\}$ *részhalmaza, amelyre igaz, hogy* *a p valószínűséggel fej érmét n -szer feldobva, annak a valószínűsége, hogy a dobássorozat E -nek eleme, éppen q .*

Másképpen fogalmazva: $p, q \in [0,1]$ *esetén* p **szimulálja** q *-t, ha vannak olyan* $n, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ *természetes számok, amelyekre* $0 \leq a_i \leq \binom{n}{i}$ *ha* $0 \leq i \leq n$ *és*

$$q = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{n}{i} \quad \square$$

Könnyen belátható hogy a *szimulálja* reláció reflexív és tranzitív. Bennünket a szimultán szimulációk érdekelnek, első ilyen tételünk a következő.

3.19. Tétel (Szalkai,Velleman $[SzV1]$)**:** *Legyen* $F \subset \mathbb{Q}$ *a racionális számok egy tetszőleges véges részhalmaza,* $F \subset [0,1]$*. Ekkor létezik (legalább egy) olyan* $p \in [0,1]$ *valós szám, amely egyszerre szimulálja* F *minden elemét.* $\square$

A Tétel könnyen általánosítható a valós számok olyan véges $F \subset [0,1]$ részhalmazaira is, amelyek *egyazon (*rögzített) $\xi \in \mathbb{R}$ valós (akár irracionális szám) racionális többszörösei, azaz $F \subset \xi \cdot \mathbb{Q} := \{\, \xi q : q \in \mathbb{Q}\}$. Másrészt azt is könnyű belátni, hogy ha p és q egymást szimulálják, akkor p és q "transzcendencia foka $\mathbb{Q}$ felett" megegyezik, azaz $\mathbb{Q}[p] = \mathbb{Q}[q]$ [12] . Vagyis pl. $1/\sqrt{2}$ és $1/\pi$ biztosan nem szimulálhatók egyszerre, egyetlen $p \in [0,1]$ valós számmal sem! Ennél többet (szinte) semmit sem tudunk a "szimulálja" relációról, például az alábbi triviális(nak tűnő) kérdésekre sem ismerjük a választ:

3.20. Probléma (megoldatlan): *Szimulálhatók -e egyszerre pl. az* $1/\sqrt{2}$ *és* $1/\sqrt{3}$*, vagy az* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *és* $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ *, az* $\frac{1}{e}$ *és* $\frac{1}{e+1}$ *vagy esetleg az* $\frac{1}{\pi}$ *és* $\frac{1}{\pi+1}$ *számpárok?* $\square$

További megoldatlan problémákat és eredményeket találnak az érdeklődő Olvasók $[SzV1]$ és $[SzV2]$ -ben.

---

12) röviden: $\mathbb{Q}[q] :=$ *a* $\mathbb{Q}$ *számtest algebrai testbővítése a* $q \in \mathbb{R}$ *valós számmal,* azaz a racionális számokból, q -ból a négy alapművelettel és tetszőleges gyökjelekkel kiszámítható számok halmaza. Például, racionális $q \in \mathbb{Q}$ számok esetén $\mathbb{Q}[q] = \mathcal{A}$ (az *algebrai* számok halmaza), pl. $\sqrt{2} \in \mathcal{A}$, vagy $a, b, q \in \mathbb{Q}$ esetén $\sqrt{q}$, $a^b \in \mathcal{A}$, de $\pi, e, \ln(2), \sin(10^0) \notin \mathcal{A}$, így $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{q}] = \mathbb{Q}[a^b] = \mathcal{A}$, de $\mathbb{Q}[\pi]$, $\mathbb{Q}[e]$, $\mathbb{Q}[\ln(2)] \neq \mathcal{A}$, sőt ez utóbbi három (és általában minden "hasonló") testbővítés mind különbözőek (egymástól).

3.5. Feladatok

A szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében valamint Vilenkin $[ViNJ,'87]$ könyvének végén elegendő gyakorló feladatot találhatunk megoldási útmutatóval, itt csak néhány újabb érdekességet ismertetünk.

3.1. Feladat: Bizonyítsuk be az alábbi azonosságot ($n \in \mathbb{N}$ tetszőleges):

$$\frac{1}{0!\cdot 1!\cdot[(n-1)!]^2}+\frac{1}{1!\cdot 2!\cdot[(n-2)!]^2}+\frac{1}{2!\cdot 3!\cdot[(n-3)!]^2}+\ldots=\frac{(2n-1)!}{[n!(n-1)!]^2}$$

3.2. Feladat: Bizonyítsuk be a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait ($m,n,r \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes számok):

/1/

$$\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=n^3$$

/2/

$$1+7\binom{n}{1}+12\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=(n+1)^3$$

/3/

$$1+14\binom{n}{1}+36\binom{n}{2}+24\binom{n}{3}=(n+1)^4-n^4$$

/4/

$$\binom{n}{1}+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}+24\binom{n}{4}=n^4$$

/5/

$$\frac{\left[\binom{n+1}{r+1}-\binom{n}{r}\right]\cdot\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}^2-\binom{n+1}{r+1}\cdot\binom{n-1}{r-1}}=r$$

/6/

$$\binom{m}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+m-1}{m}$$

/7/

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=2^{n-1}n$$

/8/

$$1\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+...+(n+1)\binom{n}{n}=(n+1)2^{n-1}$$

/9/

$$1\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+...+(n-1)\binom{n}{n}=(n-2)2^{n-1}+1$$

/10/

$$1\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+...+(2n-1)\binom{n}{n}=(n+1)2^{n}$$

/11/

$$1\binom{n}{0}-2\binom{n}{1}+-...+(-1)^n(n+1)\binom{n}{n}=0$$

/12/

$$3\binom{n}{1}+7\binom{n}{2}+...+(4n-1)\binom{n}{n}=2^{n-1}(n-2)+1$$

/13/

$$1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+-...+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=\begin{cases}1 & \text{ha } n=1\\ 0 & \text{ha } n\geq 2\end{cases}$$

/14/

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+...+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

/15/

$$\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}+...+\frac{1}{n+2}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}$$

/16/

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+-...+\frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}$$

/17/

$$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+-...+(-1)^n\binom{n}{n}^2=\begin{cases}0 & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2} & \text{ha } n \text{ páros}\end{cases}$$

/18/

$$1\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + ... + n\binom{n}{n}^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

/19/

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{r}}{\binom{2n}{k+r}} = \frac{2n+1}{n+1}$$

/20/

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{2n-1}{k}} = \frac{2}{n+1}$$

/21/

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n+r}{k}} = \frac{n+r+1}{(r+1)(r+2)}$$

/22/

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n+r}{k}} = \frac{2(n+r+1)}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

/23/

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-3)^i \binom{n}{2i} = (-2)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

/24/

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-3)^i \binom{n}{2i+1} = \frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

/25/

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{3i} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

/26/

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{3i+1} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{3}\right)\right)$$

/27/

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{3i+2} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos(\frac{(n+2)\pi}{3})\right)$$

/28/

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{4i} = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos(\frac{n\pi}{4})\right)$$

3.6. Megoldások

3.2 a)-d) Feladatok: A feladatok állításai azon alapulnak, hogy a 3.18.Definícióban definiált $\left\{\binom{x}{i} : i \leq k\right\}$ polinomok bázist alkotnak a legfeljebb k -adfokú valós együtthatójú polinomok $\mathbb{P}_k$ vektorterében, tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

3.7. Hivatkozások

[BL] Berg,L.: *Másodrendű differenciaegyenletek,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[BS] Benkő Samu: *Bolyai levelek,* Kriterion, Bukarest, 1975

[C] Cofman Judit: *Fibonacci- féle számoktól a fraktálokig,* Polygon III. (1993), 91-101

[G] Gould, H.W.: *Combinatorial Identities, A standardized set of tables, listing 500 binomial coefficient summations,* Morgantown,W.Va., 1972

[K] Knut Gregory Leiβ: *Pascalsches Dreieck,* Wurzel 30 (1996), 115-123

[M] Máté László: *Rekurzív sorozatok,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980

[Sz] Szalkai,István: *Rugalmas pénzérmék és algebrai számok*, Haladvány Kiadvány 2019, http://math.bme.hu/~hujter/191228.pdf

[$SzV1$] Szalkai,I.,Velleman,D.: *Versatile Coins,* Amer. Math. Monthly 100 (1993), pp. 26-33

[$SzV2$] ———— : *Rugalmas pénzérmék,* Matematikai Lapok 1992, 23-38.old.

4. fejezet

A logikai szitaformula

A FORMULA. ELCSERÉLT LEVELEK. ADDITÍV HALMAZFÜGGVÉNYEK ÉS RÉSZBEN RENDEZEZTT HALMAZOK. FELADATOK.

4.1. A formula

Sok esetben egy alaphalmaz bizonyos tulajdonságú elemeit úgy sikerül összeszámlálnunk, hogy valamely szempont szerint csoportosítjuk az elemeket, majd az osztályok számát adjuk össze. Azonban átfedések esetén óvatosnak kell lennünk: a többször számolt elemeket +/- hányszor kell figyelembe vennünk, "kiszitálnunk". Hangsúlyozzuk, hogy lényeges a szitaformula *logikai* jelzőjét használnunk, hiszen a matematikában sok más szitaformula (pl. Eratosztheneszi-, számelméleti "nagy-" és Selberg-, és egyebek) is használatosak.

Elterjedt még a *"tartalmazás és kizárás elve"* (The Principle of Inclusion and Exclusion) elnevezés is.

Mint szokásosan, $|A|$ jelöli az A halmaz számosságát (elemeinek számát).

Két osztály esetén könnyen igazolható az alábbi jól ismert összefüggés:

4.1.Állítás: *Ha A és B tetszőleges halmazok, akkor*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad . \qquad \square \tag{4.1}$$

Több halmaz esetén már egyszerűen nem látható át a helyzet, pedig sok szokásos iskolapélda kezdődik valahogy így: *"Egy osztályba ennyien járnak, ennyien tanulnak ilyen nyelvet, annyian olyan nyelvet, ..., és ezt a két nyelvet tanulják amannyian ... "*. Három nyelv esetén még csak-csak boldogulunk

Venn- diagramokkal, de már akkor is hasznos lehet az alábbi összefüggés, hát még több nyelv/részhalmaz esetén!

4.2.Tétel (Logikai szitaformula): *Ha* $A_1, ..., A_m$ *tetszőleges halmazok* $(m \in \mathbb{N})$, *akkor*

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum\sum_{1\le i<j\le m} |A_i \cap A_j| + \\ &+\sum\sum\sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - +... \qquad (4.2)\\ &+(-1)^{m+1}\left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|\end{aligned}$$

A többszörös összegezéseket (szummákat) számítástechnikában $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}$ illetve $\sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=i+1}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}$ stb. írhatnánk.

Bizonyítás: Jelölje $B := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ a halmazok unióját, és legyen $x \in B$ tetszőleges elem. Nyilván x -et B -ben pontosan egyszer kell megszámolnunk. Az egyenlőség bal oldalán tehát x -et pontosan 1 -szer számoltuk meg.

Tegyük fel, hogy x -et az A_i halmazok közül pontosan r tartalmazza, nyilván $1 \le r \le m$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán x -et

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - +... + (-1)^{r+1}\binom{r}{r}$$

-szer számoltuk össze, ami a 3.fejezet 3.14.Tétel (ii) pontja szerint éppen 1. □

A (4.2) összefüggés teljes indukcióval is igazolható a binomiális együtthatók 3.fejezet 3.10. Állításában megfogalmazott tulajdonsága alapján, vagy karakterisztikus függvényekkel. Mi a legrövidebb bizonyítást választottuk.

Sok esetben az A halmazok egy I alaphalmaz részhalmazai, és a "maradékra" vagyunk kíváncsiak. Az alábbi összefüggés az előző tétel egyszerű következménye, természetesen ezt is logikai szitaformulának hívjuk .

4.3. Tétel (Logikai szitaformula, 2.változat): *Ha* $I \neq \emptyset$ *tetszőleges halmaz, melynek* $A_1, ..., A_m \subseteq I$ *tetszőleges részhalmazai* $(m \in \mathbb{N})$, *akkor az*

$$N := I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

jelölés esetén

$$|N| = |I| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \cap A_j| - $$
$$- \sum \sum \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + - ... \tag{4.3}$$
$$+(-1)^m \left| \bigcap_{i=1}^{m} A_i \right|$$

□

4.4.Megjegyzések: A szitaformula lényege, hogy az $A_1, ..., A_m$ részhalmazok kölcsönös metszeteinek méreteiből ki tudjuk számolni az átfedés nélküli egyszeres halmaz (az unió) méretét, jelen esetben elemeinek számát. Más módon is lehet halmazok "méretét" mérni, ezekről a fejezet harmadik részében szólunk bővebben.

A szitaformula alkalmazására példákat a következő alfejezetben, a fejezet végén, a szerző $[SzIs', 97]$ feladatgyűjteményének 4. fejezetében, vagy például Balogh József és Pete Gábor$[BP]$ cikkében találunk.

Megemlítjük még, hogy a részhalmazok elemi metszeteiből is előállíthatók maguk a részhalmazok is, ezeket az 1.3.Fejezetben a *"Véges Boole - algebrák szerkezete"* c. részben vizsgáltuk meg részletesebben.

Könnyen látható, hogy a (4.2) és (4.3) kifejezésekben (képletekben) exponenciálisan sok, azaz $\mathcal{O}(2^m)$ összeadandó tag van, vagyis a *pontos* végeredmény kiszámításához "sok" számítási idő kell. $[KLS]$ -ben polinomiális algoritmust találunk az $\frac{|N|}{|I|}$ hányados *közelítő* értékének kiszámításához.

4.2. Elcserélt levelek

Bár $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményünk 4. fejezetében több feladat részletes megoldása is megtalálható a logikai szitaformula segítségével, néhányat mégis jelen fejezet végén is ismertetünk.

A logikai szitaformulát a klasszikus iskolapéldán, az *"Elcserélt levelek"* problémáján mutatjuk be. Egyrészt, mert e példán jól bemutathatók a módszer mesterfogásai, másrészt a problémát és változatait már több évszázada vizsgálják, amiket szintén megemlítünk.

Lássuk először magát a problémát.

4.5. Elcserélt levelek: *n levelet írtunk n különböző személynek, és megcímeztük a megfelelő n borítékot ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tetszőleges). Hányféleképpen tehetjük a leveleket a borítékokba úgy, hogy egyikük se kapja meg a neki szóló levelet ?*

4.6. Megoldás: A megoldás ötlete az, hogy a *teljesen* rendezetlen elrendezéseket (a levelek borítékokba helyezését) ugyan nehéz (közvetlenül) megszámolnunk, de a keresett halmaz komplementerét (amikor is *valaki* megkapja a saját levelét) már könnyebb.

Hányféleképpen lehet tehát a leveleket úgy a borítékokba rakni, hogy *legalább egy* címzett a saját levelét kapja meg? Kiválasztjuk *egyiküket*, levelét a borítékjába tesszük, a többi levelet pedig már tetszés szerinti sorrendbe rakhatjuk a borítékokba. Ez $n \cdot (n-1)!$ lehetőség. De nyilván (legalább) kétszer számoltuk azon borítékolásokat, amikoris (legalább) két személy kapja meg a saját levelét, ez pedig $\binom{n}{2} \cdot (n-2)!$ lehetőség. A "többször/kevesebbszer számoltuk" problémán pedig a logikai szita (annak is a 4.3.Tételben említett 2.változata) segít. A teljesség kedvéért ideírjuk a Tételben szereplő halmazok "fordítását" :

$I :=$ *az összes borítékolások halmaza,*

$N :=$ *olyan borítékolások halmaza, amikor senki sem kapja meg a sajátját,*

$A_i :=$ *tetszőleges borítékolások halmaza, amikor az i -edik címzett* megkapja *a sajátját.* Ekkor

$A_i \cap A_j =$ olyan borítékolások (halmaza), amikor az i -edik és a i -edik címzett megkapja a sajátját,

$A_i \cap A_j \cap A_k =$ olyan borítékolások (halmaza), amikor az i -edik, j -edik és a k -adik címzett (mindegyike) megkapja a sajátját, s.í.t.

A fentiek és a logikai szitaformula (4.3.Tétel) alapján kapjuk, hogy:

$$|N| = n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \cdot (n-i)! \tag{4.4}$$

azaz

$$|N| = n! \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \quad . \qquad \square \tag{4.5}$$

4.7. Megjegyzések: A problémát angolul **The Hatcheck Problem** -nek ("kalapellenőrzési probléma") hívják, ami érthető: n úriember (gentlemen) a színházi ruhatárba adja le kalapjait, és hányféleképpen eshet meg, hogy egyikük sem kapja vissza a sajátját? Ennek általánosítása, amikor több fajta ruhadarabot is leadnak, egy ilyen típusú eredményt a 4.12.Tételben mutatunk be.

A francia elnevezés **Le probleme des recontres** ("párosítások problémája") egy régi francia kártyajátékra utal: egy 52 lapos kártyacsomag lapjait egy sorba kiterítjük, majd egy másik ugyanilyen csomag lapjait egyesével az előző sor lapjai mellé tesszük. Annyi pontot kapunk, ahány lap a két csomagban megegyezik. Montmort[(1)] francia matematikus vetette fel és oldotta meg először a következő kérdést 1713 -ban: *"Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két csomagot alaposan (véletlenszerűen) megkeverve egyetlen figura sem egyezik meg a két kártyacsomagban ? "*

Bármelyik megfogalmazást is vesszük, lényegében a **fixpont nélküli permutációk** (azaz $\pi(i) \neq i \ \forall i \in Dom(\pi)$) számát keressük. Hiszen a *permutáció* szó hallatán egy véges A halmaz elemeinek sorbarendezése jut eszünkbe, ami persze $|A| = n$, $A = \{a_1, ..., a_n\}$ esetén egy

$$f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

függvény, és az elcserélt levelek problémáját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy hány olyan fenti f függvény van, amelynek nincs **fixpont**ja: olyan $i \leq n$, amelyre $f(i) = i$ lenne.

Angolul szokás az ilyen elrendezéseket **derangements** -nek (kb. "elrendezetlenség") is hívni, ami csak egy szójáték az *arrangement* ("elrendezés") szó tagadása alapján. Ezért is jelölik a 4.5.Probléma megoldását $\mathbf{D_n}$ -nel. Végül megemlítjük még a **szubfaktoriális** elnevezést is, hiszen a 4.9.Állítás alapján $D_n \approx \frac{n!}{e}$.

4.8. Definíció: *Jelölje* $\mathbf{D_n}$ *a 4.5. probléma megoldását, vagyis a* (4.5) *eredmény alapján legyen*

$$D_n := n! \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \quad . \tag{4.6}$$

D_n *-et* **derangement** *-nek vagy* **szubfaktoriális**[(2)] *-nak hívjuk.* □

D_n néhány értékét az alábbi táblázat mutatja:

[1)] Pierre Raymond de Montmort (1678-1719) francia matematikus.
[2)] *faktoriális alatti*, hiszen $D_n < n!$

n	D_n	n	D_n
1	0	7	1.854
2	1	8	14.833
3	2	9	133.496
4	9	10	1.334.961
5	44	11	14.684.570
6	265	12	176.214.841

D_n néhány értéke
4.1. Táblázat

A táblázat alapján *ismét* megfigyelhetjük az értékek szupergyors növekedését, a *"kombinatorikai robbanás"* -t, ami a kombinatorikában gyakori jelenség.

4.9. Állítás: *A* (4.6) *képletek alapján könnyű belátni, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0,367 \quad ,$$

vagyis n levél/kártyalap teljes (fixpont nélküli) összecserélgetésének valószínűsége

$$P_n = \frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e} \approx 0,367 \quad .$$

Ez azt is jelenti, hogy D_n éppen az $\frac{n!}{e}$ -hez legközelebb eső egész szám, azaz

$$D_n \approx \frac{n!}{e} \quad . \qquad \square$$

4.10. Állítás *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ természetes számra érvényes az alábbi rekurzív összefüggés:*

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n \quad . \tag{4.7}$$

Bizonyítás: a (4.6) összefüggés alapján házi feladat. $\square$

Ez utóbbi (4.6) összefüggést *közvetlenül* is megpróbálhatjuk bizonyítani, bár *nem* "sima" házi feladat nehézségű!

Most ismertetjük az eredeti probléma egy Joó Istvántól[3] származó általánosítását, más változatokat Joó István $[J]$ cikkében és a 4.3.Feladatban találhatunk.

4.11. Probléma: *n ember mindegyike m -féle tárgyat ad le a ruhatárba, majd előadás után mindenki m tárgyat kap ugyan vissza, de senki sem kap ℓ -nél több azonos típusú tárgyat (pl.sálat). Mekkora valószínűséggel nem kap vissza senki sem egyetlen saját tárgyat sem egy ilyen szétosztásnál ?*

4.12. Tétel (Joó István $[J]$): *Ha $P(n,m,\ell)$ jelöli a keresett valószínűséget, akkor tetszőleges $n,m,\ell \in \mathbb{N}$ számokra*

$$\lim_{n\to\infty} P(n,m,\ell) = e^{-m} \quad . \quad \square$$

4.3. Additív halmazfüggvények

Mint tudjuk, (rész)halmazok méretét többféleképpen is lehet mérni (számosság, terület, súly, térfogat, integrál, valószínűség, stb.), e mérések közös lényegi tulajdonságait emeli ki és foglalja össze az *additív halmazfüggvény* fogalma. Mivel azonban általában nem minden halmaz mérhető, előbb ezt a fogalmat is tisztáznunk kell.

4.13. Definíció: (i) *Egy tetszőleges (nemüres) X halmaz (ún.alaphalmaz) részhalmazainak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ rendszerét* **halmazalgebrá***nak nevezzük, ha zárt a szokásos halmazműveletekre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ részhalmazok esetén $A \cup B$ és $\overline{A}$ is $\mathcal{A}$ -beliek*[4] :

$$A \cup B, \overline{A} \in \mathcal{A} \tag{4.8}$$

(ii) *A fenti $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer* **$\boldsymbol{\sigma}$ -algebra**, *ha a fentieken túl még a megszámlálható unióra is zárt, azaz ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, akkor*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \, . \qquad \square \tag{4.9}$$

---

[3] 1999 -ben elhunyt fiatal, sokoldalú matematikus, a matematika szinte valamennyi ágában vannak jelentős eredményei.

[4] Mint a 2.fejezetben láttuk, a halmazalgebrák speciális Boole-algebrák.

Megjegyezzük, hogy az (általánosított) De Morgan azonosságok alapján ekkor $\mathcal{A}$ elemeinek metszetére is illetve megszámlálható metszetére is zárt, hiszen

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A} \tag{4.10}$$

és

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{A} \quad . \quad \square \tag{4.11}$$

4.14. Definíció: *Tetszőleges $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazalgebra esetén tetszőleges*

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$$

nemnegatív függvényt **halmazfüggvény***nek nevezünk.*

Továbbá, μ **additív halmazfüggvény** *vagy* **mérték**, *ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazokra (vagyis $A \cap B = \emptyset$)*

$$\mu(A \cup B) = m(A) + m(B) \tag{4.12}$$

Ekkor $\mathcal{A}$ elemeit **(μ -szerint) mérhető halmazok***nak nevezzük.* $\square$

4.15. Példák: Már eddig is számos mértékkel "mértük" a különböző halmazok méretét, az alábbiakban jól- és kevésbé ismert mértékeket sorolunk fel röviden. (Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a példák után szereplő 4.16. Állítás eredményei tehát mindegyik alábbi mértékre teljesülnek!)

(a) Véges halmazok *számossága*: $|A|$.

(b) Síkbeli olyan halmazok, amelyeknek van *terület*ük: T_A .

(c) Térbeli olyan halmazok, amelyeknek van *térfogat*uk: V_A .

(d) Homogén síklemezből kivágott részhalmazok *súly*a: m_A .

(e) Tetszőleges eseménytér eseményeinek *valószínűség*e: $P(A)$.

(f) Legyen $f \geq 0$ tetszőleges pozitív integrálható függvény a rögzített $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon, és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$ legyen olyan $A \subseteq I$ részhalmazok algebrája, amelyekre az $\int_A f$ integrál létezik. Ekkor

$$\mu_f(A) := \int_A f$$

mérték $\mathcal{A}$ -n .

(g) Az (f) és (b) példákat álatalánosító, és az analízisben fontos szerepet játszó *Stieltjes-, Borel-* és *Lebesgue-mértékek* definíciója már túllépi könyvünk kereteit, az érdeklődő Olvasók ezeket bármely felsőbb analízis- vagy mértékelmélet könyvben megtalálják.

(h) A számelméletben játszik fontos szerepet a következő érdekes mérték: Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a természetes számok olyan $A \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazainak halmaza, amelyekre létezik a

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} \tag{4.13}$$

határérték, ahol

$$A \cap n := A \cap \{1, ..., n\} \ ,$$

és konvergens esetben legyen $\mu(A)$ a (4.13) alatti limesz.

(Házi feladat az Olvasónak belátni, hogy $\mathcal{A}$ valóban halmazalgebra és μ valóban mérték $\mathcal{A}$ -n, továbbá $0 \leq \mu(A) \leq 1$ minden $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ mérhető halmazra. Vigyázat: nem csak az $\emptyset$ halmaz mértéke nulla!)

Most lássuk az additív halmazfüggvények néhány (általános) elemi tulajdonságát!

4.16. Állítás: *Tetszőleges* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ *additív halmazfüggvényre*
(i) *ha* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *, akkor*

$$\mu(\emptyset) = 0$$

(ii) μ **végesen additív**, *azaz tetszőleges* $A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$ *páronként diszjunkt halmazokra (*$m \in \mathbb{N}$ *tetszőleges)*

$$\mu(A_1 \cup ... \cup A_m) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_m)$$

(iii) μ **monoton**, *azaz tetszőleges* $A, B \in \mathcal{A}$ *esetén*

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

(iv) Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ *esetén*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Bizonyítás: **(i)** Ha $\emptyset \in \mathcal{A}$, akkor a (4.12) feltétel alapján

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) = 2 \cdot \mu(\emptyset) \ ,$$

ahonnan valóban $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Indukcióval $m \in \mathbb{N}$ -re a (4.12) feltétel felhasználásával.

(iii) Mivel $B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{A}$, ezért, szintén a (4.12) feltétel és μ pozitivitása alapján

$$\mu(B) = \mu\left(A \cup (B \backslash A)\right) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$$

(iv) Ez a 4.1.tétel (4.1) általánosítása tetszőleges μ mértékre.

Mint az előző pontban láttuk, $B \backslash A, A \backslash B \in \mathcal{A}$. Így az $A \cup B$ halmazt felbonthatjuk három diszjunkt halmaz uniójára és alkalmazhatjuk a (ii) pontban igazolt additivitást

$$\begin{aligned}
\mu\left((A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)\right) &= \mu\left(A \backslash B\right) + \mu\left(A \cap B\right) + \mu\left(B \backslash A\right) + \\
&\quad + \mu\left(A \cap B\right) - \mu\left(A \cap B\right) \\
&= \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right) - \mu\left(A \cap B\right)
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Q.E.D. $\square$

4.17. Megjegyzések: (i) Mint említettük, a mérhető halmazok Boole - algebrát alkotnak. Az 1.3. alfejezetben láttuk, hogy végesen generált Boole- algebrák esetén a 1.19.Definíciót követő (1.4) alatt definiált $m_{\vec{\varepsilon}}$ (más jelöléssel $B_{\vec{\varepsilon}}$) halmazok diszjunkt uniói kiadják a generált Boole-algebra elemeit, vagyis (végesen generált esetben) az összes mérhető halmazt. Ebből következik, hogy a $\mu(m_{\vec{\varepsilon}}) = \mu(B_{\vec{\varepsilon}}) \in \mathbb{R}_+$ (nemnegatív) értékeket *tetszőlegesen* megadva az általuk generált halmaz- (Boole-) algebra minden elemének μ szerinti mértéke *egyértelműen* kiszámítható!

(ii) Mint a 4.15. példákban, de különösen a h) példában észrevehetjük, nem csak az $\emptyset$ halmaz mértéke 0. A valószínűségszámításban, számelméletben, analízisben, geometriában és a matematika egyéb ágaiban, a 0 *-mértékű* halmazok általában az elhanyagolható, "semmi" halmazokat jelentik.

(iii) A mértékelméletben, elsősorban a valószínűségszámításban még fontos szerepet játszanak a "mennyiségileg független" halmazok:

Definíció: *Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ mérhető halmazok* **mennyiségileg függetlenek**, ha

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \quad \square$$

(A fogalmat csak az 1.3. fejezetben tárgyalt *minőségi* függetlenséggel való összehasonlítás kedvéért ismertettük.)

Most ismertetjük alfejezetünk fő eredményeit: a 4.2. és 4.3. Tételek általánosításait tetszőleges μ mértékre, bizonyítás nélkül. Az alábbi tételeket meg lehetne fogalmazni az $m_{\overrightarrow{\varepsilon}} = B_{\overrightarrow{\varepsilon}}$ halmazokkal is, legyen ez a csupán technikai átfogalmazás az Olvasó házi feladata.

4.18. Tétel (Logikai szitaformula)**:** *Ha* $A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$ *tetszőleges mérhető halmazok* ($m \in \mathbb{N}$), *akkor*

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_i\right) - \sum \sum_{1\leq i<j\leq m} \mu\left(A_i \cap A_j\right) + \\ &+ \sum \sum \sum_{1\leq i<j<k\leq m} \mu\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - + ... \\ &... + (-1)^{m+1} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)\end{aligned}$$

□

4.19. Tétel (Logikai szitaformula, 2. változat): *Ha* $A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$, $A_i \subseteq I$ *tetszőleges mérhető halmazok* ($m \in \mathbb{N}$) *és*

$$N = I \backslash \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad ,$$

akkor

$$\begin{aligned}\mu\left(N\right) &= \mu(I) - \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_i\right) + \sum \sum_{1\leq i<j\leq m} \mu\left(A_i \cap A_j\right) - \\ &- \sum \sum \sum_{1\leq i<j<k\leq m} \mu\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + - ... \\ &... + (-1)^{m} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \qquad \square\end{aligned}$$

A logikai szitaformula alkalmazásaira több példát látunk még a feladatok között – mind az alábbi alfejezetben, mind a $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményben. Ezenkívül felhasználhatjuk még például gráfok csúcsszínezéseinek számának meghatározásához is (lásd $[HHM]$), vagy részben rendezett halmazokra[5] is meg lehet fogalmazni, erről Balogh József-Pete Gábor $[BP]$ cikkében és Lovász László $[L]$ könyvében olvashatunk.

[5] antiszimmetrikus és tranzitív bináris (kétváltozós) relációk (angolul *ordered sets*).

4.4. Feladatok

4.1. Feladat: Egy évfolyam 67 hallgatóból áll. 47 fő beszél angolul, 35 németül, 23 mindkét nyelven. 20 beszél franciául, 12 angolul és franciául, 11 németül és franciául. 5 fő beszél mind a három nyelven. Hányan nem beszélnek egy nyelven sem az előbbi 3 nyelv közül?

4.2. Feladat: Öt levelet hányféleképpen lehet úgy kézbesíteni, hogy pontosan 1 ember kapja meg a sajátját?

4.3. Feladat: r különböző tárgyat hányféleképpen lehet szétosztani $n+p$ ember között úgy, hogy az első n ember mindegyikének legalább 1 tárgy jusson?

4.4. Feladat: Igazoljuk a

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$$

összefüggést minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ természetes szám esetén !

4.5. Feladat: Hány szürjektív függvény van két adott véges halmaz között?

4.6. Feladat: **a)** Hányféleképpen lehet kiosztani 6 játékot 4 gyerek között úgy, hogy minden gyerek legalább egy játékot kapjon?

b) Hányféleképpen lehet kiosztani 7 feladatot 5 dolgozó között úgy, hogy minden dolgozó legalább egy feladatot kapjon, és a legnehezebb feladatot a legjobb dolgozó kapja?

4.7. Feladat: Határozzuk meg a $B \to A$ szürjektív függvények számát az $|A| = 1$, $|A| = 2$, $|B| = |A|$, $|B| = |A| + 1$ és a $|B| = |A| + 2$ speiális esetekben !

4.8. Feladat: Legyenek $M, n \in \mathbb{N}$ adott természetes számok. Hány M -nél nem nagyobb, n -hez relatív prím természetes szám van? (Két természetes szám **relatív prím**, ha legnagyobb közös osztójuk 1.)

Megemlítjük, hogy $M = n$ esetén az úgynevezett **Euler-féle φ függvény**-t kapjuk: $\varphi(n)$ jelöli az n -nél kisebb, n -hez relatív prím számok számát.

4.9. Feladat: Határozzuk meg a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot i^k$$

kifejezés értékét k függvényében!

4.10. Feladat: Fejtsük ki a következő polinomot:

$$\prod_{i=1}^{r}(1-x_i) \ .$$

4.5. Megoldások

4.1. Feladat: $67 = N + (47+35+20) - (23+12+11) + 5 \Rightarrow N = 6 \quad .$

4.2. Feladat: $5 \cdot D_4 = 45$

4.3. Feladat: Az összes szétosztás száma $(n+p)^r$, i kijelölt ember $(n+p-i)^r$ esetben nem kap egyetlen tárgyat sem, így a szitaformula alapján a megoldás

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n+p-i)^r \quad .$$

4.4. Feladat: Házi feladat a (4.6) összefüggés alapján.

4.5. Feladat: Legyen tehát $|B| = m$, $|A| = n$, és a $B \to A$ szürjektív függvényeket akarjuk összeszámolni. Természetesen szükséges hogy $|B| \geq |A|$ legyen, azaz $m \geq n$. Mivel a *nemszürjektív* tulajdonságot könnyebb biztosítani, mint a ráképezést, ezért szitaformula 4.3.Tétel -beli változatát használjuk. Vagyis legyen

$$I :=^B A := \{f\colon B \to A \mid f \text{ függvény } \}$$

és $A = \{a_1, ..., a_n : i < n\}$ esetén

$$A_i := \{f \in {}^B A \mid a_i \notin Im(f)\} \ ,$$

valamint

$$N = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad .$$

Ekkor N éppen a szürjektív függvények halmaza, és a 4.3.Tétel (4.2) képlete szerint

$$n^m = |N| + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^m \ ,$$

vagyis, ha $\mathbf{S(m,n)}$ jelöli a keresett mennyiséget, akkor

$$S(m,n) = |N| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^m \ . \tag{4.14}$$

Az alábbi táblázatban megadjuk $S(m,n)$ néhány értékét:

$_m\backslash^n$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0
6	1	62	540	1,560	1,800	720	0
7	1	126	1,806	8,400	16,800	15,120	5,040
8	1	254	5,796	40,824	126,000	191,520	141,120
9	1	510	18,150	186,480	834,120	1,905,120	2,328,480
10	1	1,022	55,980	818,520	5,103,000	16,435,440	29,635,200

$S(m,n)$ néhány értéke
4.2. Táblázat

4.6. Feladat: a) $S(6,4) = 1560$
b) $S(6,5) + S(6,4) = 3360$

4.7. Feladat: A 4.2.Feladat számolásai nélkül is belátható, hogy

$$S(m,1) = 1 \ , \quad S(m,2) = 2^m - 2 \ , \quad S(m,m) = m! \quad ,$$

továbbá

$$S(n+1,n) = n \cdot \binom{n+1}{2} \cdot (n-1)!$$

és

$$\begin{aligned} S(n+2,n) &= n \cdot \binom{n+2}{3} \cdot (n-1)! + n \cdot \binom{n+2}{2}(n-1) \cdot \binom{n}{2} \cdot (n-2)! = \\ &= n! \left[\binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{2} \cdot \binom{n}{2} \right] \end{aligned}$$

4.8. Feladat: Ha n különböző prímosztói $p_1, ..., p_r$, akkor

$$M = P + \sum_{s=1}^{r}\left((-1)^s \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_s\le r\\ \text{különbözőek}}} \left[\frac{M}{p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}\right]\right)$$

ahol P a keresett relatív prím számok száma és $[\mathbf{x}]$ jelöli az x valós szám egészrészét, azaz a tizedesjegyek levágása után kapott egész számot.

Például, az $n = 210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ speciális esetben:

$$\begin{aligned} M &= P + \left(\left[\frac{M}{2}\right] + \left[\frac{M}{3}\right] + \left[\frac{M}{5}\right] + \left[\frac{M}{7}\right]\right) - \\ &\quad - \left(\left[\frac{M}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{M}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{M}{2\cdot 7}\right] + \left[\frac{M}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{M}{3\cdot 7}\right] + \left[\frac{M}{5\cdot 7}\right]\right) + \\ &\quad + \left(\left[\frac{M}{2\cdot 3\cdot 5}\right] + \left[\frac{M}{2\cdot 3\cdot 7}\right] + \left[\frac{M}{2\cdot 5\cdot 7}\right] + \left[\frac{M}{3\cdot 5\cdot 7}\right] + \right) - \\ &\quad - \left[\frac{M}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right] \end{aligned}$$

és például $M = 10000$ esetén $10000 = P + 11761 - 4807 + 808 - 47$ ahonnan $P = 2285$.

$M = n$ esetén kapjuk az Euler-féle φ függvényt, aminek egy *másik* alakja

$$\varphi(n) = n\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) .$$

Megjegyezzük, hogy Eratoszthenesz szitája segítségével is kiszámolhatjuk a keresett mennyiséget, de ez a módszer nem ad zárt formulát a relatív prím számok számára vagy $\varphi(n)$ értékére.

4.9. Feladat: A keresett mennyiség

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\binom{n}{i}\cdot i^k = \begin{cases} 0 & ha \quad 0\le k<n \\ n! & ha \quad k=n \end{cases}$$

Az eredményt nem csak a logikai szitaformulával, hanem az $f(x) := (1+x)^n$ függvény többszöri deriválásával is megkaphatjuk.

4.10. Feladat:

$$1-\sum_i x_i+\sum_i\sum_j x_ix_j-\sum_i\sum_j\sum_k x_ix_jx_k+-\ ...\ +(-1)^r x_1...x_r$$

4.6. Hivatkozások

[BP] Balogh József, Pete Gábor: *Egy ötlet: A szita formula*, Polygon VII. (1997), 89-93.old.

[HHM] Harris,Hirst,Mossinghoff: *Combinatorics and Graph Theory,* Springer Verlag, 2000.

[J] Joó István: *Egy elemi kombinatorikai probléma*, Matematikai Lapok, 1993, 15.-18. old.

[L] Lovász László[(6)]: *Combinatorial Problems and Exercises,* Akadémiai Kiadó, Budapest és North-Holland, Amsterdam, 1979.

Magyar nyelven: *Kombinatorikai problémák és feladatok,* Typotex kiadó, 1999.

[P] Penrice,S.G.: *Derangements, Permanets and Christmas Presents*, The Mathematical Monthly, 1991, pp. 617-620

[KLS] Kahn,J.,Linial,N.,Samorodnitsky,A.: *Inclusion-Exclusion: Exact and Appropriate,* Combinatorica, 16 (1996), pp. 465-477.

[6)] Lovász László fő kutatási területe gráfelmélet, kombinatorika, algoritmusok elmélete, számítástudomány, korábban a szegedi JATE és a budapesti ELTE tanszékvezető professzora, ma a MTA rendes tagja és Yale University (USA) Számítástudományi Tanszékének professzora.

5. fejezet

Rekurzív sorozatok

Rekurzív sorozatok. Az iterációs módszer. A kezdeti értékek megválasztásának problémája. Állandó együtthatójú lineáris homogén és inhomogén rekurziók kapcsolata, a klasszikus módszer egydimenziós sorozatokra. Vandermonde determináns. Szimultán (többdimenziós) lineáris rekurziók.

Nagyon sok esetben nehéz (vagy lehetetlen) egy kombinatorikai kérdést általánosan, az adatok számának függvényében közvetlenül meghatározni, de a különböző méretű feladatok megoldásai között összefüggéseket tárhatunk fel. Jelölje n méretű adathalmaz esetén $a_n = a(n)$ a keresett kombinatorikai mennyiséget n függvényében. Ha a talált összefüggésünk módot ad a (nagyobb méretű) feladat megoldására a kisebb méretűek ismeretében, azaz

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., n) \tag{5.1}$$

alakban tudjuk felírni, akkor a kisebb feladatok eredményeinek (pl. $a_1, ..., a_k$) ismeretében sorban ki tudjuk számolni az összes a_n értéket minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén.[1] A fenti (5.1) egyenlőséget *implicit* egyenletnek is nevezhetjük, mert mond ugyan feltételt a sorozat tagjaira, de nem közvetlenül látjuk az értékeket. Megjegyezzük, hogy fizikai, biológiai, közgazdasági, stb. folyamatok leírásának is hasznos eszköze a számszerű összefüggések rekurzív felírása. A téma fontosságát az is jelzi, hogy külön (matematikai) tudományos folyóirata is van: Journal of Difference Equations $[JDE]$, az elmélet alapjait

[1] aki a Teljes indukció vagy az önmagukat rekurzíve meghívó részprogramok (eljárások) egy *nagyon távoli* rokonát véli felfedezni a rekurzív összefüggésekben, nem jár rossz úton.

Mickens $[M]$ könyvében ismerhetjük meg. Két egyszerűbb tipikus kérdést az 5.7. és 5.8. Feladatokban ismertetünk ($[Sz1]$ és $[Sz2]$ alapján).

Ha teljes általánosságában akarjuk vizsgálni a rekurzív összefüggéseket, akkor még azt sem állíthatjuk, hogy F függvény, hiszen például az

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

vagy hasonló összefüggések is felmerülhetnek a gyakorlatban (ld. pl. az 5.2. Feladatot). Így az általános definíciót csak az alábbi módon tudjuk megfogalmazni:

5.0. Definíció: *Tetszőleges* $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *függvény és* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *sorozat esetén az*

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., n) \tag{5.2}$$

egyenlőséget **rekurzív összefüggés***nek* (vagy **rekurzió***nak*) *nevezünk. Adott tetszőleges* A_1, ..., $A_k \in \mathbb{C}$ *komplex számok és (rögzített)* $k \in N$ *szám esetén az*

$$a_1 := A_1, \ \ldots \ , a_k := A_k$$

egyenlőség rendszert **kezdeti érték problémá***nak* **(k.é.p.)** *nevezünk*. □

Megjegyzések: (i) Nyilvánvalóan $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^*$ és $\mathbb{N}^k \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{C}^*$, vagyis a fenti definíció azt az esetet is megengedi, ha F függvény és/vagy az (a_n) sorozat természetes számokból áll. Bár kombinatorikai alkalmazásoknál csak természetes számok jöhetnek szóba, vagyis $(a_n) \subset \mathbb{N}$, de mint látni fogjuk, számításainkban komplex számok is megjelennek (amik a végeredményben eltűnnek), ezért már a fenti definícióban és az alábbiakban is mindenhol komplex számokról beszélünk. Így például az (a_n) sorozatról is megengedhetjük, hogy komplex számokból álljon.

(ii) Nem árt, ha pontosítjuk: definíciónk szerint a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza a 0 -át is tartalmazza. Azonban minden sorozatnál (elsősorban kombinatorikai jelentése vagy a rekurzív összefüggés használhatósága miatt) arra is ügyeljünk, hogy sorozat számozása honnan indul! Mi általában 1 -el vagy 0 -val indítjuk sorozatainkat, szokás azonban a $-k$, $-(k-1)$, ..., -1 indexű tagokról is beszélni (elsősorban a kezdeti érték probléma miatt, mint például a $[JDE]$ folyóiratban).

(iii) Az *iteráció* speciális rekurzív összefüggés: az (13.1) egyenletben szereplő F függvény $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}$ alakú, azaz *véges rendű* rekurzióról van szó. (Lásd az alábbi definíciót!) ”Rekurzív összefüggések” helyett gyakran (helytelenül) ”rekurzív sorozatok”-ról is beszélnek, ami azért nem helyes teljesen, mert nyilván más egy $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sorozat, és más a tagok közötti (13.1) összefüggés.

5.1. Definíció: *Az* (13.1) *rekurzív összefüggés* **k -adrendű** *valamely* $k \in \mathbb{N}$ *természetes számra, ha*

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}, n)$$

alakban írható, de nem *írható*

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k+1}, n)$$

alakban. *A rekurzió (rekurzív összefüggés)* **véges rendű** *ha létezik fenti tulajdonságú* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám.* $\square$

Könnyen belátható, hogy k -adrendű rekurziók esetén elég pontosan a sorozat első k db elemét, az $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ számokat megadni (k.é.p.) ahhoz, hogy a sorozat összes eleme egyértelmű legyen.

A jólismert $n!$, kamatos kamat, S_n (számtani/ mértani összegképletek), $\mathcal{P}(X)$ (hatványhalmaz) ... példákat most nem részletezzük. A fejezet végén felsorolunk néhány nevezetes (fontos, meglepő) rekurzív összefüggést és alkalmazásukat.

5.2. Példa: (Fibonacci sorozat[2],[3]): *Hány nyúlpárunk lesz az* n *-edik hónapban, ha az első hónapban* 1 *nyúlpárunk van, és minden hónapban mindegyik, legalább* 2 *hónapos nyúlpár* $1-1$ *nyúlpárat fial, ha veszteség (elhullás) nem lép fel?*

Megoldás: Könnyen ellenőrizhető, hogy az első hónapokban $1, 1, 2, 3, 5, ...$ nyúlpárunk lesz. Vegyük észre, hogy minden hónapban a nyulak száma nem

---

[2] Bonacci fia (*filius*), eredeti nevén *Leonardo Pisano* (1170-1250, más források szerint 1180-1228) olasz matematikus, többek között a *Liber Abaci* (Könyv az abakuszról) c., 1202-ben megjelent művében hathatósan közreműködött a hindu-arab tízes számrendszernek Nyugat-Európában való elterjesztésében, ”nyúlproblémája” is e könyvben jelent meg.

[3] a Fibonacci-sorozat rengeteg érdekes tulajdonsággal, összefüggéssel rendelkezik (ld.pl. a 5.4. Feladatban a fejezet végén), továbbá a természetben is szinte *mindenhol* felbukkan, nem csak kombinatorikai feladatokban (nem csak a ”nyulas” feladatra gondolhatunk). Egy érdekes alkalmazást az 5.3. alfejezet végén említünk.

más, mint az előző havi állomány + a szaporulat, ez utóbbi pedig a legalább 2 hónapos, azaz már 2 hónappal ezelőtt már meglévő nyúlpárok száma. Vagyis, ha f_n jelöli az n -edik hónapban levő nyúlpáraink számát, akkor az

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n > 2) \tag{5.3}$$

összefüggést kapjuk, és az

$$f_1 = f_2 = 1 \tag{5.4}$$

feltételről se feledkezzünk meg [4]. □

A későbbiekben (pl. a generátorfüggvény - módszernél) szükségünk lesz a sorozat 0-adik tagjára. Az $f_0 := 0$ választással még az (5.3) rekurzió is érvényben marad, gyakorlati jelentésén most nem vitatkozunk.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy (13.1) típusú rekurzív összefüggést "feloldani", azaz

$$a_n = a(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

alakú, ún. *explicit* összefüggést találni, ahol persze $a(n)$ egy általunk "olvasható" függvény (pl. képlet), az (13.1) *implicit* rekurzív összefüggés alapján.

Elárulhatjuk ugyan, hogy a Fibonacci sorozat (explicit) képlete, az úgynevezett *Binet-formula*[5]

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \;, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.5}$$

amit teljes indukcióval bárki könnyedén igazolhat. Már az is meglepő, legalábbis első olvasásra, hogy egy egyszerű rekurzív összefüggést, mint (5.3) -t kielégítő, természetes egész számokból álló sorozat képlete ilyen "szörnyű"!? Ha fenti képletben szereplő hatványokat a binomiális tétel alapján kifejtjük, könnyen beláthatjuk, hogy az irracionális tagok ($\frac{1}{\sqrt{5}}$ jóvoltából) kipotyognak, vagyis a képlet egész számot ad.

---

[4] a szakirodalom nem egységes a Fibonacci - sorozat számozását illetően (sem), néha az $f_0 = f_1 = 1$ feltétellel is találkozhatunk, az (5.3) rekurzió meg tartásával. Bár ez csak a sorozat átszámozása (*shift*), legyünk mégis mindig óvatosak, mert így a különböző könyvekben található formulák ellentmondhatnak egymásnak.

[5] Jacques Ph.M. Binet (1786-1856) francia matematikus

Bennünket azonban jobban érdekel: hogyan lehet a (fentihez hasonló) explicit képleteket *megtalálni*? Az (13.1) alakú rekurzív összefüggésekre *általános*, minden esetre kiterjedő módszer nincs, csak bizonyos típusaikra, amely módszereket a jelen és a következő fejezetekben ismertetünk. Megnyugtatjuk az Olvasót, hogy a módszerek a gyakorlatban felmerülő esetek zömére megoldást adnak. Már csak annyit jegyzünk meg, hogy a Fibonacci sorozatra kapott fenti "szörnyű" képlet az (5.2.2) alfejezetben ismertetett módszer (a "második ránézés" után) már egyáltalában nem lesz olyan meglepő! Kérjük a kedves Olvasót, olvasson tovább! (A Fibonacci-sorozattal az 5.2. alfejezet végén az 5.14. Példában és a következő fejezet 6.1. alfejezetében foglalkozunk.)

Bemelegítésként kezdjük egy olyan módszerrel, ami a gyakorlatban néha segít ("működik"), néha nem.

5.1. Az iterációs módszer

Hangsúlyozzuk, hogy az alábbi módszer elméletben ugyan egyszerű, de a gyakorlatban csak ritkán alkalmazható.

Módszer: Ha az (13.1) rekurzív összefüggés minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén teljesül, akkor persze az $n-1$ indexre is:

$$a_{n-1} = F(a_{n-2}, a_{n-3}, ..., n-1) \ , \tag{5.6}$$

vagyis ez utóbbi összefüggést (13.1) -be beírva, esetleg a műveletet többször megismételve hátha egyszerűbb összefüggést kapunk az (a_n) sorozatra, talán még explicit képletet is: A módszer általános alakja

$$\begin{aligned} a_n &= F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., n) \\ &= F\left(F(a_{n-2}, a_{n-3}, ..., n-1), a_{n-2}, ..., n\right) \\ &= ... \end{aligned}$$

eléggé bonyolultnak látszik, és valóban, a módszer csak néha segít. □

5.3. Példa (Hanoi tornyai)**:** *Egy deszkalapra három rudat rögzítettünk függőlegesen. Egyikükre n (közepén lyukas) különböző átmérőjű korongot húztunk sorrendben: legalul van a legszélesebb, legfelül a legkisebb átmérőjű, $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített szám. Feladatunk az összes korongot egy másik rúdra húzni, a harmadik rúd segítségével, azonban minden lépésben csak egy* *korongot tehetünk át egyik rúdról a másikra, és szélesebb korongot sohasem tehetünk kisebb átmérőjű korongra. Hány lépésben tehetjük ezt meg? Adjunk meg algoritmust is a feladatra!*

Megoldás: Javasoljuk az Olvasónak, hogy előbb gondolkozzon el a feladaton, próbáljon rekurzív összefüggést vagy (rekurzív) algoritmust találni a feladatra, és csak utána olvassa el megoldásunkat alább!

Megjegyzés: Egy ősi legenda szerint Hanoiban szerzetesek rakosgatják a 64 arany korongot három rúdon a fenti szabályok szerint, másodpercenként egy-egy korongot tesznek át. Amikor mind a 64 -et a helyére rakták, eljön a világ vége ... . Az Olvasót megnyugtathatjuk: ez pontosan $2^{64} - 1$ másodperc, azaz körülbelül 586 milliárd év múlva fog bekövetkezni (persze attól a pillanattól számítva, amikor a szerzetesek elkezdték a munkát ...).

Most pedig nézzük a feladat megoldását.

Jelölje h_n az n korong áthelyezéséhez szükséges lépések számát, $n \geq 1$. Nyilván

$$h_1 = 1 \quad .$$

Nevezzük el most a három rudat START, CÉL és SEGÉD -nek. Ekkor a START rúdon levő $n + 1$ korong áthelyezését (például) a következő módon tehetjük meg. Először a legfelső n korongot áttesszük a SEGÉD rúdra, a CÉL rúd segítségével, pl. a már n korongra kitalált algoritmussal, ez h_n lépés. Majd 1 lépésben a legnagyobb korongot áttesszük a CÉL rúdra, és végül ismét h_n lépésben a SEGÉD rúdon levő maradék n korongot h_n lépésben áthelyezzük a CÉL rúdra, a START rúd segítségével. Vagyis

$$h_{n+1} = 2 \cdot h_n + 1 \tag{5.7}$$

lépés *elegendő* a feladat megoldásához. Kevesebb nem is elég, hiszen a legnagyobb korong megmozdítása előtt az n kisebb korongot le kell emelnünk róla, amit az indukciós feltétel szerint csak h_n lépésben tudunk megtenni, a $+1$ lépésre is szükségünk van a legnagyobb korong áttevéséhez, és az utolsó h_n lépés szükségessége is nyilvánvaló.

No, és mennyi h_n értéke, azaz az *explicit* képlet?
Az iterációs módszer szerint

$$\begin{aligned} h_n &= 2 \cdot h_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2h_{n-2} + 1) + 1 = 4h_{n-2} + 2 + 1 = \\ &= 4 \cdot (2h_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 8h_{n-3} + 4 + 2 + 1 = \\ & \ldots \\ &= 2^{i-1} \cdot (2h_{n-i} + 1) + 2^{i-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1 \qquad (i < n) \ . \end{aligned}$$

Ez utóbbi állítást a becsületes Olvasó teljes indukcióval bebizonyítja minden $i < n$ indexre, ami alapján ($i = n-1$ választással) kaphatjuk az

$$h_n = 2^{n-1} \cdot h_1 + 2^{n-1} + ... + 2^2 + 2 + 1$$

vagyis a

$$h_n = 2^n - 1 \tag{5.8}$$

összefüggést, a mértani sorozat összegképlete alapján, mivel $h_1 = 1$.

Megemlítjük még, hogy a következő fejezetben, a generátorfüggvény módszerrel is megvizsgáljuk a h_n sorozatra adott (5.7) rekurziót, ami alapján (többek között) kapjuk, hogy a h_n sorozat a

$$h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-2} \tag{5.9}$$

lineáris *homogén* rekurziót (ld. az 5.5 Definíciót) is kielégíti.

Az iterációs módszerrel oldhatjuk meg például a fejezet végén szereplő 5.3. feladatot is.

5.2. Lineáris rekurziók

A rekurzív összefüggések nagy része az alábbi típusba sorolható, és elemi módszerekkel meg is oldható.

5.4. Definíció: (i) *Tetszőleges rögzített* $(d_1(n)), ..., (d_k(n)), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *komplex számsorozatok*[6] *esetén az*

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} + b_n \qquad (n > k) \tag{5.10}$$

alakú rekurzív összefüggéseket, ahol $k \in \mathbb{N}$ *rögzített természetes szám,* **k-adrendű lineáris** *rekurzióknak nevezzük. A rekurzió* **homogén** *ha* $b_n = 0$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén (0-sorozat), más esetben* **inhomogén.**

(ii) *A fenti rekurzió* **állandó együtthatós** *(vagy –* **együtthatójú***) ha* $d_1, ..., d_k \in \mathbb{C}$ *komplex számok, azaz*

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} + ... + d_k \cdot a_{n-k} + b_n \qquad (n > k) \tag{5.11}$$

[6] Eddig ugyan a valós (komplex) sorozatokat $(a_n) \subset \mathbb{R}$ (ill. $(a_n) \subset \mathbb{C}$) jellel jelöltük, most azonban célszerűbb az $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ill. $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ jelölés, hiszen most az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ill. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *vektorterek* elemeiként tekintjük őket.

alakú (és szintén lehet homogén vagy inhomogén). □

Például a Fibonacci sorozat (5.3) egyenlete és a Hanoi tornyainak (h_n) sorozatára kapott (5.9) rekurzió másodrendű állandó együtthatójú homogén, míg a (h_n) sorozat eredeti (5.7) egyenlete elsőrendű állandó együtthatójú inhomogén, az $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ rekurzió harmadrendű!

A rekurziók feloldási algoritmusát később ismertetjük (az alfejezet végén), előtte hasznos lesz általánosan megvizsgálnunk algebrai szempontból a lineáris rekurzív egyenleteket, majd utána ismertetjük az (elemi) módszert az állandó együtthatójú homogén egyenletekre. A módszer általánosítása módot ad speciális *szimultán (többdimenziós) lineáris* állandó együtthatójú homogén rekurzív egyenletek feloldására is (ld. az (5.4) alfejezetben).

5.2.1. Algebrai összefüggések

Most vizsgáljuk meg a tetszőleges rögzített $(d_1(n))\ , ...,\ (d_k(n))\ ,\ (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ komplex számsorozatok és $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} + b_n \qquad (n > k)$$

inhomogén lineáris és a *hozzá tartozó*

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} \qquad (n > k)$$

homogén lineáris rekurzív egyenleteket algebrai szempontból. (Emlékeztetjük az Olvasót, hogy $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ jelöli a komplex számokból álló összes (a_n) sorozat vektorterét, a szokásos elemenkénti összeadásra és szorzásra nézve).

5.5. Tétel: *Tetszőleges rögzített* $(d_1(n))\ , ...,\ (d_k(n)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *komplex számsorozatok és* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén az*

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} \qquad (n > k) \tag{5.12}$$

alakú lineáris homogén rekurzív egyenletet kielégítő összes sorozat

$$\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

halmaza k *-dimenziós altere* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *-nek.*

Bizonyítás: Az (5.12) egyenlet homogenitásából könnyen belátható, hogy $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, vagyis altere $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -nek. Más szavakkal,ha az (a_n) és (b_n) sorozatok kielégítik az (5.12) egyenletet,akkor az $(a_n + b_n)$ és a (λa_n) sorozatok is kielégítik (5.12)-t.

Dimenziója pedig azért k, mert pl. az alábbi módon könnyen megadhatjuk egy k elemű $B := \{\ \mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid i = 1, ..., k\ \}$ bázisát, ahol az $\mathbf{a}_i = (a_n^{(i)})$ sorozatok mind kielégítik az (5.12) egyenletet, vagyis elemei lesznek $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k}$ -nak, az alábbiak szerint.

Legyen rögzített $i = 1, ..., k$ esetén az $(a_n^{(i)})$ sorozat első k eleme mind 0, kivéve az i -edik, ami legyen 1, majd $n > k$ esetén definiáljuk $a_n^{(i)}$ értékét az (5.12) egyenlőség segítségével. Jólismert lineáris algebrai (házi-) feladat (HF), hogy ekkor az $(a_n^{(i)})$ sorozatok lineárisan függetlenek.

Továbbá, B generátorrendszer, ugyanis ha $(c_n) \in \mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k}$ egy tetszőleges, (5.12) -et kielégítő sorozat, akkor, (5.12) homogenitását újra felhasználva kapjuk, hogy

$$(c_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \mathbf{a}_i \quad ,$$

ahol $c_1, ..., c_k$ a (c_n) sorozat első k eleme. $\square$

A homogén és inhomogén rekurzív egyenletek megoldáshalmazainak alább (az (5.18) egyenlőségben) bemutatandó kapcsolata mindenhol felbukkan a lineáris algebrában, ahol homogén és inhomogén egyenletekről van szó, például lineáris numerikus- és függvény- (differenciál-) egyenletek és rendszereknél. Az összefüggés pontos megfogalmazásához néhány jelölésre lesz szükségünk.

5.6. **Definíció:** *Tetszőleges rögzített* $(d_1(n))$, ..., $(d_k(n))$, $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *komplex számsorozatok és* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén jelölje*

$$\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,...,d_k,b_n} \tag{5.13}$$

az

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} + b_n \qquad (n > k) \tag{5.14}$$

inhomogén lineáris rekurzív egyenlet "**inhomogén általános (megoldását)",** *azaz az egyenletet kielégítő összes* $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sorozat halmazát, míg*

$$\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k} \tag{5.15}$$

jelölje a fenti (5.14) *egyenlethez tartozó*

$$a_n = d_1(n) \cdot a_{n-1} + ... + d_k(n) \cdot a_{n-k} \qquad (n > k) \tag{5.16}$$

lineáris homogén rekurzív egyenlet "**homogén általános** (**megoldásá**t)", *azaz a fenti egyenletet kielégítő összes sorozat halmazát, végül* legyen

$$(\mathbf{s}_n^{Part}) \quad \in \quad \mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n} \tag{5.17}$$

egy tetszőleges rögzített, az (5.14) *egyenletet kielégítő sorozat, az inhomogén egyenlet úgynevezett* **partikuláris** (*vagy* speciális) **megoldása**. □

Ekkor a következő összefüggés teljesül:

5.7. Tétel: *Tetszőleges rögzített* $(d_1(n))\,, \dots,\ (d_k(n))\ ,\ (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *komplex számsorozatok,* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám, és az előző definíció jelölései esetén fennáll az*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n} &= \mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k} + (\mathbf{s}_n^{Part}) = \\ &= \{\ (a_n) + (\mathbf{s}_n^{Part})\ :\ (a_n) \in \mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k}\ \} \end{aligned} \tag{5.18}$$

egyenlőség.

Vagyis $\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n}$ már nem altere $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -nek, hanem az $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k}$ altér eltoltja az $(\mathbf{s}_n^{Part})$ vektorral. Szokás a fenti (5.18) egyenlőséget úgy is olvasni, hogy

"Inhomogén általános = Homogén általános+Inhomogén partikuláris"

*(*mármint *megoldás)*, amint ezt pl. már a lináris egyenletrendszerek elméletében is tapasztaltuk.

Bizonyítás: Az (5.16) egyenlet homogenitását és az $(\mathbf{s}_n^{Part})$ sorozat definícióját felhasználva könnyen beláthatjuk, hogy $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k} + (\mathbf{s}_n^{Part})$ minden eleme kielégíti az (5.14) egyenletet, azaz eleme $\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n}$ -nak; másrészt, $\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n}$ *két* tetszőleges elemének különbsége kielégíti az (5.16) egyenletet, vagyis eleme $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k}$ -nek, vagyis $\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\dots,d_k,b_n}$ minden eleme valóban

$$(a_n) + (\mathbf{s}_n^{Part}) \qquad \big((a_n) \in \mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\dots,d_k}\big)$$

alakú. □

A fenti eredmény szerint tehát elegendő a homogén egyenlet általános (összes) és az inhomogén egyenlet egyetlen (partikuláris), de bármelyik megoldását megkeresnünk. A következő alfejezetben a homogén egyenletek megoldására adunk általános módszert, inhomogén egyenletek megoldása vagy a következő fejezetben bemutatandó *generátorfüggvény* módszert, vagy egyedi megoldási ötleteket tudunk ajánlani.

5.2.2. Állandó együtthatójú egyenletek

Jelen alfejezetben egy elemi módszert, az ún. *klasszikus módszert* ismertetjük az állandó együtthatójú homogén lineáris rekurzív egyenletek feloldására, vagyis az explicit képlet megtalálására. Megjegyezzük azonban, hogy a következő fejezetben ismertetett *generátorfüggvény* módszer (ami ugyan sokkal általánosabb és hatékonyabb a jelen alfejezetben bemutatott, speciálisabb módszernél), szintén alkalmazható e speciális (állandó együtthatójú homogén lineáris) rekurziókra, és bár a jelen alfejezet módszere sokkal "érthetőbb" és "egyszerűbb" a generátorfüggvénynél, *mégis érdemes* mindkét módszert áttanulmányozni, még ezen speciális rekurziók esetében is, mert éppen eredményeik különböző stílusa miatt részletesebb képet kapunk a rekurziók és a rekurzív sorozatok szerkezetéről, viselkedéséről. Már most hangsúlyozzuk azonban, hogy míg a jelen módszerrel a rekurzió *általános* megoldását kaphatjuk meg, vagyis a kezdeti érték problémára *nincs* szükségünk, addig a generátorfüggvény módszer *csak* adott kezdeti érték problémához tartozó megoldásokat ad, k.é.p. hiányában "el sem indul". (A generárorfüggvény módszer egyébként *nemlineáris* rekurziók kezelésére is hatékony eszköz.)

Legyenek tehát adottak a $d_1, ..., d_k \in \mathbb{C}$ komplex számok ahol $k \geq 1$ tetszőleges, és keressük a

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} + ... + d_k \cdot a_{n-k} \qquad (n > k) \tag{5.19}$$

állandó együtthatójú lineáris homogén k -adrendű rekurzió általános megoldását, azaz összes megoldásának explicit képletét.

Bemelegítésképpen tekintsük a $k = 1$ esetet:

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} \quad ,$$

ami éppen a mértani sorozat, jólismert általános alakja pedig

$$a_n = a_1 \cdot (d_1)^{n-1} \quad ,$$

ahol a_1 a sorozat legelső eleme, ezt a kezdeti érték probléma (k.é.p.) adja majd meg.

Ötlet: a fenti eredmények alapján keressük az (5.19) egyenletet kielégítő (a_n) sorozatokat

$$a_n := c \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alakban, valamely $c, q \in \mathbb{C}$ komplex számokra. Visszaírva az (5.19) egyenletbe kapjuk, hogy

$$c \cdot q^n = d_1 \cdot c \cdot q^{n-1} + ... + d_k \cdot c \cdot q^{n-k} \qquad (n > k) \ . \tag{5.20}$$

Feltehetjük, hogy $c, q \neq 0$, hiszen (0), az (azonosan) 0 -sorozat nyilvánvalóan megoldása az (5.19) egyenletnek (mert hiszen $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k}$ altér) és mi most nyilván a (0) sorozattól különböző megoldásokat keressük. Így az egyenletet $c \cdot q^{n-k}$ -val egyszerűsítve és rendezve a

$$q^k - d_1 \cdot q^{k-1} - ... - d_{k-1} \cdot q - d_k = 0 \tag{5.21}$$

algebrai egyenletet kapjuk. A fenti (5.21) egyenletet az (5.19) homogén lineáris rekurzió **karakterisztikus egyenleté**nek hívjuk, hiszen ennek gyökei *karakterizálják* az (5.19) rekurzió viselkedését.

Oldjuk meg az (5.21) egyenletet a komplex számok körében, különböző gyökei legyenek[(7)] $q_1, ..., q_t \in \mathbb{C}$. Az (5.19) egyenlet homogenitását ismét felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges $c_1, ..., c_t \in \mathbb{C}$ számok esetén az

$$a_n := c_1 \cdot (q_1)^n + ... + c_t \cdot (q_t)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok mind kielégítik az (5.19) egyenletet.

De mi az (5.19) egyenlet *összes* megoldását akarjuk megkapni!

Idézzük fel az 5.5.Tételt: az (5.19) egyenletet kielégítő sorozatok halmaza, $\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,...,d_k}$ egy k -dimenziós vektortér. A fenti számítások és az alábbi állítások alapján könnyen megtalálhatjuk egy bázisát.

5.9. Állítás: *Tetszőleges $q_1, ..., q_t \in \mathbb{C}$ komplex számok, $t \geq 2$ esetén*

$$\det \begin{vmatrix} 1 & q_1 & ... & q_1^{t-1} \\ 1 & q_2 & ... & q_2^{t-1} \\ & ... & & ... \\ 1 & q_t & ... & q_t^{t-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq t} (q_j - q_i) \ .$$

(A fenti típusú determinánst **Vandermonde**[(8)] -determinánsnak hívják.)

Bizonyítás: teljes indukcióval t -re. □

[7)] Az Algebra Alaptételének valós és komplex változatait, és az egyenlet gyökeinek multiplicitásának fogalmát ismertnek tételezzük fel, vázlatosan ld. az F Függelékben.

[8)] Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) francia zenész, mérnök, politikus, mindössze az 1771-72 években foglalkozott matematikával.

5.10. Következmény: *Tetszőleges különböző* $q_1, ..., q_t \in \mathbb{C}$ *komplex számok* $(t \in \mathbb{N})$ *esetén a* (q_i^n) , $i \leq t$ *sorozatok lineárisan függetlenek.* □

A fentiek alapján már megadhatjuk az (5.19) rekurzió általános megoldását - abban az esetben, ha az (5.21) karakterisztikus egyenlet összes gyöke különböző. (Ne feledjük: az Algebra Alaptételének komplex számokról szóló változata szerint *minden* k -adfokú (algebrai) egyenletnek *pontosan* k gyöke van, legfeljebb nem mind különböző.)

5.11. Tétel: *Legyenek az (*5.19*) állandó együtthatójú* k *-adrendű lineáris homogén rekurzió (*5.21*) karakterisztikus egyenletének gyökei* $q_1, ..., q_k \in \mathbb{C}$ *mind különbözőek. Ekkor az (*5.19*) rekurzió általános megoldása*

$$a_n := c_1 \cdot q_1^n + ... + c_k \cdot q_k^n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.22}$$

alakú, ahol $c_1, ..., c_k \in \mathbb{C}$ *tetszőleges komplex számok.*

Bizonyítás: A fentiekből következik. □

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt.

5.12. Tétel: *Legyenek az* (5.19) *állandó együtthatójú* k *-adrendű lineáris homogén rekurzió* (5.21) *karakterisztikus egyenletének* különböző *gyökei* $q_1, ..., q_t \in \mathbb{C}$, *algebrai multiplicitásaik legyenek rendre* $m_1, ..., m_t \in \mathbb{N}$, *vagyis* $m_1 + ... + m_t = k$. *Ekkor az* (5.19) *rekurzió általános megoldása*

$$\begin{aligned} a_n \ : \ &= c_1^1 \cdot q_1^n + c_2^1 \cdot n \cdot q_1^n + c_3^1 \cdot n^2 \cdot q_1^n + ... + c_{m_1}^1 \cdot n^{m_1-1} \cdot q_1^n + \\ &+ c_1^2 \cdot q_2^n + c_2^2 \cdot n \cdot q_2^n + c_3^2 \cdot n^2 \cdot q_2^n + ... + c_{m_2}^1 \cdot n^{m_2-1} \cdot q_2^n + \\ &... \\ &+ c_1^t \cdot q_t^n + c_2^t \cdot n \cdot q_t^n + c_3^t \cdot n^2 \cdot q_t^n + ... + c_{m_t}^t \cdot n^{m_t-1} \cdot q_t^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{5.23}$$

alakú, ahol $c_j^i \in \mathbb{C}$ *tetszőleges komplex számok, ha* $j \leq m_i$, $i \leq t$. □

Felhívjuk a figyelmet, hogy általában az $n \cdot q^n$ sorozat *nem* elégíti ki az (5.19) rekurziót, csak abban az esetben ha q többszörös gyöke az (5.21) egyenletnek!

Azt könnyű belátni, hogy az (5.23) kifejezésben szereplő $(n^j \cdot q_i^n)$ sorozatok lineárisan mind függetlenek, *tetszőleges* $i, j \in \mathbb{N}$ számok esetén, és hogy így, a $j < m_i$, $i \leq t$ korlátozás miatt, éppen k -dimenziós alterét feszítik ki $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -nek. A fenti tétel bizonyításának éppen az a nehezebb része, hogy a $(n^j \cdot q_i^n)$ sorozatok minden $j < m_i$, $i \leq t$ esetén *kielégítik* az (5.19) rekurziót (ahol

m_i a q_i gyök multiplicitása). A bizonyítást megmutatjuk a $k = 2$ esetben, magasabbrendű rekurziók esetében az 5.12. Tételt nem bizonyítjuk.

5.13. Állítás: *Legyen $k = 2$, legyenek $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ tetszőleges rögzített komplex számok, és legyen az*

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} + d_2 \cdot a_{n-2} \qquad (n > 2) \tag{5.24}$$

rekurzió

$$\lambda^2 - d_1 \cdot \lambda - d_2 = 0 \tag{5.25}$$

karakterisztikus egyenletének $\lambda = q \in \mathbb{C}$ kétszeres gyöke.

Ekkor az

$$n \cdot q^n$$

*sorozat is kielégíti az (*5.24) *rekurziót.*

Bizonyítás: Mivel q kétszeres gyöke az (5.25) egyenletnek, ezért az egyenlet

$$\lambda^2 - d_1 \cdot \lambda + d_2 = (\lambda - q)^2 = 0$$

alakban írható, ami alapján az

$$d_1 = 2q \quad , \quad d_2 = -q^2$$

összefüggéseket kapjuk. Ekkor d_1, d_2 helyére a fenti összefüggéseket és a_n helyére az $n \cdot q^n$ értéket az (5.24) rekurzióba írva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$nq^n = 2q(n-1)q^{n-1} - q^2(n-2)q^{n-2}$$

ami nyilvánvalóan azonosság. $\square$

5.3. A Fibonacci-sorozat

Az elmélet szemléltetésére tekintsünk egy példát, ismét a Fibonacci sorozatot.

5.14. Példa: A Fibonacci sorozat

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n \geq 2) \quad , \qquad f_0 = 0 \ , \ f_1 = 1$$

rekurziójának feloldása.

Keressük tehát az (f_n) sorozatot $f_n := cq^n$ alakban. A fenti rekurzió alapján q -ra a

$$q^2 - q - 1 = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ .$$

A rekurzió általános megoldása

$$f_n = c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n \ , \tag{5.26}$$

így a k.é.p. alapján az

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk melynek gyökei

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \ ,$$

amit (5.26) -be beírva éppen a

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Binet[(9)] formulát kapjuk. □

A Fibonacci sorozatot néha Lucas[(10)] -féle sorozatnak is nevezik, mert F.E.A. Lucas vizsgálta először részletesen a sorozatot.

A Fibonacci sorozat az élet legkülönbözőbb területein fordul elő (biológiában, közgazdaságtanban, művészetekben, stb.), többek között Lamé[(11)] alábbi tételének bizonyításában is:

Tétel (Lamé)**:** *Az Euklideszi algoritmus futásideje* $\mathcal{O}(\log(n))$.

(A rövid bizonyítás Johnsonbaugh [$JoRi,'86$] könyvének 196-197 oldalain megtalálható.) □

A Fibonacci- sorozat tulajdonságaival és általánosításaival is rengeteg könyv és cikk foglalkozik, kezünkbe most Cofman Judit [C] tanulmánya került.

---

9) lásd az (5.5) "Binet" - formulához tartozó lábjegyzetet

10) François Edouard Anatole Lucas (1842-1891) francia matematikus

11) Gabriel Lamé (1795-1870) francia matematikus, fizikus és mérnök.

5.4. Szimultán (többdimenziós) rekurziók

Gyakran megesik, hogy nem egy, hanem több számsorozatra nyerünk egy rekurziót, azaz nem külön- külön, hanem *egyszerre*. Az 5.0. Definíció konvenciójához hasonlóan definiálhatjuk a *szimultán* rekurziókat:

5.15. Definíció: *Tetszőleges $F, G : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ függvények és $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ sorozatok esetén az*

$$\begin{cases} a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., b_{n-1}, b_{n-2}, ..., n) \\ b_n = G(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., b_{n-1}, b_{n-2}, ..., n) \end{cases} \tag{5.27}$$

egyenlőségrendszert **szimultán** *vagy* **kétdimenziós rekurzív összefüggés***nek* (vagy **rekurzió***nak*) *nevezünk. Adott tetszőleges A_1, ..., A_k, $B_1, ..., B_k$ $\in \mathbb{C}$ komplex számok és (rögzített) $k \in \mathbb{N}$ szám esetén az*

$$\begin{cases} a_1 := A_1, \ ... \ , a_k := A_k \\ b_1 := B_1, \ ... \ , b_k := B_k \end{cases}$$

egyenlőség rendszert **kezdeti érték problémá***nak* **(k.é.p.)** *nevezünk*. □

Az Olvasóra bízzuk a magasabbrendű rekurziók fentihez hasonló definiálását, ami azonban vektorok felhasználásával az alábbi módon is megtehető:

5.16. Definíció: *Tetszőleges $t \in \mathbb{N}$ természetes szám, $F : (\mathbb{C}^t)^* \to \mathbb{C}$ függvény és $(\mathbf{a}_n) \subset \mathbb{C}^t$ vektorsorozat esetén az*

$$\mathbf{a}_n = F(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-2}, ..., n) \tag{5.28}$$

egyenlőségrendszert **t - dimenziós rekurzív összefüggés***nek* (vagy **rekurzió***nak*) *nevezzük. Adott tetszőleges $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^t$ komplex vektorok és (rögzített) $k \in \mathbb{N}$ szám esetén az*

$$\mathbf{a}_1 := \mathbf{A}_1, \ ... \ , \mathbf{a}_k := \mathbf{A}_k$$

egyenlőség rendszert **t - dimenziós kezdeti érték problémá***nak* **(k.é.p.)** *nevezünk*. □

Sok esetben az (ál-) szimultán rekurziók alkalmas helyettesítéssel átírhatók közönséges (egydimenziós) rekurziókká. Például az

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 4a_{n-1} \end{cases}$$

rekurzió ekvivalens a két (független)

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}\ , \qquad b_n = 4a_{n-1}$$

rekurzió együttesével.

Az előző fejezetekben leírtakat megpróbálhatjuk több - kevesebb sikerrel többdimenziós rekurziókra (függvényekre) is alkalmazni. Mi most ismét csak a legegyszerűbb esettel foglalkozunk vázlatosan.

5.17. Definíció: *Tetszőleges $t \in \mathbb{N}$ természetes szám, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{t\times t}$ mátrix és $(\mathbf{a}_n) \subset \mathbb{C}^t$ vektorsorozat esetén az*

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_{n-1} \tag{5.29}$$

egyenlőséget **állandó együtthatójú első** $(1-)$ **rendű t - dimenziós** *rekurzív összefüggésnek nevezzük.* □

A fenti típusú rekurzió, a mértani sorozatokhoz hasonlóan könnyen feloldható:

5.18. Állítás: *Az (5.29) -ban szereplő rekurzió összes megoldása*

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{a}_0 \tag{5.30}$$

alakú ahol $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{C}^t$ a sorozat első eleme (k.é.p.)

Bizonyítás: házi feladat az Olvasó számára. □

Már csak az a (lineáris algebrai) kérdés: hogyan számoljuk ki egy $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{t\times t}$ mátrix hatványait? Ha mátrixunk diagonális, akkor könnyen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_t \end{bmatrix}$$

esetén nyilván

$$\mathbf{X}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_t^n \end{bmatrix}$$

tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ kitevő esetén.

Sőt, ha $\mathbf{X}$ hasonló egy diagonális $\mathbf{Y}$ mátrixhoz, vagyis $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ valamely invertálható $\mathbf{T}$ mátrixra, akkor nyilván $\mathbf{X}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Mátrixok diagonalizálhatósága pedig elsősorban a sajátértékvektor bázisok létezésétől függ. A lineáris algebrai részleteket most nem ismertetjük, csak egy egyszerű példát mutatunk be részletesen.

5.19. Példa: *Oldjuk meg az*

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = \ 9a_{n-1} + 7b_{n-1} \end{cases} \tag{5.31}$$

rekurziót az $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ *sorozatokra.*

Megoldás: Az

$$\mathbf{x}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{X} := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

jelöléssel az $\mathbf{x}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1}$ egyenlőséget kapjuk aminek megoldása $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{x}_0$ ahol $\mathbf{x}_0 := \left[\begin{smallmatrix} a_0 \\ b_0 \end{smallmatrix}\right]$ a sorozat kezdő (nulladik) tagja, a k.é.p. .

Az $\mathbf{X}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{X} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

melynek gyökei, azaz $\mathbf{X}$ sajátértékei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 8$, vagyis $\mathbf{X}$ hasonló az

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrixhoz. Mivel $\mathbf{X}$ sajátvektorai, azaz az

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}$$

egyenletet kielégítő $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ vektorok $\mathbf{u}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ és $\mathbf{u}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix}\right]$, a diagonalizáló $\mathbf{T}$ mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

és így valóban $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, azaz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ekkor pedig

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad ,$$

vagyis (a beszorzások után)

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{10}\left[8^n(a_0+b_0)+(-2)^n(9a_0-b_0)\right] \\ b_n = \frac{1}{10}\left[8^n(9a_0+9b_0)+(-2)^n(-9a_0+b_0)\right] \end{cases} . \qquad \square$$

5.5. Néhány nevezetes rekurzió

Ebben az alfejezetben néhány nevezetes rekurzív összefüggést mutatunk be (sorrendre való tekintet nélkül), melyek a matematikai különböző más területein felmerülő (fontos) problémákra adnak választ. (Természetesen a kombinatorikai problémák zöméhez is felírhatunk rekurzív összefüggéseket!)

5.5.1. Ackermann - függvény

Legyen $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ a következő függvény:

$$\begin{aligned} A(0,n) &:= n+1 \\ A(m,0) &:= A(m-1,1) \\ A(m,n) &:= A(m-1, A(m,n-1)) \end{aligned}$$

Bár az A függvény értékét tetszőleges m, n számokra könnyen ki tudjuk számolni (az $(m+1)\times(n+1)$ táblázat sorait és oszlopait rekurzív módon töltjük ki). W.Ackermann[12] megmutatta, hogy az A függvény gyorsabban nő minden primitív rekurzív függvénynél, vagyis az A függvény *nem primitív rekurzív* függvény, de nyilván általános rekurzív, hiszen mint könnyen látható, Turing géppel (egyszerű programmal) kiszámolható. Rögzített m -re pedig primitív. (Rekurzív függvényekkel a könyv eredeti, nyomtatott változatának III. részében foglalkozunk.)

5.5.2. Lucas-Lehmer teszt

Legyen $p > 2$ tetszőleges prímszám, $M_p := 2^p - 1$ és legyen $(a_n) \subset \mathbb{N}$ a következő sorozat: $a_1 := 4$ és

$$a_{n+1} := a_n^2 - 2 \text{ maradéka } M_p \text{ -vel osztva .}$$

---

[12] Wilhelm Ackermann (1896-1962) német matematikus

Ekkor, Lucas[13] és Lehmer tétele szerint az $M_p := 2^p - 1$ (ún. Mersenne -szám) pontosan akkor prím (Mersenne - prím) ha a_{p-1} osztható M_p -vel.

(A Mersenne - prímekről néhány érdekességet a fejezet végén levő Függelékben gyűjtöttünk össze.)

5.5.3. Newton gyökvonási algoritmusa

Legyen $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges pozitív valós szám, $a_0 \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right) \quad .$$

Standard analízisbeli eszközökkel könnyen belátható, hogy

$$a_n \to \sqrt{\gamma} \quad ,$$

sőt a konvergencia meglepően gyors: általában már öt-tíz osztás (rekurzív közelítés) után is 8 tizedesjegyre megkapjuk $\sqrt{\gamma}$ értékét! Továbbmenve: tetszőleges $r \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_{n+1} := \frac{1}{r}\left((r-1)a_n + \frac{\gamma}{a_n^{r-1}}\right)$$

sorozat ($a_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges) határértéke $\sqrt[r]{\gamma}$, és a konvergencia szintén meglepően *gyors*.

5.6. Magasabbrendű számtani sorozatok

A matematika számos más területén is (pl. számelmélet, játékelmélet) fellépnek a számtani sorozatok alábbi általánosításai: bár a sorozat maga nem számtani, de a tagok különbségeinek sorozata valami szabályosságot mutat, például a különbségek sorozata a számtani sorozat, vagy a különbségek különbsége számtani, stb.:

5.20. Definíció: *Az* $(a_n) \subset \mathbb{C}$, $a_n = d$ *konstans sorozat* ($d \in \mathbb{C}$ *fix)* **0 -adrendű számtani sorozat**. *Az* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *sorozat* $(\mathbf{i+1})$ **-edrendű számtani sorozat,** *ha a*

$$b_n := a_n - a_{n-1}$$

[13] F.Edouard A.Lucas (1842-1891) francia matematikus

sorozat i *-edrendű számtani sorozat. A sorozat* **legfeljebb r** *-edrendű, ha* rendje $\leq r$. □

Természetesen egy tetszőleges (a_n) sorozat *pontosan akkor (*szokásos) számtani sorozat *ha* rendje pontosan 1 , továbbá a másodrendű sorozatok éppen a (szokásos) számtani sorozatok (S_n) összeg képletei, végül a 0 -adrendű sorozatok triviálisan a konstans (c) sorozatok. (Ezekről kicsit részletesebben az 5.21. Állítás bizonyításának első részében lesz szó.)

A magasabbrendű számtani sorozatok definícióját hasznos lesz a véges differenciákkal is megfogalmaznunk, amelyeket többek között a differenciálegyenletek közelítő megoldásainál használnak.

5.21. Definíció: *Tetszőleges* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *rögzített sorozat esetén a* $\Delta_n^{(i)}$ **véges differenciákat** *tetszőleges* $i, n \in \mathbb{N}$ *esetén az alábbi módon definiáljuk:*

$$\Delta_n^{(0)} := a_n \tag{5.33}$$

és

$$\Delta_n^{(i+1)} := \Delta_{n+1}^{(i)} - \Delta_n^{(i)} \quad . \tag{5.34}$$

Az (a_n) *sorozatot tetszőleges* $r \in \mathbb{N}$ *index esetén* **legfeljebb** r **-edrendű számtani sorozat***nak nevezzük, ha az* $(\Delta_n^{(r)})$ *sorozat konstans sorozat, és* **(pontosan)** r**-edrendű** *számtani sorozatnak, ha nem* $(r-1)$*-edrendű.* □

Ha nem okoz félreértést, az alábbiakban egyszerűen csak r -edrendű sorozatokat mondunk, a "számtani" jelző elhagyásával.

Célunk tehát az r -edrendű számtani sorozatok általános tagjának felírása.

A sorozatot egyértelműen meghatározza rendje, r és első $r+1$ db tagja: $a_0, ..., a_r$, vagy a kezdő $\Delta_0^{(0)}, \Delta_0^{(1)}, ...\Delta_0^{(r)}$ differenciák (HF), amelyek között kapcsolatot az (5.33) és (5.34) egyenlőségek adnak.

A 0 -ad rendű $(a_n = a_0 = d = \Delta_0^{(0)})$ és az elsőrendű sorozatok

$$a_n = a_0 + (n-1) \cdot d \ , \qquad d = \Delta_0^{(1)}, \quad a_0 = \Delta_0^{(0)}$$

képlete jól ismert, kis számolással a *másodrendű* sorozatok általános képlete is felírható (ld. az 5.4. Feladatot), de hogyan tovább?

Természetesen az 1 -gyel magasabbrendű sorozat tagja éppen az alacsonyabb rendű tagok sorozatának *összegképlete*, de magasabbrendű sorozatok esetén már az összegképletek összegezése egyre bonyolultabb lesz.

Használjuk azoban a 3.3.Fejezetben (*"Összegezési módszerek"*) tanultakat! Kis számolgatás és a 3.12.Állítás alapján az alábbi összefüggést fedezhetjük fel:

5.22. Tétel: *Ha $r \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám és $(a_n) \subset \mathbb{C}$ tetszőleges (legfeljebb) r-edrendű számtani sorozat, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ indexre*

$$a_n = \binom{n}{0}\Delta_0^{(0)} + \binom{n}{1}\Delta_0^{(1)} + ... + \binom{n}{r}\Delta_0^{(r)} \tag{5.35}$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval r -re, a sorozat rendjére vonatkozóan.

$r = 0$, 1 és 2 esetén visszakapjuk a jólismert képleteket (konstans- és számtani sorozatok ill. azok összegképlete):

$r = 0 : \Delta_n^{(0)} = \binom{n}{0}\Delta_0^{(0)} = \Delta_0^{(0)} = c \in \mathbb{C}$,

$r = 1 : \Delta_n^{(0)} = \binom{n}{0}\Delta_0^{(0)} + \binom{n}{1}\Delta_0^{(1)} = a_0 + n(a_1 - a_0) = a_0 + nd = a_n$.

$r = 2$ esetén kicsit elővigyázatosnak kell lennünk. Vegyük észre, hogy most a $(\Delta_n^{(1)})$ (!) sorozat *a* (hagyományos*)* számtani sorozat, és a $\Delta_n^{(0)} = a_n$ sorozatról állítjuk, hogy a jólismert S_n összegezési képlettel egyezik meg[14], pedig egy kis különbség van köztük: valójában

$$\Delta_{n+1}^{(0)} = \Delta_0^{(0)} + \Delta_0^{(1)} + \Delta_1^{(1)} + ... + \Delta_n^{(1)} = \Delta_0^{(0)} + S_n \quad .$$

Ezek birtokában pedig a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1}^{(0)} &= \binom{n+1}{0}\Delta_0^{(0)} + \binom{n+1}{1}\Delta_0^{(1)} + \binom{n+1}{2}\Delta_0^{(2)} = \\
&= \Delta_0^{(0)} + (n+1)\cdot a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d = \Delta_0^{(0)} + \frac{n+1}{2}\,(2a_0 + nd) = \\
&= \Delta_0^{(0)} + S_n
\end{aligned}$$

hiszen sorozataink tagjait 0 -tól számozzuk, azaz (hagyományos) számtani sorozatokra az

$$a_n = a_0 + nd$$

képletet használjuk.

Legyen tehát (a_n) egy $(r+1)$ -edrendű sorozat. Mivel ekkor a $(\Delta_n^{(1)})$ sorozat r -edrendű sorozat, melynek s -edik differenciája az *eredeti sorozat*

---

[14] vagyis vigyázzunk a különféle (hagyományos és új) jelölések keveredésére!

$(s+1)$ -edik differenciája, így a véges differenciák definíciója és az (5.35) indukciós feltétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^{(1)} = \Delta_0^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{i}{0} \Delta_0^{(1)} + \binom{i}{1} \Delta_0^{(2)} + ... + \binom{i}{r} \Delta_0^{(r+1)} \right) = \\ &= \Delta_0^{(0)} + \sum_{s=0}^{r} \left(\Delta_0^{(s+1)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{s} \right) = \Delta_0^{(0)} + \sum_{s=0}^{r} \Delta_0^{(s+1)} \binom{n}{s+1} = \\ &= \binom{n}{0} \Delta_0^{(0)} + \binom{n}{1} \Delta_0^{(1)} + ... + \binom{n}{r+1} \Delta_0^{(r+1)} \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás $r+1$ -re, felhasználva a binomiális együtthatók 3.Fejezet 3.12. Állításának (3.8) összefüggésében bizonyított

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

tulajdonságát. □

Megjegyzések: ha (a_n) *pontosan* k -adrendű akkor $r > k$ esetén $\Delta_0^{(r)} = 0$, így a fenti (5.35) képlet végén a felesleges tagok úgyis nullák! Mivel egy (pontosan) r -ederendű első sorozat r első r tagját tetszőlegesen megadhatjuk, ezért az (5.35) képlet az összes r -edrendű sorozatot megadja. Ez abból is következik, hogy bármilyen rendű magasabbrendű számtani sorozatok lineáris kombinációja is az, legfeljebb alacsonyabb rendű.

Teljes indukcióval k -ra könnyen belátható, hogy az (a_n) k -adrendű számtani sorozat első $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ elemét *tetszőlegesen* megadhatjuk, a (5.35) összefüggésből (de nem az $a_1, ..., a_k$ elemekből) a Δ_0^n együtthatókat meghatározhatjuk, hiszen az $\binom{n}{i}$ polinomok együtthatóinak összehasonlítása után egy közönséges lineáris *egyenletrendszert* kapunk Δ_n^r **-re .**

Érdekességként említjük meg az alábbi eredményt.

5.23. Állítás: *Tetszőleges (rögzített) $r \in \mathbb{N}$ kitevő esetén az*

$$a_n := n^r$$

sorozat pontosan r -edrendű számtani sorozat, az n -edik differencia

$$\Delta_n^r = r \quad .$$

Az első állításból következik, hogy minden r -edfokú polinom is (pontosan) r -edrendű számtani sorozat

Bizonyítás: HF. □

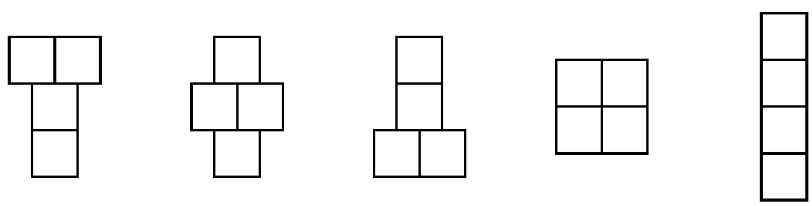
5.7. Feladatok

5.1. Feladat: Bizonyítsuk be a 4.2.fejezetben ("Elcserélt levelek") megismert D_n (derangements) értékekre a

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$$

összefüggést!

5.2. Kisgyermekek kedvenc játéka a "*sántika*": egy sorba egyesével vagy kettesével négyzeteket rajzolnak a földre és azon ugrándoznak egy- vagy két lábbal. n négyzetből hányféle sántika - pályát rajzolhatunk? Például, $n = 4$ esetén a következő lehetőségek (is) vannak:



"Sántika" - pályák $(n = 4)$
5.1. ábra

5.3. Feladat: Adjuk meg az alábbi nevezetes sorozatok explicit képletét.
(a) Lucas számok: $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ és $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$,
(b) Perrin sorozat: $a_0 = 3,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2$ és $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$,
(c) Padovai sorozat: $b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1$ és $b_n = b_{n-2} + b_{n-3}$.

5.4. Feladat: Írja fel közvetlenül a másodrendű számtani sorozatok általános alakját!

5.5. Feladat: Bizonyítsuk be a *Fibonacci-sorozat* alábbi tulajdonságait ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám! (Ismételten felhívjuk a figyelmet: könyvünkben mi a $f_1 = f_2 = 1$ (és $f_0 = 0$) feltételekkel megadott Fibonacci-sorozattal foglalkozunk!)

/1/ $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$

/2/ $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$

/3/ $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$

/4/ $f_3 + f_6 + ... + f_{3n} = \frac{1}{2}(f_{3n+2} - 1)$

/5/ $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + ... + n \cdot f_n = (n-1) \cdot f_{n+2} - f_{n+1} + 2$

/6/ $f_1 - f_2 + f_3 - +... + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$

/7/ $nf_1 + (n-1)f_2 + ... + 1f_n = f_{n+4} - (n+3)$

/8/ $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

/9/ $f_1 f_2 + f_2 f_3 + ... + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$

/10/ $f_1 f_2 + f_2 f_3 + ... + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$

/11/ f_{3k} mindig páros

/12/ f_n osztható 3 -mal ha $n = 4k$

/13/ f_n osztható 4 -gyel ha $n = 6k$

/14/ f_n osztható 5 -tel ha $n = 5k$

/15/ f_n osztható 7 -tal ha $n = 8k$

/16/ f_n osztható 9 -cel ha $n = 12k$

/17/ minden $N \in \mathbb{N}$ természetes számhoz van olyan $k \in \mathbb{N}$ index amelyre f_k osztható N -el

/18/ minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az f_n számok N -el való osztási maradékai periodikusan ismétlődnek

/19/ $f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^{n+1} = f_n^2 \quad (n \geq 2)$

/20/ $f_n f_{n+1} - f_{n-2} f_{n-1} = f_{2n-1} \quad (n \geq 3)$

/21/ $f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$

/22/ $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$

/23/ $f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n}$

/24/ $(f_n f_{n+3})^2 + (2 f_{n+1} f_{n+2})^2 = f_{2n+3}^2$

/25/ $f_{n+h} f_{n+k} - f_n f_{n+h+k} = (-1)^n f_k f_h \quad (n, h, k \in \mathbb{N})$

/26/ $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n} \quad (n \geq 2)$

/27/ $f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1} = f_{n+m} \quad (m \geq 2)$

/28/ $f_{n+1} = f_{k+1} f_{n+1-k} + f_k f_{n-k} \quad (k < n)$

/29/ $f_{k+m} = f_{k+1} f_m + f_k f_{m-1} \quad (k, m \in \mathbb{N})$

/30/ $f_{k+2n} + f_{k-2n}$ osztható f_k -val ha $k > 2n$

/31/ f_n pontosan akkor osztható f_m -el ha n osztható m -el

/32/ a sorozat bármely két szomszédos eleme relatív prím (azaz legnagyobb közös osztójuk 1)

/33/ $\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_2 f_4} + \frac{1}{f_3 f_5} + ... + \frac{1}{f_n f_{n+2}} = 1 - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}$

/34/ $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1 \quad (n \geq 3)$

/35/ $4 f_n f_{n-1} + f_{n-2}^2 = f_{n+1}^2 \quad (n \geq 3)$

/36/ $f_{n-1}^k - f_{kn-1}$ osztható f_n^2 -tel ha $n \geq 2$, $k \geq 1$

/37/ $(-1)^{k+1} f_{n-2}^k - f_{kn-2}$ osztható f_n^2 -tel ha $n \geq 3$, $k \geq 1$

/38/ minden természetes szám előállítható páronként különböző, nem szomszédos Fibonacci -számok összegeként

/39/ bármely nyolc egymást követő tagjának összege *nem* lehet Fibonacci - szám

/40/ $f_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$

/41/ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Megjegyzések: A /17/ állításban szereplő k értékét konkrétan nem tudjuk megadni, ez még nyitott (megoldatlan) kérdés.

Szintén nyitott kérdés még: *"Létezik-e végtelen sok $k \in \mathbb{N}$ amelyre f_k prímszám?"*, a válasz valószínűleg nem.

5.6. Feladat: *Oldjuk meg az*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + \ b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{array} \right. \tag{5.36}$$

rekurziót.

5.7. Feladat: Egy (*tetszőleges*) (x_n) sorozatot **végperiodikus**nak (*eventually periodic*) mondunk, ha az $(x_n)_{n \geq K}$ részsorozata periodikus valamilyen $K \in \mathbb{N}$ indextől kezdve. Tekintsük a következő rekurzív sorozatot:

$$x_{n+1} := \max \left\{ \frac{A_0}{x_n}, \frac{A_1}{x_{n-1}} ..., \frac{A_k}{x_{n-k}} \right\} \qquad (n \geq k)$$

ahol $A_0, ..., A_k,\ x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ adott tetszőleges valós számok, $A_0 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Mutassuk meg[15], hogy

(a) $A_0 = ... = A_k = A$ esetén a sorozat végperiodikus.

(b) $A_0, ..., A_k < 0$ esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) az (x_n) sorozat végperiodikus, $k+2$ periódussal ,

(ii) $A_i = A_{k-i}$ ha $0 \leq i \leq k$,

(iii) az (x_n) sorozat korlátos .

5.8. Feladat: Azt mondjuk, hogy az (x_n) és (y_n) sorozatok **elkerülik egymást**, ha $x_n \neq y_n$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre. Mutassuk meg, hogy az

$$x_{n+1} := \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2} \cdot x_{n-3}}{x_n \cdot x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}} \qquad (n \geq 3) \tag{5.37}$$

rekurzív összefüggés esetén, *tetszőleges* $(y_n) \subset \mathbb{R}$ sorozathoz végtelen sok olyan $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ k.é.p. található, hogy az így kapott (x_n) sorozat elkerüli az (y_n) sorozatot!

5.8. Megoldások

5.2. Feladat: A megoldást a $t_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} t_i t_{n-i}$, $t_0 = 1$ rekurzió által megadott sorozat adja, a rekurzió feloldását a 6.2.3. alfejezetben ismertetjük.

5.4. Feladat: A számtani sorozat összegképletéről van szó, azaz (többféle jelöléssel felírva):

$$a_n^{(2)} = S_n^{(1)} = S_n = \left(2a_0^{(2)} + (n-1)d\right) \cdot \frac{n}{2} = \left(2a_0^{(2)} + (n-1)\Delta_0^{(1)}\right) \cdot \frac{n}{2} \quad .$$

5.5. Feladat: Útmutatás: használhatunk pl. teljes indukciót n -re, esetleg k -ra, m -re. Sok állítás igazolása megtalálható Róka Sándor $[R]$ könyvében.

5.7. Feladat ($[Sz1]$)**: (a)** Először keressünk egy olyan n_0 indexet, amelyre

$$x_{n_0-i} > \sqrt{A} \qquad \text{ha} \quad i < k \tag{5.38}$$

[15]) ezzel a rekurzióval (is) kapcsolatban sok kérdésre még keressük a választ. Pl.: **Sejtés:** $A_0, ..., A_k \geq 0,\ A_k \neq 0$, $x_0, ..., x_k \in \mathbb{R}$ *tetszőleges számok esetén ha az* (x_n) *sorozat pozitív tagú, akkor végperiodikus.* $\square$

(az $x_n = \sqrt{A}$ konstans sorozatot most nem tekintjük). Ekkor persze $x_{n_0+1} < \sqrt{A}$, de így a sorozat következő k elemére

$$x_{n_0+2+i} = \frac{1}{x_{n_0+1}} \qquad \text{ha} \quad i < k \tag{5.39}$$

amit az előző (5.38) összefüggéssel összevetve látjuk, hogy a sorozat valóban végperiodikus.

(b) Először keressünk egy olyan n_0 indexet, amelyre

$$x_{n_0-i} > 0 \qquad \text{ha} \quad i \leq k \tag{5.40}$$

és legyen

$$z_0 := x_{n_0+1} \quad .$$

Ekkor persze $z_0 < 0$ és (5.40) alapján a sorozat következő $k+1$ eleme pozitív. Ekkor

$$z_1 := x_{n_0+k+3} = z_1 \cdot L$$

ahol

$$L := \max \left\{ \frac{A_i}{A_{k-i}} : 0 \leq i \leq k \right\} \quad .$$

A gondolatmenetet megismételve kapjuk tetszőleges $t \in \mathbb{N}$ számra, hogy

$$z_t := x_{n_0+1+t\cdot(k+2)} = z_1 \cdot L^t$$

azaz az (x_n) sorozat valóban végperiodikus.

L és z_t vizsgálatával az (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) ekvivalencia is könnyen belátható. $\Box$

5.8. Feladat ($[Sz2]$)**:** Az iterációs módszerhez hasonlóan a sorozat x_4 , x_5 ,... elemeit mind kifejezhetjük

$$x_n = f_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (n \geq 4)$$

alakban, ahol f_n racionális törtfüggvények.

Az, hogy az (x_n) sorozat elkerüli az (y_n) sorozatot, azt jelenti, hogy az

$$y_n = f_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \qquad (n \geq 4) \tag{5.41}$$

egyenletek közül *egyik sem* teljesül. Vagyis adott $(y_n) \subset \mathbb{R}$ sorozat esetén, $\mathbb{R}^4$ elemei közül az (5.41) egyenletek megoldásait, amik megszámlálható sokan vannak, kell elhagynunk. $\mathbb{R}^4$ nem megszámlálható lévén ez (végtelen sok féleképpen) megtehető. $\Box$

Sorozatok *elkerülésének* problémáját teljes általánosságában $[Sz2]$ -ben tárgyaljuk.

5.9. Függelék: Mersenne számok

Marin Mersenne[16] és kortársai még reménykedtek olyan *egyszerű* képletek megtalálásában, melyek segítenek nagy prímszámok megtalálásában. Mersenne a $M_p := 2^p - 1$ képletet javasolta, ahol $p \in \mathbb{P}$ prímszám. Már a $p = 11$ esetén sem prím M_p , hiszen $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$. Máig is megoldatlan probléma, hogy van -e végtelen sok M_p alakú *prímszám?* Az is megoldatlan, hogy *van-e végtelen sok összetett* közöttük. Nagy prímszámoknak újabban van nagy keletje: üzenetek (feltörhetetlen) titkosításában használnak nagyméretű (több száz jegyű) prímszámokat (mint erről a III. részben szólunk részletesebben). Az iskolában tanult "osztogatós" módszer vagy az Eratosztheneszi szita pedig többszáz jegyű számok esetén évmilliókig (!) is eltarthat ... . Még az 5.5.2. alfejezetben leírt Lucas-Lehmer teszt is éveket vesz igénybe. Ezért is indult útjára az internetes kollektív prímvadászat: a számítógépek kikapcsolása (vagy képernyővédő programok) helyett a szervezők a hálózatba kapcsolt gépek Lucas-teszt futtatását javasolják párezer dollár jutalom mellett, az érdeklődőknek a HTTP://WWW.MERSENNE.ORG/PRIME.HTM és a HTTP://WWW. UTM.EDU/RESEARCH/PRIMES címeket illetve az Élet és Tudomány 1999/27 számát ajánlhatjuk.

A legújabban (a fenti módon) felfedezett M_p Mersenne - prím a 38 -adik: $p = 6.972.593$ (1999. június 1.), néhány régebbi felfedezés: $p = 3.021.377$ (1998. január 27), $p = 2.976.221$ (1997. augusztus 24.), $p = 1.398.269$ (1996. november), $p = 859.433$ (1994. január), $p = 216.091$ (1985). Mersenne -prímek a következők is: $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$ (1950-ig M_{127} volt a legnagyobb ismert prímszám), 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11.213, 19.937, 21.701, 23.209, 44.497, 86.243, 132.049.

Az érdeklődő Olvasóknak még pl. a $[B]$ és $[L]$ olvasnivalókat ajánlhatjuk.

5.10. Hivatkozások

$[B]$ Bruce,J.W: *A Really Trivial Proof of the Lucas-Lehmer Test*, Amer. Math. Monthly, 1993 April, 370-371.

$[C]$ Cofman Judit: *Fibonacci-féle számoktól fraktálokig,* Polygon, III. (1993), 91-101.

[16] Marin Mersenne (1588-1648), francia matematikus

[M] Mickens,R.E.: *Difference Equations – Theory and Applications,* Chapman & Hall, New York, 1990.

[JDE] *Journal of Difference Equations and Applications,* Gordon and Breach Science Publishers, folyóirat 1995- től

[L] Laczkovich M: *Prímképletek,* KöMaL 47 (1997) 385-398.

[R] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből,* Typotex, Budapest, 2000.

[$Sz1$] Szalkai,I.: *On the Periodicity of the Sequence* $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_0}{x_n}, ..., \frac{A_k}{x_{n-k}}\right\}$, J.Diff. Equ. 5 (1999), 25-29.

[$Sz2$] ——— : *Avoiding Forbidden Sequences by Finding Suitable Initial Values,* kézirat, Internat. J. of Difference Equations, Vol. 3 (2008), pp. 305–315, ISSN 0973-6069, http://campus.mst.edu/ijde/contents/v3n2p7.pdf http://campus.mst.edu/ijde/index_files/ijde32.htm

6. fejezet

Generátorfüggvények

A GENERÁTORFÜGGVÉNY MÓDSZER. NEWTON BINOMIÁLIS SORA. LINEÁRIS REKURZIÓK GENERÁTORFÜGGVÉNYEI RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK. NEMLINEÁRIS REKURZIÓK ÉS GENERÁTORFÜGGVÉNYEIK. CATALAN SZÁMOK, PARTÍCIÓS PROBLÉMÁK. EXPONENCÁLIS GENERÁTORFÜGGVÉNYEK.

Rekurzív sorozatok vizsgálatának másik eszköze az lehet, hogy *valamely* módon egy függvényt - a *generátorfüggvényt* - rendelünk a sorozathoz (lehetőleg egy - egy értelmű módon), a sorozat tulajdonságai alapján megkeressük e függvényt, majd a függvényből visszafejtjük magát a sorozatot. Meglepő módon ez a vargabetű megéri: így többek között sok olyan sorozat explicit alakját is megtaláljuk, amelyekkel az előző fejezetben nem boldogultunk. Sőt, a valószínűségszámításban, számelméletben, analízisben és más területeken is sikerrel használják a generátorfüggvényeket[1].

6.0. Definíció: *Egy tetszőleges* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *sorozat* **generátorfüggvénye** *azon* $\mathbf{F} : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ *függvény, amelyre*

$$\mathbf{F(x)} := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \tag{6.1}$$

[1] A lineáris differenciálegyenletek elméletében használt *Laplace - transzformáció* is hasonló ötleten alapul: minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez egy $F := \mathcal{L}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt rendelünk, amely hozzárendelés összhangban van a deriváltakkal, az f -re vonatkozó eredeti differenciálegyenlet helyett a megfelelő, F -re kapott lineáris *algebrai* egyenletet oldjuk meg, majd a kapott megoldást (F -et) visszatranszformálva megkapjuk az eredeti differenciálegyenlet f megoldását.

ha $x \in Dom(\mathbf{F})$ *ahol* $Dom(\mathbf{F})$ *tartalmazza* $0 \in \mathbb{R}$ *egy (pozitív sugarú) környezetét.* $\square$

6.1. Megjegyzések: (i) Jegyezzük meg jól, hogy a generátorfüggvényben *a sorozat* n *-edik tagja éppen az* x^n *tag együtthatója*[2]! Továbbá, az előző fejezet módszerével ellentétben most a sorozat *összes* tagjára (a_0 -tól), azaz a k.é.p.-ra szükségünk van, vagyis általános megoldásról szó sem lehet!

(ii) A hatványsor konvergenciájának ténye és a konvergencia -tartomány nagysága precíz vizsgálatot, analitikus (matematikai analízis) eszközöket igényelne, ezzel mi most nem foglalkozunk. Egyszerűen csak feltesszük hogy a (6.1) sor a 0 egy pozitív sugarú környezetében konvergens. Megjegyezzük, hogy hatványsor lévén a sor a konvergencia tartományban *abszolút* konvergens!

(iii) Az alkalmazások során sokszor előfordulhat, hogy a sorozat nem a 0 indexű tagjától indul, vagy a rekurzió csak későbbi elemekre működik. Ilyen (és hasonló) esetekben *átszámozhatjuk* sorozatunkat, ami kölcsönösen megfelel a generátorfüggvény x -el való szorzásának. Pontosabban: *Ha az* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *sorozat generátorfüggvénye* $F(x)$, *akkor a* $G(x) := x \cdot F(x)$ *generátorfüggvény éppen a* $b_n := a_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $b_0 := 0$ *sorozathoz tartozik.* *(*Ez a definícióból azonnal adódik.)

(iv) A (6.1) formulában az F függvény 0 körüli Taylor (más néven McLaurin[3]) sora szerepel. Azonban a példáinkban szereplő F függvényeket nem Taylor formulájával tudjuk kényelmesen sorbafejteni, hanem – zömében racionális tört függvények lévén – Newton binomiális sorával vagy a geometriai sor módosított összegképletével (ld. 3.4. és 6.2. Tételek) fejthetjük sorba. Továbbá, e fejezetben egyszerűen csak *sorfejtést* említünk, hiszen csak a (6.1) alakú sorfejtést használjuk.

(v) A generátorfüggvény ötlete Moivre[4] -től ered, Euler[5] és Laplace[6] alapozta meg az elméletet precízen.

---

[2] a gyengébbek kedvéért: a kitevő és az index mindig megegyezik!

[3] Colin McLaurin (1698-1746) angol matematikus, elsősorban síkgörbékkel foglalkozott, ő adta meg az egyváltozós függvények szélsőértékeinek meghatározására jólismert eljárást

[4] Abraham Moivre (1667-1754) francia matematikus, valószínűségszámítással, komplex számokkal, parciális törtekkel és hiperbolikus függvényekkel foglalkozott.

[5] Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus, a II. rész 2. fejezetében írunk róla bővebben.

[6] Pierre Laplace (1749-1827) francia matematikus, analízisben elért eredményei jól ismertek

Más típusú generátorfüggvényeket a fejezet végén ismertetünk röviden, vagy az Olvasóknak például Sárközy András [*Sá*] könyvét vagy Wilf [*W*] részletes összefoglaló művét ajánlhatjuk.

6.1. Lineáris rekurziók

A generátorfüggvények *felírásának* és *sorbafejtésének* módszerét a jólismert Fibonacci sorozaton szemléltetjük, vagyis most nem a végeredményre leszünk elsősorban kíváncsiak (persze összehasonlíthatjuk az előző fejezet végeredményével is.) Mivel az általános módszert csak vázlatosan írjuk le (a 6.5. és 6.8. pontokban), ezért az alábbi példát részletesen kidolgozzuk. Javasoljuk továbbá az Olvasónak a 6.5. és 6.8. pontokban és a szerző [$SzIs,'97$] feladatgyűjteményében említett módszerek és trükkök tanulmányozását, gyakorlását!

Az előző fejezetben megismert ("klasszikus") módszerrel ellentétben inhomogén rekurziókra is "helyből" alkalmazhatjuk a generátorfüggvények módszerét, mint ezt a 6.4.Példában alább láthatjuk. A módszer lehetőségének pontos leírását a 6.5. pontban írjuk le.

Gyakran lesz szükségünk a 3. fejezetben megismert 3.4. Tétel alábbi speciális esetére.

6.2. Állítás: *Tetszőleges $x, a \in \mathbb{C}$ komplex számokra, $|x| < |a|$ esetén*

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n \ .$$

Bizonyítás:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{-1}{\frac{x}{a}-1} = \frac{-1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} x^n \ . \qquad \square$$

Most pedig lássunk végre egy generátorfüggvényt!

6.3. Példa: Fibonacci sorozat.

Mint említettük, a generátorfüggvény felírásához minden esetben a sorozat 0 -dik tagja (f_0) is kell, az eddigi (5.3) rekurziónk megtartása miatt legyen

$f_0 := 0$,[7] ekkor még a sorozat (6.2) rekurziója is érvényben marad $n = 2$ esetére is. Az Olvasó kényelme érdekében ismét leírjuk a Fibonacci sorozat rekurzióját. Legyen tehát (f_n) az

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n \geq 2) \tag{6.2}$$

és

$$f_0 = 0\ ,\ f_1 = 1 \tag{6.3}$$

összefüggésekkel megadott sorozat és legyen

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n \quad , \qquad F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \tag{6.4}$$

az (f_n) sorozat generátorfüggvénye.

Az $F(x)$ generátorfüggvény megkonstruálásához a (6.2) egyenlőségből indulunk ki. A (6.2) egyenlőségeket x^n -el beszorozva majd $n \geq 2$ -re összegezve az

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n \cdot x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} \cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} \cdot x^n$$

összefüggést kapjuk. Mint többször hangsúlyoztuk, a sorozat tagjai éppen x megfelelő hatványainak együtthatói, ezért a jobboldali összegekből x illetve x^2 kiemelendő (abszolút konvergens soroknál ez megtehető):

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n \cdot x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} \cdot x^{n-2}$$

A legutolsó összegben az indexekben $n-2$ szerepel, így $n - 2 \geq 0$ miatt ez a tag éppen a keresett $F(x)$, de a másik két összegből hiányzik az $F(x)$ generátor függvény eleje, vagyis az $f_0 + f_1 x$ rész. Ezeket figyelembe véve az

$$F(x) - f_0 - f_1 x = x\left(F(x) - f_0\right) + x^2 F(x)$$

vagyis

$$F(x)\left(1 - x - x^2\right) = f_0 + f_1 x - x f_0$$

[7] Néhány forrás eltér a Fibonacci - sorozat számozását illetően, ezért minden könyvben nézzük meg pontosan a használt k.é.p. -t, azaz az f_0, f_1 illetve az f_1, f_2 értékeket! Mi könyvünkben végig következetesen az $f_0 = 0$, vagyis az $f_1 = f_2 = 1$ k.é.p. -val dolgozunk.

egyenletet kapjuk. Ez elsőfokú algebrai egyenlet $F(x)$ -re, (általános iskolából jól ismert) megoldása

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \quad .$$

A 6.1.(iii) megjegyzéssel összhangban az $F(x) = x \cdot \frac{1}{1-x-x^2}$ képletben levő x szorzótényező csak a sorozat tagjainak indexelését módosítja, így elegendő a

$$k(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

függvényt sorbafejteni.

Mint említettük, Taylor módszerével nem sokra megyünk, de a $k(x)$ függvényt parciális törtekre bontva kapjuk, hogy

$$k(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x-\tau_1} - \frac{1}{x-\tau_2} \right)$$

ahol

$$\tau_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a $k(x)$ függvény nevezőjének gyökei. A mértani sor összegképletét (pontosabban a 6.2. Állítást) felhasználva

$$k(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{\tau_1^{n+1}} \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{\tau_2^{n+1}} \cdot x^n \right)$$

amiből x^n együtthatója $k(x)$ -ben (vagyis x^{n+1} együtthatója $F(x)$ -ben)

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{\tau_1^{n+1}} - \frac{-1}{\tau_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\tau_1^{n+1}} - \frac{1}{\tau_2^{n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left((-\tau_2)^{n+1} - (-\tau_1)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

hiszen $\tau_1 \tau_2 = -1$. Így a (6.2) és (6.3) összefüggésekben definiált Fibonacci -sorozatra kapjuk (ismét) hogy

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \; .$$

Ez ugyan az előző fejezet ismeretében már nem ad új eredményt (de legalább megerősíti az (5.5) Binet -formula helyességét).

Azonban, mint az alábbi példában is láthatjuk: kis ügyességgel a generátorfüggvény -módszerrel már *inhomogén* lineáris rekurziók is megoldhatók.

6.4. Példa: Hanoi tornyai.

Az előző fejezet 5.3. Példájában vizsgáltuk a

$$h_{n+1} = 2 \cdot h_n + 1 \quad (n \geq 1) \tag{6.5}$$

rekurziót a $h_1 = 1$ k.é.p. mellett. Mint említettük, a generátorfüggvény felírásához szükségünk van a sorozat 0 -adik elemére. Szerencsére a

$$h_0 := 0$$

választással még a (6.5) rekurzió is érvényben marad az $n = 0$ esetre is.

Az előző példához hasonlóan a (6.5) egyenlőség mindkét oldalát x^{n+1} -el beszorozva, $n \geq 0$ -ra összegezve és rendezve a

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n+1} \cdot x^{n+1} = 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

összefüggést kapjuk, mely a (h_n) sorozat

$$H(x) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

generátorfüggvényére a következő egyenletet jelenti (a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sor összegképletét is felhasználva):

$$H(x) - h_0 = 2x \cdot H(x) + x \cdot \frac{1}{1-x} \quad ,$$

vagyis

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \tag{6.6}$$

Innen már az előző példához hasonlóan megkaphatjuk a (h_n) sorozat explicit képletét.

Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a kapott (6.6) összefüggés és a következő tétel eredményei alapján még további (meglepő) információkat nyerünk a (h_n) (Hanoi tornyai) sorozatra, így példánkat a tétel után a 6.3.b/ pontban folytatjuk.

Előbb azonban foglaljuk össze a fenti két példában leírt módszert röviden. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a generátorfüggvény - módszer *inhomogén* lineáris rekurziókra is működik.

6.5. Módszer: *Állandó együtthatójú lineáris* inhomogén *rekurziók generátorfüggvényének felírása* (vázlat).

Ha az (a_n) sorozat generátorfüggvénye

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

és az (a_n) sorozat kielégíti az

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} + ... + d_k \cdot a_{n-k} + b_n \quad (n \geq k) \tag{6.7}$$

állandó együtthatójú lineáris inhomogén rekurziót, ahol $d_1, ..., d_k \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ rögzített számok, valamint a $(b_n) \subseteq \mathbb{C}$ sorozat generátorfüggvénye

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad ,$$

akkor a (6.7) egyenlőség mindkét oldalát x^n -el beszorozva, $n \geq k$ -ra összegezve és rendezve a

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = d_1 x \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + ... + d_k x^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n x^n$$

összefüggést kapjuk. Ezután az $F(x)$ generátorfüggvény elejét (vagyis az a_0 , $a_1 x$,..., $a_k x^k$ tagokat) pótolva algebrai (elsőfokú) egyenletet kapunk $F(x)$ -re:

$$\begin{aligned} F(x) - \theta_{k-1}(x) &= d_1 x \cdot (F(x) - \theta_{k-2}(x)) + ... + d_k x^k \cdot F(x) + \\ &+ \left(G(x) - \sum_{n=0}^{k-1} b_n x^n \right) \end{aligned}$$

ahol

$$\theta_j(x) = a_j x^j + ... + a_0 \qquad (j \in \mathbb{N}) \ ,$$

amiből kapjuk:

$$F(x) = \frac{d_{k-1}\theta_0(x) + ... + d_1\theta_{k-2}(x) - \theta_{k-1}(x) - \left(G(x) - \sum_{n=0}^{k-1} b_n x^n\right)}{d_k x^k + ... + d_1 x - 1} \quad .$$

□

A most vázolt módszert a 6.3. és 6.4. példákban részletesen ismertettük. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a fejezet további részeiben és a végén szereplő feladatokban még további módszereket ismerhet meg generátorfüggvények felírására és sorbafejtésére.

A következő tétel nem csak az előző fejezetben már kimerítően megvizsgált állandó együtthatójú homogén lineáris rekurziók sorozatainak generátorfüggvényeire ad egy új jellemzést, hanem például a fenti Hanoi tornyai - sorozatra (és sok más nem homogén vagy nem lineáris rekurzió sorozatára) egy *új*, már állandó együtthatójú lineáris homogén *rekurzív összefüggést* is!

6.6. Tétel *Egy tetszőleges $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sorozat generátorfüggvénye pontosan akkor egy racionális törtfüggvény mely nevezőjének az $x = 0$ nem gyöke, ha az (a_n) sorozat kielégít egy állandó együtthatójú homogén lineáris rekurziót (is).*

Megjegyzések: **(i)** Egy sorozat többféle rekurziót is kielégíthet (mint például a Hanoi tornyainak sorozatára a Tétel bizonyítása után egy újabb rekurziót kapunk), ezt hangsúlyoztuk a Tétel végén az *(is)* megjegyzéssel!

(ii) Ha egy $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ racionális törtfüggvény *nevezőjének* az $x = 0$ gyöke, akkor az $F(x)$ függvény az $x = 0$ -ban nem is értelmezhető, vagyis nem lehet generátorfüggvény (hiszen minden hatványsor konvergenciatartománya tartalmazza a 0 -át)!

Bizonyítás: $\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel először, hogy az $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sorozat kielégíti az

$$a_n = d_1 \cdot a_{n-1} + ... + d_k \cdot a_{n-k} \quad (n \geq k) \tag{6.8}$$

rekurziót az

$$a_0 = A_0 \ , \ ... \ , \ a_{k-1} = A_{k-1} \tag{6.9}$$

kezdeti értékekkel, ahol $d_0, ..., d_k, A_1, ..., A_k \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített számok. Jelölje továbbá

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

az (a_n) sorozat generátorfüggvényét.

A 6.3. példa (Fibonacci sorozat) számolásához hasonlóan a (6.8) egyenlőség mindkét oldalát szorozzuk x^n -el, összegezzük $n \geq k$ -ra (amit tagonként végezhetünk mert a hatványsorok abszolút konvergensek)

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} d_1 \cdot a_{n-1}.x^n + ... + \sum_{n=k}^{\infty} d_k \cdot a_{n-k} \cdot x^n \quad .$$

Most d_i -t és x megfelelő hatványait kiemelve az $F(x)$ generátorfüggvény "végét" kapjuk, vagyis csak $F(x)$ "elejét" kell pótolnunk (amint ezt a 6.5. pontban általában is leírtuk):

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = d_1 x \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1}.x^{n-1} + ... + d_k x^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} \cdot x^{n-k}$$

azaz

$$F(x) - \theta_{k-1}(x) = d_1 x \cdot (F(x) - \theta_{k-2}(x)) + ... + d_k x^k \cdot F(x) \tag{6.10}$$

ahol

$$\theta_j(x) = a_j x^j + ... + a_0 \qquad (j \in \mathbb{N})$$

az $F(x)$ generátorfüggvény "eleje", mely $j \leq k-1$ esetén a k.é.p. -val is megadható:

$$\theta_j(x) = A_j x^j + ... + A_0 \qquad (j \leq k-1) \ .$$

A (6.10) lineáris (általános iskolai algebrai) egyenletet megoldva $F(x)$ -re az

$$F(x) = \frac{d_{k-1}\theta_0(x) + ... + d_1\theta_{k-2}(x) - \theta_{k-1}(x)}{d_k x^k + ... + d_1 x - 1}$$

alakot kapjuk, mely éppen a bizonyítandó állítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Legyen tehát

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

racionális törtfüggvény.

Először is megjegyezzük, hogy ez esetben $F(x)$ konvergenciasugara pozitív, hiszen legalább a nevező gyökei abszolútértékeinek minimuma. Ha ugyanis $F(x)$ -et parciális törtekre bontjuk ($\mathbb{C}$ felett), akkor a mértani sorozat összegképlete illetve Newton binomiális sora (3.5. és 3.4. Tételek) segítségével $F(x)$ -et sorba is tudjuk fejteni, a konvergenciatartomány pedig az említett tételekből adódik.

Feltehetjük nyilván, hogy $\frac{p(x)}{q(x)}$ valódi törtfüggvény, azaz $p(x)$ fokszáma kisebb mint $q(x)$ fokszáma. Legyen pontosabban

$$p(x) := \sum_{i=0}^{k-1} e_i x^i \quad \text{és} \quad q(x) := \sum_{j=0}^{k} d_j x^j$$

ahol $d_j, e_i \in \mathbb{C}$ tetszőleges rögzített számok, $d_k \neq 0$ (de $e_{k-1} = 0$ megengedett), és a feltétel szerint $d_0 \neq 0$. Ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} e_i x^i}{\sum_{j=0}^{k} d_j x^j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad .$$

Mivel a jobb oldalon levő hatványsor abszolút konvergens, ezért a legutolsó egyenlőségben a nevezővel ”átszorozhatunk”, vagyis az

$$\sum_{i=0}^{k-1} e_i x^i = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} d_j x^j\right)$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan beszorzás és x^n együtthatóinak összehasonlítása után az

$$\begin{aligned} e_0 &= d_0 \cdot a_0 \\ e_1 &= d_0 \cdot a_1 + d_1 \cdot a_0 \\ e_2 &= d_0 \cdot a_2 + ... + d_2 \cdot a_0 \\ & \;\;\, ... \\ e_{k-1} &= d_0 \cdot a_{k-1} + ... + d_{k-1} \cdot a_0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

illetve $n \geq k$ esetén ($e_n = 0$ miatt) az

$$0 = d_0 \cdot a_n + ... + d_k \cdot a_{n-k} \tag{6.12}$$

egyenletrendszert kapjuk.

Ez utóbbi, $d_0 \neq 0$ miatt egy kívánt alakú (állandó együtthatójú homogén lineáris) rekurzív összefüggés az (a_n) sorozatra:

$$a_n \quad = \quad -\frac{d_1}{d_0} a_{n-1} - \frac{d_2}{d_0} a_{n-2} - ... - \frac{d_k}{d_0} a_{n-k} \qquad (n \geq k)$$

Sőt, a (6.11) egyenletrendszerből a sorozat $a_0, ..., a_{k-1}$ tagjainak értéke, vagyis a k.é.p. is meghatározható. (HF) □

6.7. Megjegyzések: (i) A fenti bizonyítás módszert is ad a generátorfüggvény alapján a keresett állandó együtthatós homogén lineáris rekurzió és a hozzá tartozó k.é.p. megtalálására (a (6.12) egyenlőség és a (6.11) egyenletrendszer alapján). Természetesen a k.é.p. a generátorfüggvény legelső néhány tagja, de általában nem a generátor függvény sorfejtését, hanem annak csak az (explicit) alakját (képletét) ismerjük!
(ii) Mint a bizonyításban látható, a racionális törtfüggvény alakú generátorfüggvény nevezője éppen a megfelelő állandó együtthatójú lineáris homogén rekurzió karakterisztikus polinomja! Vagyis mind az előző fejezetben ismertetett "klasszikus" módszernél, mind a generátorfüggvény sorfejtésénél ugyanannak a polinomnak a gyökeit kell megkeresnünk.

Mint a 6.3. Példa (Fibonbacci sorozat) megoldásában is láttuk, generátorfüggvények készítéséhez a racionális törtfüggvényeket parciális törtekre bontva kell sorbafejtenünk, ezt most röviden összefoglaljuk.

6.8.Módszer: *Racionális törtfüggvények (Taylor-) sorbafejtése* (vázlat)
Mint az előző tétel bizonyítása előtt is kifejtettük, a nevezőnek 0 nem lehet gyöke, hiszen 0 -körüli sorbafejtés a célunk.
A törtfüggvényt a komplex számok körében parciális törtekre bontva $\frac{A}{x-a}$ illetve $\frac{B}{(x-b)^k}$ alakú törteket kapunk (kicsit részletesebben ld. az E Függelékben), melyeket a mértani sor összegképlete vagy Newton binomiális sora (3.4. és 6.2. Tételek) alapján fejthetünk sorba. Mivel a hatványsorok abszolút konvergensek, ezért a kapott sorok összege egy sor összegeként is felírhatók (és ekkor az összegben x^n együtthatója éppen a sorozat n -edik tagjának képletét adja meg.)

A fenti módszert részletesen ismertettük a 6.3. példában, további példák találhatók még a szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében is.

A 6.6.Tétel alapján egy érdekes összefüggést nyerhetünk a Hanoi tornyai probléma sorozatára:

6.9. Példa: Hanoi tornyai (folytatás). A (6.6) összefüggés alapján a (h_n) sorozat $H(x)$ generátorfüggvénye

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1} \ ,$$

így a 6.6.Tétel (6.12) összefüggése alapján a (h_n) sorozat kielégíti a

$$h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-2} \tag{6.13}$$

állandó együtthatójú *homogén* lineáris rekurziót!

A kapott (6.13) összefüggést persze könnyű teljes indukcióval igazolni, feltéve ha ismerjük az $h_n = 2^n - 1$ explicit képletet (mondjuk az előző fejezet (5.8) eredményéből), de hogyan lehetne a fenti (6.13) összefüggést mondjuk a Hanoi tornyai - játék *kombinatorikai* vizsgálatából levezetni?

6.2. Nemlineáris rekurziók

A rekurzív összefüggések zöme azonban nem lineáris[(8)], így a fejezet hátralevő (nagyobbik) részében igyekszünk minnél többféle rekurziót ismertetni megoldásukkal együtt (ami természetesen generátor függvény) bemutatni. Az elmélet teljes bemutatására nem vállalkozunk, az érdeklődő Olvasóknak Wilf $[W]$ nagyszerű könyvét ajánlhatjuk.

6.2.1. Catalan számok

Az alábbi rekurzív összefüggéssel nagyon sok kombinatorikai feladatban találkozhatunk:

$$t_{n+1} := \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot t_{n-i} \quad , \quad t_0 = 1 \tag{6.14}$$

(Feladatokat a fejezet végén, a szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében vagy például Vilenkin $[ViNJ,'87]$ könyvében találhat az Olvasó [(9)].)

Most lássuk a (6.14) rekurzió feloldását. A (t_n) sorozat

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$$

[8)] vagy legalábbis nem homogén

[9)] A most definiált $(t_n) = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...$ sorozatot már Euler is említette egyik, 1760-ban Szentpétervárott megjelent munkájában, amelyben Segner János magyar mérnöknek az ötletét kidolgozva a szabályos n -szög átlókkal háromszögekre való bontásának számát határozta meg, melyet a 6.3. Feladatban ismertetünk.

Eugène Catalan (1814-1894) belga matematikus később kortársával, *Jacques Binet* (1786-1856) francia matematikussal együtt a (6.17) egyszerű képletet vezette le a (t_n) sorozatra, 1838 és 1839 között.

generátorfüggvényére a fenti rekurzió alapján az

$$F(x) = x \cdot F^2(x) + t_0 \tag{6.15}$$

összefüggést nyerjük. Hiszen gondoljuk csak meg: a generátorfüggvényben szereplő x^i és x^{n-i} tagok szorzata x^n, és együtthatója éppen $\sum_{i=0}^{n} t_i \cdot t_{n-i}$, ha i felveszi az összes lehetséges értéket: $i = 0, ..., n$. Vagyis $F(x)$ önmagával való szorzata majdnem önmaga: a (6.14) rekurzióban t_{n+1} szerepel, valamint az " $F(x) = x \cdot F^2(x)$ " összefüggést még x^0 együtthattójával korrigálni kell. A (6.15) másodfokú (algebrai) egyenletet $F(x)$-re megoldva kapjuk, hogy

$$F_{1,2}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \quad .$$

A számlálóban levő $\pm$ közül még ki tudjuk választani az "igazit", hiszen

$$\lim_{x \to 0} F(x) = t_0 = 1 \quad ,$$

vagyis

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \quad .$$

Azonban ezt a törtet a nevezője miatt nem tudjuk sorbafejteni, újabb ötlet után kell néznünk! Vizsgáljuk $F(x)$ helyett ezért az

$$\mathcal{F}(x) := x \cdot F(x) \tag{6.16}$$

függvényt. Ekkor a (6.15) összefüggés alapján (mindkét oldalát x -el szorozva) az

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}^2(x) + x$$

egyenletet kapjuk, aminek megoldása

$$\mathcal{F}_{1,2}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \quad .$$

A határérték vizsgálatával ismét eldönthető, hogy $\mathcal{F}_1$ vagy $\mathcal{F}_2$ az "igazi":

$$\lim_{x \to 0} \mathcal{F}(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot F(x) = 0$$

miatt

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

a megfelelő formula.

Ez utóbbi függvényt Newton binomiális sora alapján sorbafejthetjük:

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

ahol

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot....\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot...\cdot\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!} = \frac{1}{2^n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

azaz t_n (vagyis x^{n+1} együtthatója $\mathcal{F}(x)$ -ben) értéke

$$t_n = \frac{-1}{2}\cdot(-4)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

azaz

$$t_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{6.17}$$

és $t_0 = \frac{1}{1}\cdot\binom{0}{0} = 1$ miatt

$$t_0 = 1\ . \tag{6.18}$$

A fenti számításokat az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

6.10. Tétel: *A*

$$t_{n+1} := \sum_{i=0}^{n} t_i\cdot t_{n-i} \quad , \quad t_0 = 1$$

rekurziót kielégítő sorozat explicit alakja

$$t_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\ .$$

Bizonyítás: Az alfejezet eddigi részében, a (6.14)-(6.18) összefüggéseken keresztül. □

A (t_n) számokat **Catalan-számok** -nak is nevezik, a kombinatorikában gyakran találkozhatunk velük. Példaképpen most csak a szigorúan bináris fák számát említjük (lásd a II. "Gráfelmélet" Rész 6. "Fák" c. Fejezetében). Megemlítjük még, hogy Stanley $[St]$ gyűjteményében a Catalan számoknak több mint félszáz tulajdonságát sorolja fel.

6.2.2. A pénzváltási probléma

Hányféleképpen lehet n Forintot felváltani mondjuk $3, 7$ és 11 Ft -os bankjegyekre? Ha lényeges, hogy a bankjegyeket milyen sorrendben adjuk a pénztárosnak, akkor az

$$a_n = a_{n-3} + a_{n-7} + a_{n-11}$$

rekurzióról van szó, mint az előző fejezetben láttuk, és homogén lineáris lévén meg is oldottunk.

Ha azonban lényegtelen, hogy mi a bankjegyek sorrendje, akkor (általánosan $h_1, ..., h_k$ címletű bankókat feltételezve) a következő problémával állunk szemben:

6.11. Pénzváltási probléma: *Legyenek adottak a $h_1, ..., h_k \in \mathbb{N}$, $h_i \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített pozitív egész számok. Hány nemnegatív egész gyöke van tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén a*

$$h_1 y_1 + ... + h_k y_k = n \tag{6.19}$$

egyenletnek?

Természetesen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a_n -el jelöljük a (6.19) egyenlet nemnegatív egész gyökeinek számát, és az is természetes, hogy

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jelöli az (a_n) sorozat generátorfüggvényét, de itt nincs is rekurzió amit felhasználhatnánk $F(x)$ felírására (legalábbis első látásra nincs).

Az előző alfejezet (Catalan számok) mintájára csak arra kell koncentrálnunk, hogy a_n a generátorfüggvény x^n tagjának együtthatója, a kitevő pedig a (6.19) formulában van összeggé alakítva:

$$x^n = \left(x^{h_1}\right)^{y_1} \cdot ... \cdot \left(x^{h_k}\right)^{y_k}$$

ahol $h_1, ..., h_k \in \mathbb{N}$ $(h_i \neq 0)$ adott rögzített számok, és az $y_1, ..., y_k \in \mathbb{N}$ nemnegatív megoldások (lehetőségek) *számát* keressük. Ha eszünkben jut, hogy polinomok szorzásánál szoktuk a kitevőket összeadni és utána az azonos kitevőjű tagok *együtthatóit* összeadni, akkor könnyen felfedezhetjük, hogy $i = 1, ..., k$ esetén kell a

$$G_i(x) := \left(1 + x^{h_i} + (x^{h_i})^2 + (x^{h_i})^3 + ...\right) = \frac{1}{1 - x^{h_i}}$$

"végtelen" polinomokat összeszoroznunk és x^n együtthatóját megkeresni a szorzatban. Így

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} G_i(x) \quad ,$$

vagyis

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^{h_1}) \cdot ... \cdot (1 - x^{h_k})} \quad . \tag{6.20}$$

Most kapott eredményünket is érdemes összefoglalni egy tételben.

6.12. Tétel: *Ha* (a_n) *jelöli a*

$$h_1 y_1 + ... + h_k y_k = n$$

egyenlet nemnegatív egész gyökeinek számát adott $h_1, ..., h_k \in \mathbb{N}$, $h_i \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges rögzített pozitív egész számok esetén,* $n \in \mathbb{N}$ *és* $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *az* (a_n) *sorozat generátorfüggvénye, akkor*

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x^{h_1}) \cdot ... \cdot (1 - x^{h_k})} \quad .$$

Bizonyítás: Az alfejezet eddigi részében, a (6.19)-(6.20) összefüggéseken keresztül. $\square$

Készen vagyunk. Ráadásul a generátorfüggvény racionális törtfüggvény, vagyis parciális törtekre való bontással sorba tudjuk fejteni, sőt még (állandó együtthatójú) lineáris homogén rekurziót is ad problémánkra. (Javasoljuk az Olvasónak ennek végiggondolását és végigszámolását.)

6.13. Példa: Tekintsük a

$$2x + 3y = n$$

egyenletek megoldásainak számát, amit jelöljünk n függvényében a_n -el.

A (6.20) eredmény szerint a feladat generátorfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

amit parciális törtekre bontva az

$$F(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1-\varepsilon^2}{9}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon x} + \frac{1-\varepsilon}{9}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2 x}$$

összefüggést nyerjük, ahol $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a harmadik (komplex) egységgyök. Az első tagot Newton binomiális sora (3.4.Tétel) szerint fejtjük sorba:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= (x-1)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-2-n}\binom{-2}{n}x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{(-2)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!}x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n \quad ,\end{aligned}$$

a többi tag nem okozhat gondot a 3.5. Tétel alapján. A sorbafejtések és az (abszolút konvergens) sorok összevonása után $F(x)$ -ben x^n együtthatója a következő lesz:

$$a_n = \frac{n+1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{1-\varepsilon^2}{9}\varepsilon^n + \frac{1-\varepsilon}{9}\varepsilon^{2n}$$

ami a következő alakra hozható:

$$a_n = \frac{n+1}{6} + \frac{1+(-1)^n}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left((n+1)\frac{2\pi}{3}\right) \quad \square$$

A 8. fejezetben tárgyalt partíciós problémák megoldásánál hasznos lesz a (6.19) pénzváltási probléma $h_1 = \ldots = h_k = 1$ speciális esete:

6.14. Példa: *Hány nemnegatív egész megoldása van az*

$$y_1 + \ldots + y_k = n \tag{6.21}$$

egyenletnek, ahol $n, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes számok ?

Megoldás: A fentiekben láttuk, hogy rögzített $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén a feladat generátorfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^k} \quad ,$$

azonban a (6.21) egyenlet minden $(y_1, ..., y_k)$ megoldásához könnyen megfeleltethetjük az $\{1, ..., k\}$ számok egy n -edosztályú ismétléses kombinációját, vagyis az egyenlet nemnegatív egész gyökeinek száma

$$C_k^{n\ (ism)} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad .$$

A fenti problémára más megoldást mutatunk a 6.5.Feladatban.

A pénzváltási témakör iránt érdeklődőknek ajánljuk még például Shiu $[Sh]$ cikkét.

6.3. Más típusú generátorfüggvények

Mint említettük, az $(a_n) \subset \mathbb{C}$ sorozatok vizsgálatához más típusú generátorfüggvényeket is célszerű használnunk. Most csak röviden felsoroljuk ezeket a (függvény)sorokat, alkalmazásaik részleteiről például Sárközy András $[S]$ könyvében olvashatunk.

Kezdjük a 8.fejezetben majd részletesen tanulmányozandó (ld. pl. 8.10. Állítás) B_n Bell- számok "generátorfüggvényé" -vel:

6.15. Tétel: *Ha B_n jelöli az n -edik Bell-számot, azaz*

$$B_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad , \quad B_0 = 1 \quad ,$$

akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \quad \square$$

Egészen más típusú "generátorfüggvények" az alábbiak.

6.16. Definíció: *Az* $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *számsorozat* **trigonometrikus polinomja** $G_N : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$G_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{2\pi i t n} \quad ,$$

trigonometrikus generátorfüggvénye $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i a_n t} \quad ,$$

Dirichlet[10] **- sora** $D : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad . \quad \Box$$

A fenti függvényeket és általánosításaikat elsősorban a számelméletben használják, melyekről részletesebben például Sárközy András $[Sá]$ könyvében olvashatunk. A Riemann[11] -féle $\zeta(s)$ függvény definíciója

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

mellyel kapcsolatos híres sejtése máig megoldatlan, a számelmélet sok más problémájával kapcsolatban van. ($s = 1$ esetén a *harmonikus-,* $s \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$ esetén a *hiperharmonikus* sornak nevezzük.)

Generátorfüggvények felírására és alkalmazására még további módszereket és trükköket találunk a jelen Fejezet végén levő feladatok között és a szerző $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményében.

Wilf $[W]$ könyvében teljes képet kaphatunk a generátorfüggvények fajtáiról és alkalmazásaik különböző "trükkjei" -ről.

10) P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) német matematikus, végtelen sorokkal, számelmélettel foglalkozott. 20 éves korában mutatta be a francia akadémián a Nagy Fermat-Sejtés $n = 5$ esetére vonatkozó bizonyítását. Egy másik híres tételére ("*Minden* $\{a + nd : n \in \mathbb{N}\}$ *számtani sorozatban végtelen sok prímszám van ha az* $a, n \in \mathbb{N}$ *relatív prím egész számok*") az ELTE egyik végzős diákja, Hegyvári Norbert adott először elemi bizonyítást 1980 -ban.

11) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) német matematikus, a matematika különböző területei között fedezett fel összefüggéseket, újfajta szemléletével lendítette előre a differenciálegyenletek, nemeuklideszi geometriák, a modern számelmélet, stb. vizsgálatát.

6.4. Feladatok

6.1. Feladat: Oldjuk meg az előző fejezet 5.3.Feladatát generátorfüggvény segítségével is.

6.2. Feladat: Hányféleképpen zárójelezhetünk egy n -tényezős $a_1 \cdot ... \cdot a_n$ szorzatot ? (A $\cdot$ művelet kétváltozós de nem feltétlenül asszociatív.)

6.3. Feladat: Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$ -szöget a sokszög belsejében egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani? (A sokszög csúcsai megkülönböztethetők (ún. *számozottak*), azaz a sokszöget elforgatva a kapott felbontást különbözőnek tekintjük.)

6.4. Feladat: Hányféleképpen lehet egy körbe írt szabályos $2n$ -szög csúcsait páronként összekötni úgy, hogy a kapott szakaszok *ne* messék egymást?

6.5. Feladat: Hány nemnegatív megoldása van az $y_1 + ... + y_k = n$ egyenletnek tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám esetén ?

További feladatokat találunk még a szerző $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményében.

6.5. Megoldások

6.1. Feladat: Ha c_n jelöli a síkrészek számát, akkor nyilván $c_0 = 1$, továbbá minden újabb egyenes egy újabb síkrészt "hasít", majd mindegyik (eddigi) egyenest "átlépve" újabb síkrészeket "hasít ketté", vagyis

$$c_{n+1} = c_n + 1 + n \qquad (n \in \mathbb{N}) \quad .$$

Ez alapján a (c_n) sorozat $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ generátorfüggvényére az

$$F(x) - c_0 = xF(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

összefüggést kapjuk, ami racionális törtfüggvényt ad $F(x)$ értékére, és $\frac{d}{dx}$ az (x szerinti) differenciálást jelenti. (Lásd még a 10.8. feladatot a $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményben.)

6.2. Feladat: Jelölje b_n a feladat megoldását n tényező esetén. A legutolsó elvégzendő szorzásban a két tényező az eredeti $a_1 \cdot ... \cdot a_n$ szorzat első i és utolsó $n-i$ tagjából áll valamilyen sorrendben:

$$(a_1 \cdot ... \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} \cdot ... \cdot a_n) \quad ,$$

melyek lehetséges zárójelezéseinek száma a (b_n) sorozat definíciója miatt b_i és b_{n-i} , vagyis a keresett rekurzió

$$b_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} \quad (n \geq 2) \ ,$$

és $b_1 = 1$, hiszen legalább egy tag szükséges mind a bal mind a jobb oldali tényezőhöz, vagyis $1 \leq i \leq n-1$, $b_1 = 1$ pedig OK mind szemléletünk mind a rekurzió szemszögéből. A

$$b'_n := b_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

helyettesítéssel pedig a Catalan számok (6.14) -ben megismert

$$\begin{aligned} b'_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} b'_i b'_{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ b'_0 &= 1 \end{aligned}$$

rekurzióját kapjuk, vagyis

$$b_n = t_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-2} \qquad (n \geq 1) \quad .$$

6.3. Feladat: Jelöljük c_n -el az $n+2$ -szög kívánt felbontásainak számát $(n \geq 1)$, nyilván $c_1 = 1$. Válasszuk ki az adott $n+2$ -szög $n+1$ -edik és $n+2$ -dik csúcsai által határolt oldalát és osztályozzuk a felbontásokat aszerint hogy hol van annak a háromszögnek a harmadik csúcsa (mondjuk az s -edik csúcsban, $1 \leq s \leq n$), amelynek az alapja a kiválasztott csúcs. Ez a háromszög két másik részre vágja a sokszöget melyeknek $s+1$ és $n-s+1$ csúcsuk van. A részeket egymástól függetlenül bonthatjuk fel háromszögekre, vagyis a

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{s=1}^{n} c_{s-1} c_{n-s-1} \quad (n \geq 1) \\ c_0 &= 1 \end{aligned}$$

rekurziót kapjuk (a rekurzió miatt most a szakaszt *kétszög*nek hívjuk és c_0 -át 1 -nek választjuk). Könnyen láthatóan a rekurzió

$$c_{n+1} = \sum_{s=0}^{n} c_s c_{n-s} \quad (n \geq 0)$$

alakban is írható, ami éppen a Catalan számok (6.14) rekurziója.

6.5. Feladat: Ez a pénzváltási probléma speciális esete, generátorfüggvénye $F(x) = (1-x)^{-k}$, sorfejtés után megkapjuk a 2.2. Feladat megoldásában már megismert $\binom{n+k-1}{k-1}$ formulát.

6.6. Hivatkozások

[Cs] Csákány Béla: *Zárójeles megjegyzések,* Polygon VII./1.(1994),31-48.

[BSz] Buzáné Kiss Piroska, Szalkai István: *Segédeszközünk a generátorfüggvény,* Dunaújvárosi Főiskola Jubileumi Konferenciakötete, 1999., 276-279.old.

[$Sá$] Sárközy András: *Számelmélet, Példatár,* Műszaki Kiadó Bp., ("Bolyai könyvek" sorozat), 1976

[Sh] Shiu,P.: *Computations of the Partition Function,* The Math. Gazette

[St] Stanley,R.P.: *Enumerative Combinatorics,* Cambridge Univ. Press, vol 1 (1997), vol 2 (1999)

[W] Wilf,S.H: *Generatingfunctionology,* Academic Press Inc., USA, 1990.

7. fejezet

Extremális halmazrendszerek

SPERNER TÉTELE. ERDŐS-DEBRUIJN, RYSER ÉS FISHER TÉTELEI. ERDŐS-KO-RADO TÉTELE. EGYÉB EREDMÉNYEK. SZIMPLEXEK.

Az *extremális* szó latin eredetű, jelentése "szélsőséges, túlzó, rendkívül nagy". Véges halmazok tanulmányozásánál gyakran merül fel alábbi típusú kérdés:

" Adott n elemű alaphalmaznak hány, adott tulajdonságú részhalmaza adható meg legfeljebb ? "

E fejezetben a fenti kérdésre adunk választ különböző tulajdonságok esetén.

Megemlítjük, hogy ha egy halmazrendszert *hipergráf* nak tekintünk (a definíciót a II.rész 1. fejezetében találhatjuk meg), amiket pedig legtöbbször *incidencia mátrixukkal* ábrázolunk (II. rész 4. fejezet), akkor a jelen fejezetben tárgyalt problémák *mátrixok* oszlopaira és soraira vonatkozó *extremális* kombinatorikai problémák! Sajnos az ilyen irányú eredményekre most nincs időnk kitérni.

A legelső ilyen típusú eredmény E. Sperner[1)] -től származik 1928 -ból.

7.1. Sperner tétele

7.1. Tétel (E. Sperner,1928,[*Sp*])**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz, $|S| = n$, $A_i \subseteq S$ tetszőleges részhalmazok ($i = 1, ..., m$) amelyekre teljesül, hogy*

$$A_i \nsubseteq A_j \qquad ha\ i \neq j \tag{7.1}$$

[1)] Emanuel Sperner (1905-1980) német matematikus.

akkor

$$m \le \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}, \tag{7.2}$$

és a becslés éles.

7.2. Megjegyzések: (i) A tétel utolsó állítása (*"a becslés éles"*) azt fejezi ki, hogy a (7.2) egyenlőtlenségben adott felső korlát tovább már nem élesíthető, azaz nem csökkenthető. Ez pedig triviális, hiszen ha bármely n -elemű halmaz ($n \ge 1$) összes k -elemű részhalmazát vesszük ($1 \le k \le n$), akkor azok (méreteiknél fogva) teljesítik a (7.1) tulajdonságot és számuk $\binom{n}{k}$, amely pedig $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ -nél a legnagyobb. (Ismét $[\mathbf{x}]$ jelöli az x tetszőleges valós szám **egész részét**[2], azaz az x -nél nem nagyobb, legnagyobb egész számot.) A Stirling-formula szerint a (7.2) -beli felső becslés

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \approx 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

azaz körülbelül $\frac{0{,}78}{\sqrt{n}}$ része az n -elemű halmaz összes részhalmaza számának, 2^n -nek (ld. a 7.4. Feladatot).

A tétel erőssége természetesen az, hogy ennél *több* részhalmazt semmi más módon *nem* tudunk megadni!

(ii) Az $A_1, ..., A_m$ halmazok méreteiről semmi megkötésünk nincs, azonban a bizonyításból kitűnik, hogy legtöbb, a (7.1) tulajdonságot kielégítő halmazt akkor tudunk egyszerre megadni, ha az A_i halmazok méretei azonosak, mégpedig mindegyik halmaz $\frac{n}{2}$ elemű. Ha viszont a halmazok méreteire is adunk feltételeket (mint például $\mathbb{R}^n$ szimplexeinél[3]), akkor már a (7.2) becslés nem marad érvényben, ilyen irányú eredményeket a 7.3. és 7.4. Tételekben ismertetünk.

(iii) A (7.1) tulajdonságot szokás **Sperner -tulajdonság**nak is nevezni, sok kombinatorikus összeszámlálási problémánál merülnek fel ilyen tulajdonságú részhalmaz-családok, például diszkrét programozási (mint pl. [ViNj,'87]-ben), egész értékű lineáris programozási[4] (ld.pl.[V]-ben), vagy lineáris algebrai feladatoknál (ld. [LSz1], [LSz2], [Sz]). Ilyen típusú eredményeket részletesen a 7.5. *"Szimplexek"* c. alfejezetben ismertetünk.

---

[2] francia eredetű szóval "entier x" [ejtsd: "antyié"]

[3] ld. a 7.5. alfejezetben

[4] *Integer Linear Programming,* vagyis ILP

Bizonyítás (7.1.Tétel)**:** A bizonyítás **Lubell**[5] -től ered.
Az S halmaz részhalmazainak $(X_1, ..., X_t)$ sorozatát $(X_i \subseteq S)$ nevezzük **lánc** -nak, ha

$$X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq ... \subsetneqq X_t \quad . \tag{7.3}$$

Az S halmaz összes n -hosszúságú láncainak száma $n!$ (hiszen $|S| = n$ miatt egy (7.3) alatti n -hosszúságú lánc esetén $X_i \backslash X_{i-1}$ $(i \leq t)$ és X_1 csak egyelemű halmazok lehetnek, vagyis az $X_0 := \emptyset$ jelöléssel az

$$(\ X_i \backslash X_{i-1}\ :\ i = 1, ..., n\ )$$

sorozat éppen S elemeinek egy permutációját adja).

A fenti gondolatmenethez hasonlóan a következőt is beláthatjuk: ha $|A_i| = k_i$, akkor A_i legfeljebb $k_i! \cdot (n - k_i)!$ láncban szerepelhet.

Nyilvánvalóan a (7.1) Sperner-tulajdonság miatt különböző $i \neq j$ indexekre A_i és A_j csak különböző láncoknak lehetnek tagjai, ezért, S láncait összeszámolva kapjuk:

$$n! \geq \sum_{i=1}^{m} k_i! \cdot (n - k_i)! \geq m \cdot \left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)! \tag{7.4}$$

hiszen az binomiális együtthatók közül a középső(k) a legnagyobb(ak) (ld. a 3.13. Tételt a 3. fejezetben).
A (7.4) egyenlőtlenségből már adódik a bizonyítandó (7.2) egyenlőtlenség. □

A tételt még gráfelméleti eszközökkel is bebizonyítjuk a II. rész 11. Fejezetében (a Kőnig-Hall tétel segítségével).

Bizonyítás nélkül megemlítjük a fenti tétel két általánosítását, és csak felhívjuk a figyelmet, hogy e tételnek is, mint minden extremális halmazokra vonatkozó tételnek, már számtalan változata, élesítése született!

7.3. Tétel: (Sperner,1928,[*Sp*])**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz, $|S| = n$ és $A_i \subseteq S$ tetszőleges, de legfeljebb k -elemű részhalmazai S -nek valamely fix $k \leq \frac{n}{2}$ számra $(i = 1, ..., m)$, melyekre teljesül a* (7.1) *Sperner tulajdonság, akkor*

$$m \leq \binom{n}{k}$$

és a becslés (nyilván) éles. □

[5] David Lubell, amerikai matematikus

7.4. Tétel (Lubell,1969,[L])**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz,* $|S| = n$, $A_i \subseteq S \quad (i = 1, ..., m)$ *tetszőleges részhalmazok, amelyekre a* (7.2) *Sperner-tulajdonság teljesül, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$$

és a becslés (nyilván) éles. $\square$

Most pedig nézzünk más irányú "extrém" tételek után!

7.2. Erdős-DeBruijn, Ryser és Fisher tételei

7.5. Tétel (Erdős[6] - DeBruijn[7])**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz,* $|S| = n$, $A_i \subseteq S$ *tetszőleges részhalmazok* $(i = 1, ..., m)$ *amelyekre teljesül, hogy*

$$|A_i \cap A_j| = 1 \quad ha \quad i \neq j \tag{7.5}$$

akkor

$$m \leq n \quad , \tag{7.6}$$

és egyenlőség csak *az alábbi három esetben lehetséges, ha* $S = \{s_1, ..., s_n\}$:

(a) $A_1 = S \backslash \{s_1\}$ *és* $A_i = \{s_1, s_i\}$ *ha* $1 \leq i \leq n-1$,

(b) $A_1 = s_1$ *és* $A_i = \{s_1, s_i\}$ *ha* $1 \leq i \leq n-1$,

(c) *az* $\{A_1, ..., A_n\}$ *halmazok véges geometriát*[8] *képeznek az S halmazon, azaz*

(1) $|A_i \cap A_j| = 1 \quad ha \quad i \neq j$ (vö.(7.5))

---

6) Erdős Pál (1913-1996) századunk kiemelkedő matematikusa. Magyar származású, halmazelmélettel, kombinatorikával, számelmélettel, analízissel, a valószínűségszámítás kombinatorikus alkalmazásaival ... foglalkozott. 1963 -tól "utazó, nemzetközi" tudós: megállás nélkül látogatta szinte az egész világ országait, konferenciáit, valamennyi említésre érdemes matematikussal kapcsolatban állt, több mint ezer cikkében (ami egy átlag professzor termésének kb. tízszerese) számtalan társszerzővel működött együtt, rendszeres problémafelvetéseivel rengeteg fiatal kutatót indított el tudományos pályáján, egyengette útjukat. Életéről, szakmai munkásságáról szóló számtalan cikk, könyv jelent meg, magyar nyelven például legutóbb 1999 -ben "*Az agyam nyitva áll*" címmel, vagy a WWW-HISTORY.MCS.ST-AND.AC.UK/HISTORY/MATHEMATICIANS címen is olvashatunk róla röviden.

7) Nicholaas Govert (Dick) de Bruijn (1918-2012) holland matematikus

8) **Definíció:** *Tetszőleges véges $S \neq \emptyset$ halmaz és részhalmazainak egy* $\mathcal{H} = \{A_1, ..., A_m\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ *rendszerét, vagyis az* $(S, \mathcal{H})$ struktúrát **véges geometriá***nak nevezzük, ha a* **c)** *pontban felsorolt (1),(2) és (3) axiómák teljesülnek.* $\square$

(2) $\forall x, y \in S \quad \exists i\ A_i \supseteq \{x, y\}$

(3) *Létezik* S *-nek négy eleme, amelyek közül semelyik három sincs egy* A_i *-ben.* $\square$

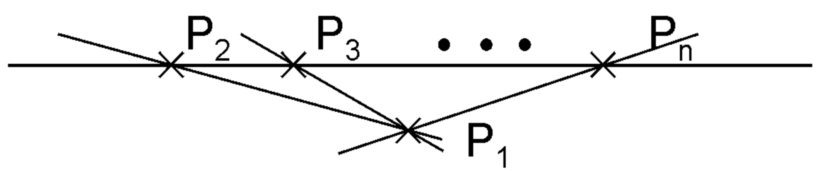
Az Erdős-DeBruijn tétel egyik meglepő alkalmazása az alábbi (kombinatorikus) *geometria*i tétel:

7.6. Tétel (Gallai Tibor[9])**:** **(i)** *A sík (tér) bármely* m *pontja, ha nem illeszkednek egyetlen egyenesre, akkor legalább* m *egyenest határoznak meg.*

(ii) (az előző duálisa): *A sík bármely* m *egyenese, ha nem illeszkednek egyetlen pontra, akkor legalább* m *metszéspontot határoznak meg.*

Megjegyzések: **(i)** Mivel az állítás a geometria axiómiái közül csak az ún. "illeszkedési" axiómákat használja fel, amely axiómák a pontok és egyenesek közötti $\in$ ("eleme") kapcsolatokat használják, nem meglepő, hogy egy ilyen kombinatorikus állítást egy "tiszta" kombinatorikus érvelés (is) igazol.

(ii) No persze m pont akár $\binom{m}{2} = \mathcal{O}(n^2)$ egyenest is meghatározhat, ha bármely kettő egy-egy újat határoz meg (azaz bármely három pont nincs egy egyenesen), de Gallai tételének állítása sem élesíthető tovább, amit az alábbi elrendezés is szemléltet:



Legkevesebb egyenes m *ponton*

7.1. ábra

Bizonyítás (7.6.Tétel): Csak az (i) részt bizonyítjuk, az egyenesek és pontok szerepének felcserélésével a másik rész ugyanígy igazolható.

Legyenek tehát adottak a $P_1, ..., P_m$ pontok, nem egy egyenesen. Legyen ekkor az S halmaz az általuk meghatározott egyenesek halmaza, és legyen $i = 1, ..., m$ esetén

$$A_i := \{e \in S \mid e \ni P_i\}$$

a P_i pontra illeszkedő S -beli egyenesek halmaza. Ekkor könnyen láthatóan teljesülnek az Erdős-DeBruijn tétel feltételei, azaz $m \leq n$, Q.E.D. $\square$

[9] eredeti nevén: Grünwald Tibor (1912-1992) magyar matematikus.

Az Erdős-DeBruijn (7.5.) Tétel általánosítása Ryser következő eredménye:

7.7. Tétel (Ryser[10])**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz, $|S| = n$, $t < n$ tetszőleges rögzített szám, $A_i \subseteq S$ tetszőleges részhalmazok $(i = 1, ..., m)$ amelyekre teljesül, hogy*

$$|A_i \cap A_j| = t \quad ha \quad i \neq j \tag{7.7}$$

akkor

$$m \leq n \qquad . \quad \square \tag{7.8}$$

Megjegyzés: A $t = n$ eset nyilvánvalóan csak $m = 1$ részhalmazt engedne meg. A (7.8) becslés élessége, nem ismert, az okokat máris ismertetjük.

A kombinatorikában egyre több helyen alkalmazhatók a *lineáris algebrai* módszerek, példának Babai László és Frankl Péter $[BF]$ könyvét említhetjük. Hasonlóan a generátorfüggvény-függvény módszerhez, fő előnyük erejükben és gyakran eleganciájukban rejlik. Hátrányuk viszont, hogy nehezebb "átlátni", követni min is múlik a bizonyítás, mik is az extremális esetek (konstrukciók). A következő bizonyítás jól illusztrálja a fenti előnyöket és hátrányokat (és természetesen a tétel állítása önmagában is fontos!).

Bizonyítás (7.7.Tétel): Tekintsünk egy n -dimenziós V vektorteret egy $\{e_1, ..., e_n\} \subset V$ ortonormált bázissal. Feltehető, hogy $S = \{e_1, ..., e_n\}$, azaz $A_i \subseteq \{e_1, ..., e_n\}$. Rendeljük hozzá mindegyik A_i halmazhoz a benne levő e_j vektorok összegét, legyen ez $\mathbf{a_i} \in V$. Megmutatjuk, hogy az $a_1, ..., a_m$ vektorok lineárisan függetlenek egymástól - ebből már adódik a bizonyítandó $m \leq n$ (7.8) egyenlőtlenség. A lineáris függetlenséget pedig az alábbi általános eredmény alapján tudjuk ellenőrizni:

7.8. Lemma: *Tetszőleges skaláris szorzatos $(V, < >)$ vektortérben a tetszőleges $a_1, ..., a_m \in V$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek , ha az alábbi*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ f(\lambda_1, ..., \lambda_m) &:= (\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_m a_m)^2 \end{aligned}$$

függvénynek csak a $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ *pontban van zérushelye.*

Bizonyítás: Házi Feladat. $\square$

---

[10]) Herbert John Ryser (1923-1985) amerikai matematikus

Az alábbi számolásban felhasználjuk, hogy a konstrukció miatt $a_i^2 = |A_i|$ és a (7.7) miatt $\langle a_i, a_j \rangle = t$. Ekkor pedig

$$\begin{aligned}(\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_m a_m)^2 &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 a_i^2 + 2 \cdot \sum \sum_{1 \le i < j \le m} \lambda_i \lambda_j \langle a_i a_j \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |A_i| + 2t \cdot \sum \sum_{1 \le i < j \le m} \lambda_i \lambda_j + t \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 - t \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (|A_i| - t) + t \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right)^2 \qquad (7.9)\end{aligned}$$

(i) Ha mindegyik A_i halmaz t -nél több elemű, akkor (7.9) -ben csak pozitív számok összege szerepel, ami csak úgy lehet 0, ha mindegyik $\lambda_i^2 = 0$, mint tudjuk.

(ii) Ha van az A_i halmazok között legfeljebb t elemű, ami persze a (7.7) feltétel miatt csak *pontosan* t elemű lehet, akkor csak *egyetlen* ekkora méretű A_{i_0} halmaz lehet közöttük (ismét (7.7) miatt). Ekkor az előző eset gondolatmenetét alkalmazzuk a megmaradt halmazokra, és kapjuk, hogy $\lambda_j = 0$ ha $j \neq i_0$. Ez esetben (7.9) értéke pontosan $\lambda_{i_0}^2$ lesz, és $\lambda_{i_0}^2 = 0$ pontosan akkor ha $\lambda_{i_0} = 0$.

Vagyis, az előző Lemma állítását felhasználva, az $a_1, ..., a_m \in V$ vektorok mindkét esetben valóban lineárisan függetlenek, vagyis $m \le n$, ami éppen a bizonyítandó (7.8) állítás. Q.E.D. $\square$

Megjegyezzük, hogy a bizonyításban szereplő (ii) esetben még egyszerűbben is célhoz érhetünk. Ha ugyanis egyedül az A_{i_0} halmaz (pontosan) t -elemű, akkor ismét a (7.7) és az $|A_{i_0}| = t$ feltételeket használva kapjuk, hogy

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} = A_{i_0} \qquad \text{ha } j_1, j_2, i_0 \text{ különbözőek}$$

(vagyis az $\{A_i \colon i \le m\}$ halmazrendszer ún. Δ -rendszer[11]).

Ezek alapján pedig a lehető legtöbb A_i halmazt csak úgy kaphatjuk, ha az $A_j \backslash A_{i_0}$ különbségek a lehető legkisebbek, azaz egyeleműek. Mivel pedig $A_j \subseteq S$ és $|S| = n$, ezért mindenképpen $m \le n - t \le n$, Q.E.D. $\square$

Bár Ryser 7.7.Tételéből következik, mégis megemlítjük az alábbi eredményt, mely elsősorban a statisztikában használatos.

[11] **Definíció:** *Egy tetszőleges $\{A_i : i \in I\}$ halmazrendszert* **Δ -rendszer***nek nevezünk, ha valamely B halmazra $A_i \cap A_j = B$ teljesül minden $i \neq j \in I$ indexek esetén .* $\square$

7.9. Tétel (Fisher[12]): *Ha S tetszőleges nemüres halmaz, $|S| = n$, $t, k < n$ tetszőleges rögzített számok, $A_i \subseteq S$ tetszőleges k -elemű részhalmazok $(i = 1, ..., m)$, amelyekre teljesül, hogy*

$$|A_i \cap A_j| = t \quad ha \quad i \neq j$$

akkor

$$m \leq n \quad . \qquad \square$$

A becslés élessége, mint a Ryser tételnél említettük, nem ismert.

7.3. Erdős-Ko-Rado tétele

7.10. Tétel (Erdős, Ko[13], Rado[14],1961)**:** *Ha S tetszőleges nemüres halmaz, $|S| = n$, $A_i \subseteq S$ tetszőleges, legfeljebb k -elemű részhalmazok $(i = 1, ..., m$ és $k \leq \frac{n}{2}$ tetszőleges$)$, amelyekre teljesül, hogy*

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad ha \quad i \neq j \tag{7.10}$$

akkor

$$m \leq \binom{n-1}{k-1} \tag{7.11}$$

és a becslés éles. $\square$

7.11. Megjegyzések: (i) A (7.10) becslés élessége könnyen belátható, ha rögzítjük az S halmaz egy tetszőleges $s_0 \in S$ elemét, és az A_i $(i \leq m)$ halmazokat úgy készítjük, hogy $S\backslash\{s_0\}$ minden $k-1$ -elemű részhalmazához hozzávesszük az s_0 elemet. Ekkor (7.10) nyilvánvalóan teljesül és $m = \binom{n-1}{k-1}$.

A tétel erőssége persze ismét az, hogy ennél több halmazt nem lehet megadni, ha (7.10) -et biztosítani akarjuk.

(ii) A halmazok számára kapott $\binom{n-1}{k-1}$ felső becslés persze jóval kisebb (mennyivel?), mint az összes k -elemű halmazok $\binom{n}{k}$ száma, de hát ez a (7.10) feltétel ára!

---

12) Sir **Ronald Aylmer Fisher** (1890-1962) angol statisztikus. Köszönjük **Hujter Mihály** segítségét. Lásd még [F].

13) **Ke Zhao**, másképpen **Chao Ko** (1910-2002) kínai matematikus.

14) **Richard Rado** (1906–1989) német születésű angliai matematikus, gyakran dolgozott közösen Erdős Pállal, *nem* tévesztendő össze **Radó Tibor** (1895-1965) magyar matematikussal.

7.4. Egyéb eredmények

A kombinatorika eme rettentő dinamikusan fejlődő területének legújabb eredményeit még vázlatosan sem vállalkozunk áttekinteni, ezért csak néhány (kezünkbe került) eredményt sorolunk fel. Az érdeklődőknek például Sali Attila $[Sa]$ értekezését ajánlhatjuk, amelyben a legújabb eredemények találhatjuk meg, magyar nyelven.

7.12. Tétel (Ray-Chaudhuri,Wilson,1975, $[RW]$)**:** *Ha* $A_1, ..., A_m \subseteq S$ *az* n *-elemű* S *halmaz* k *-elemű részhalmazainak egy családja* $(azaz\ |A_i| = k)$, $L = \{r_1, ..., r_s\}$ *nem negatív egész számok egy halmaza, és*

$$|A_i \cap A_j| \in L \quad ha \quad i \neq j \tag{7.12}$$

akkor

$$m \le \binom{n}{s} . \qquad \square$$

7.13. Tétel (Babai László, Frankl Péter,1988 $[BF]$)**:** *Az előző tétel feltételei mellett ha még a*

$$lnko(r_1, ..., r_s) \quad \nmid \quad k \tag{7.13}$$

feltétel is teljesül, akkor

$$m \le n . \qquad \square$$

7.14. Tétel (Róka Sándor,1992, $[R1]$)**:** *A 7.12. tétel feltételei, de* (7.12) *helyett a*

$$|\ A_i \setminus A_j\ | \in L \quad ha\ i \neq j \tag{7.14}$$

vagy a

$$|\ A_i \Delta A_j\ | \in L \quad ha\ i \neq j \tag{7.15}$$

feltétel(15) *teljesülése esetén szintén*

$$m \le \binom{n}{s} . \quad \square$$

15) $A\Delta B := (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$ az A és B halmazok **szimmetrikus differenciá***ja*. $\square$

7.15. Tétel (Róka Sándor,1993, [$R2$])**:** *Ha $A_1, ..., A_m \subset S$ az n -elemű S halmaz 3 -elemű részhalmazainak egy családja (azaz $| A_i |= 3$), amelyekre*

$$| A_1 \cap A_2 \cap A_3 | \leq 1 \qquad \textit{ha} \ \ i, j, k \ \ \textit{különbözőek}$$

akkor

$$m \leq \frac{1}{3} n(n-1)$$

és a becslés nagyságrendjében pontos. □

7.16. Definíció: *Egy tetszőleges S halmaz $A_1, ..., A_m \subseteq S$ részhalmazainak $\{A_1, ..., A_m\}$ rendszere* **metszőrendszer**, *ha S minden $x \in S$ eleme előáll (néhány) A_i halmaz metszeteként, azaz*

$$x = \cap\{A_i : i \in I_x\} \qquad \textit{valamely } I_x \subset \{1, ..., m\} \textit{ halmazra.}$$

Az $\{A_1, ..., A_m\}$ metszőrendszer **független** , *ha közülük bármelyiket elhagyva a többi már nem alkot metszőrendszert.* □

7.17. Tétel (Róka Sándor,1997, [$R3$])**:** Ha $A_1, ..., A_m \subseteq S$ *független metszőrendszert alkot az n -elemű S halmazon,akkor*

$$c_1 log_2(n) \leq m \leq c_2 n^2$$

és a korlátok nagyságrendjükben ($\mathcal{O}(\log(n))$ illetve $\mathcal{O}(n^2)$) *pontosak.* □

7.18. Tétel (Tuza Zsolt, 1987)**:** *Tetszőleges $A_1, B_1, ..., A_m, B_m \subseteq S$ $(i \leq m)$ halmazok esetén*

a) *ha* $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ minden $i \neq j$ *esetén, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1$$

b) *ha* $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ minden $i < j$ *esetén, és* $a := \max_i |A_i|$, $\dot{b} := \max_i |B_i|$, *akkor*

$$m \leq \binom{a+b}{a}$$

c) *ha* $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ vagy $B_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $i \neq j$ *esetén, akkor*

$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|} q^{|B_i|} \leq 1$$

tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}_+$, $p + q = 1$ pozitív valós számokra. □

Figyeljük meg az a), b), c) pontokban levő feltételek közötti különbségeket!

7.5. Szimplexek

Most vázlatosan ismertetjük a kombinatorikai (és a lineáris algebrai) módszerek egy kémiai alkalmazását. Ezzel ismét arra szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy a matematika különböző területei (és más tudományágak) egybevetésével születhetnek a legmeglepőbb új eredmények. A témáról részletesebben a szerző $[Sz1]$, $[Sz2]$, $[LSz1]$, $[LSz2]$ és $[DLSz]$ cikkeiben olvashatunk.

Néhány adott elem vagy vegyület között szeretnénk az összes (elméletileg lehetséges) *minimális reakcióegyenletet* felírni. (Most az elemeket is vegyületeknek hívjuk.) Álljanak tehát az $A_1, ..., A_m$ vegyületek az $E_1, ..., E_n$ elemekből:

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot E_i$$

ahol $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ természetes számok minden $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ index esetén. Vagyis az A_j vegyületet azonosíthatjuk az

$$\mathbf{A_j} := [a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}]^T \in \mathbb{R}^n$$

n -dimenziós vektorral.

Egy kémiai *reakció* (ha minden vegyületet az egyenlet egyik oldalára rendezünk) nem más, mint az A_j vegyületek egy olyan lineáris kombinációja, mely a 0 vektort (elem nélküli vegyületet) adja eredményül[16]. A kémiai reakció *minimális*, ha bármelyik benne szereplő vegyületet elhagyva reakció már nem jöhet létre a többi vegyület között.

A lineáris algebra nyelvére lefordítva, kémiai reakció pontosan akkor *létezik* (létezhet) a vegyületek egy $\{A_j : j \in S\}$ részhalmaza között, ahol $S \subset \{1, 2, ...m\}$ tetszőleges részhalmaz, ha a

$$\sum_{j \in S} x_j . A_j = 0 \tag{7.16}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása az $x_j \in \mathbb{R}$ ($j \in S$) ismeretlenekre[17] . Vagyis az $\{A_j : j \in S\}$ vektorhalmaz lineárisan

[16] A reakciókat most csak matematikai szempontból tekintjük, módszerünk például megengedi a 2Au+6HCl=2AuCl +3H reakciót is, ami a valóságban normál körülmények között nem játszódik le.

[17] Egy ilyen megoldásrendszer egyértelműen meghatároz egy reakciót: mivel nyilvánvalóan $x_j \in \mathbb{Q}$ minden $j \in S$ esetén, a közös nevezővel bővítve, majd a pozitív és negatív megoldásokat szétválasztva kapjuk a reakcióegyenlet két oldalát.

összefüggő. A fenti reakció pedig akkor *minimális*, ha egyetlen vegyületet sem hagyhatunk el úgy, hogy a megmaradottak között reakció jöhetne létre, azaz *bármilyen* $T \subset S$, $T \neq S$ valódi részhalmaz esetén az $\{A_j \colon j \in T\}$ vektorhalmaz elemei *lineárisan függetlenek.*

A fenti észrevételek alapján született az alábbi általános definíció:

7.19. Definíció (pl.[KP])**:** *Vektorok egy* $C = \{b_j : j \in S\} \subset \mathbb{R}^n$ *halmazát* **(algebrai) szimplex***nek nevezzük, ha* C *elemei lineárisan összefüggők, de bármely* $T \subset S$, $T \neq S$ *indexhalmaz esetén a* $\{b_j : j \in T\}$ *vektorok lineárisan függetlenek. (Vagyis* C minimális *lineárisan összefüggő vektorhalmaz.)* $\square$

A fenti fogalom nem teljesen fedi a szokásos (geometriai) szimplex fogalmát, bár rokon vele. A továbbiakban mi egyszerűen csak "szimplex" -et írunk, és az algebrai szimplexek fogalmát használjuk[(18)].

Szimplexek vizsgálatakor, mint alább kiderül, nem a vektortér műveletei, hanem csak a vektorhalmazok tartalmazási viszonyai (pl. "független halmaz része is független") játszanak szerepet. Így, ha adott vegyületek között a létrejöhető minimális reakciók *számát* kérdezzük, akkor tiszta *kombinatorikai problémá*hoz érkezünk[(19)].

7.20.Probléma: *Vektorok egy tetszőleges* $H := \{A_j \colon j < m\} \subset \mathbb{R}^n$ *(véges) halmazának részhalmazai között hány szimplex található minimálisan ill. maximálisan, és mik az extremális konstrukciók ?*

A "hány" kérdésre a (majdnem) pontos választ [$LSz1$] és [$LSz2$]-ben találhatjuk, az eredményeket és egy érdekes bizonyítást alább ismertetjük[(20)]. [$LSz1$] -ben pontos választ találunk arra az esetre, ha H-ban párhuzamos vektorokat[(21)] is megengedünk. Ha pedig H -ban *nem* engedünk meg párhuzamos vektorokat, akkor csak $\mathbb{R}^3$ -ben ismerjük a pontos választ és a minimális konfigurációt, nagyobb dimenziókban csak sejtésünk van, a részletek [$LSz2$] és [$DLSz$] -ben találhatók meg. [$Sz1$] -ben egy gyors, $\mathcal{O}(m^{n+1})$ futásidejű (azaz rögzített dimenzió esetén *polinomiális*) algoritmust ajánlunk, amely tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^n$ véges vektorhalmazban megtalálja az összes

[18)] Tovább is léphetnénk: a reakció**mechanizmusok** pedig reakcióvektorok olyan lineáris kombinációi, amelyek 0 vektort adják eredményül, és a mechanizmus pontosan akkor *minimális,* ha a reakcióvektorok szimplexet alkotnak, s.í.t. $\square$

[19)] Lásd a 7.25.(iv) Megjegyzést.

[20)] [$P1$]-ben a (7.16) homogén lineáris egyenletrendszerek néhány más tulajdonságát tárgyalja a szerző.

[21)] azaz izomer- vagy többszörös molekulákat, vagy nagyobb dózisokat szimplexet. Hangsúlyozzuk, hogy H összes részhalmazát nem érdemes végignéznünk, hiszen ez 2^m számú részhalmazt jelentene, ahol $m = |H|$, ez *exponenciálisan* sok idő! Az érdeklődők még $[Sz2]$ -ben olvashatnak bővebben a szimplexek különböző felhasználásairól.

Most számoljuk meg, hogy adott $H \subset \mathbb{R}^n$, $|H| = m$ (véges) vektorhalmazban mennyi szimplex is lehet *legfeljebb* és *legalább*. Az egyszerűség kedvéért jelölje **simp(H)** a H-ban levő szimplexek számát, továbbá a párhuzamos vektorokat nevezzük most *ekvivalensek*nek. $\square$

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy bár mi elsősorban kémiai alkalmazásokat emlegetünk (reakciók és mechanizmusok), a lineáris algebrai szimplex fogalma teljesen általános lévén a jelen alfejezetben vizsgált probléma, és így eredményeink is szintén általánosak!

7.21.Tétel (LaFlamme,Szalkai 1991,$[LSz1]$)**:** *Adott méretű $H \subset \mathbb{R}^n$ vektorhalmazok közül, melyek kifeszítik $\mathbb{R}^n$ -et, simp(H)* pontosan akkor *maximális, ha H bármely n vektora lineárisan független.* $\square$

7.22.Tétel (LaFlamme,Szalkai 1991,$[LSz1]$)**:** *Adott méretű $H \subset \mathbb{R}^n$ vektorhalmazok közül, melyek kifeszítik $\mathbb{R}^n$ -et, simp(H) minimális* akkor, ha *H pontosan n lineárisan független ekvivalencia osztályból áll, melyek kifeszítik $\mathbb{R}^n$ -et, és amely ekvivalencia osztályok méretei között az eltérés legfeljebb* 1 *lehet.* $\square$

7.23.Következmény: *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$, H kifeszíti* $\mathbb{R}^n$ *-et, $|H| = m$ és $m = a \cdot n + b$* ahol $0 < b < n$, *akkor*

$$b \cdot \binom{a+1}{2} + (n-b) \cdot \binom{a}{2} \quad \leq \quad simp(H) \quad \leq \quad \binom{m}{n+1} \qquad ,$$

és ha m osztható n -nel (azaz $b = 0$), akkor

$$n \cdot \binom{\frac{m}{n}}{2} \quad \leq \quad simp(H) \quad \leq \quad \binom{m}{n+1} \qquad . \quad \square$$

7.24.Tétel (LaFlamme,Szalkai 1993,$[LSz2]$)**:** *Amennyiben $H \subset \mathbb{R}^3$ nem tartalmaz párhuzamos vektorokat, $|H| = m \neq 3,\ 4,\ 7$, H kifeszíti $\mathbb{R}^3$ -at, akkor simp(H)* pontosan akkor *minimális, ha H vektorai két metsző síkon helyezkednek el: $\{u_1, u_2, u_3\} \subset H$ lineárisan független vektorok, $u_4 \in H$ az $\{u_1, u_2\}$ vektorok által kifeszített síkon van, míg H többi vektora az $\{u_1, u_3\}$ síkra esik.* $\square$

7.25. Megjegyzések: (i) Mind a képletekből, mind az alábbi bizonyításból is kiolvasható, hogy H nem feltétlenül kell, hogy kifeszítse $\mathbb{R}^n$ -et. Ha ugyanis H csak egy $N \leq n$ dimenziós alterét feszíti ki $\mathbb{R}^n$ -nek, akkor a bizonyítás a

$$simp(H) \leq \binom{m}{N+1}$$

felső becslést adja, ami $N+1 = [\frac{n}{2}]$ esetén maximális, nyilvánvalóan kisebb $\binom{m}{N+1}$ -nél (ha $m \geq 2n$), és így a lehető legtöbb szimplex előállításához nyilvánvalóan szükséges, hogy a vektorok kifeszítsék az egész $\mathbb{R}^n$ teret.

(ii) A felső becslés közvetlenül is következik J.Sperner előző alfejezetben ismertetett 7.3.Tételéből ($k = n+1$ választással).

Azonban fenti tételeink nem csak a szimplexek maximális ill. minimális számát adják meg, hanem azt is kimondják, hogy a szélsőséges konfigurációk *egyértelműek*: csakis a leírt esetekben lehet $simp(H)$ maximális. ill. kevés kivétellel minimális, *sőt* tételeink meg is adják az extremális konstrukciókat, vagyis *struktúratételek!*

A 7.21.Tételből azt is látjuk, hogy a maximum esetekben nem kell bajlódnunk H párhuzamos vektoraival, csak a minimum esetben. A 7.24.Tétel $|H| = 4, 7$ kivételes eseteiben két ill. három különböző minimális konfiguráció van, ezeket $[LSz2]$ -ben mutatjuk be.

(iii) Tetszőleges m és n esetén könnyen megadható $\mathbb{R}^n$ -ben m darab olyan vektor, mely közül bármely n lineárisan független (azaz bármely $n+1$ szimplexet alkot): Legyen $i = 1, 2, ..., m$ esetén $x_i := [1, a_i, a_i^2, ..., a_i^{n-1}]$, ahol $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$ t*etszőleges különböző* valós számok. (Lineáris függetlenségük ún. Vandermonde-determinánsokkal[(22)] látható be legkönnyebben.)

(iv) Vektorterek független részhalmazainak, gráfok körmentes részgráfjainak, valamint más struktúrák közös általánosítása a *matroid* nevű algebrai struktúrák. A közölt eredmények és bizonyításaik matroidok minimális összefüggő részhalmazainak (köreinek) számára is alkalmazhatók, eredményeink így a gráfok egyszerű köreinek számára is adnak becsléseket. Részletekről $[DLSz]$ cikkünkben olvashatunk. A matroidok (és elektronikai alkalmazásaik) megismerésére Recski András $[ReAn,'89]$ könyvét ajánlhatjuk. □

Most ismertetjük az 7.21.Tétel bizonyítását. A 7.22. Tétel bizonyítása kissé hosszabb, $[LSz1]$ -ben megtalálható.

---

22) Lásd az 5.9. Állítást

Bizonyítás (7.21.Tétel)**:** Tegyük fel tehát, hogy $H \subset \mathbb{R}^n$ kifeszíti $\mathbb{R}^n$ -et, és legyen $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq H$ tetszőleges részhalmaz, amely generálja $\mathbb{R}^n$ -et (azaz B bázis $\mathbb{R}^n$ -ben H elemeiből).

Tegyük fel, hogy van H -ban $n+1$ -nél kevesebb elemből álló szimplex, azaz van olyan $u \in H \backslash B$ vektor, melyet H-nak valamely, legfeljebb $n-1$ -méretű lineárisan független részhalmaza előállít. Válasszunk ekkor olyan $u' \in \mathbb{R}^n$ vektort, $u' \notin H$, mely H egyetlen $n-1$ -elemű részhalmazának generátumába sem esik. Megmutatjuk ekkor, hogy a

$$H' := (H \backslash \{u\}) \cup \{u'\}$$

halmazra

$$simp(H') > simp(H)$$

és persze $|H'| = |H|$.

E célból H minden S szimplexéhez injektív módon megfeleltetjük H' egy S' szimplexét. Legyen tehát $S = \{u_1, u_2, ..., u_k\} \subseteq H$ egy tetszőleges szimplex.

Ha $u \notin S$, akkor $S \subseteq H'$ -ben is szimplex, vagyis legyen $S' := S$.

Ha pedig $u \in S$, mondjuk $u = u_i$, akkor $S \backslash \{u_i\}$ lineárisan független, és így találhatunk B -nek olyan $n-k+1$ -elemű B^- részhalmazát, amelyre $S \backslash \{u_i\} \cup B^-$ lineárisan független (és kifeszíti $\mathbb{R}^n$ -et). Ekkor pedig

$$S' := S \backslash \{u_i\} \cup B^- \cup \{u'\}$$

egy új szimplex H'-ben.

Mivel az $S \mapsto S'$ leképezés injektív, ezért $simp(H') \geq simp(H)$.

A fenti gondolatmenet szerint $simp(H)$ maximális lehet például akkor, ha H -ban csak $n+1$ -elemű szimplexek találhatók, vagyis ha H bármely n eleme lineárisan független. Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy egyetlen más konfiguráció sem lehet maximális.

Legyen tehát $S \subseteq H$ tetszőleges ℓ elemű szimplex, $\ell \leq n$. A fenti konstrukciót egymás után $m - \ell$ -szer alkalmazva (vagyis $H \backslash S$ *minden* u elemét a fenti módon *kicseréljük* olyan $u' \in \mathbb{R}^n$ vektorra, $u' \notin H$, mely H és az eddig választott összes u' vektorok egyetlen $n-1$ -elemű részhalmazának generátumába sem esik) , elérhetjük, hogy az így kapott $H' \backslash S$ vektorhalmaz összes eleme "teljesen független" (azaz $H' \backslash S$ bármely n eleme lineárisan független, sőt $H' \backslash S$ bármely u eleme lineárisan független $H' \backslash \{u\}$ -tól).

Hány szimplexünk lesz ekkor? $S \subseteq H$ maga, és rajta kívül csak $n+1$ -elemű szimplexek, hiszen mindegyik új $u' \in H \setminus S$ vektor csak $n+1$ -elemű szimplexekben lehet, amelyek azonban S-nek legfeljebb $\ell - 1$ elemét tartalmazhatják (mert $|S| = \ell$). Vagyis

$$simp(H) \leq 1 + \sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{i} \cdot \binom{m-\ell}{n+1-i} = 1 + \binom{m}{n+1} - \binom{m-\ell}{n+1-\ell},$$

ami $\binom{m}{n-\ell}$-nél kisebb hiszen $\ell \leq n \leq m$. □

7.6. Feladatok

7.1. Feladat: Adott n -elemű S alaphalmaznak legfeljebb hány A_1, ..., $A_m \subseteq S$ nem üres (különböző) részhalmazát lehet megadni úgy, hogy az alábbi tulajdonságok (külön-külön) teljesüljenek minden $i \neq j$ esetén ?

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ (diszjunktak)

(b) $A_i \subseteq A_j$ vagy $A_i \supseteq A_j$ ("lánc")

(c) $A_i \cap A_j = D$ valamely rögzített $D \subseteq S$ halmazra ($D = \emptyset$ is lehet) ("Δ - rendszer")

7.2. Feladat: Az osztályban $2n$ tárgyat tanítanak, csak "megfelelt" és "nem megfelelt" minősítések vannak. Nincs két olyan tanuló, hogy egyiküknek minden tárgyból legalább olyan jó jegye lenne mint a másiknak, de két olyan tanuló sincs, akiknek minden jegyük azonos. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legfeljebb $\binom{2n}{n}$ tanuló van az osztályban.

7.3. Feladat: Adjunk aszimptotikus közelítést a Sperner tételben szereplő $\binom{n}{n/2}$ kifejezésre !

7.4. Feladat: Adjunk meg $\mathbb{R}^n$ -ben akármennyi (akár végtelen sok) vektort úgy, hogy közülük bármely n *lineárisan független* (vagyis bármelyik $n+1$ *szimplex*) legyen!

7.7. Megoldások

7.1. Feladat: **(a)** n , **(b)** n , **(c)** $n - |D| + 1$.

7.2. Feladat A tanulók jegyei Sperner rendszert alkotnak.

7.3. Feladat A Stirling -formula alapján

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} \approx \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left[\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{2\pi \frac{n}{2}}\right]^2} = 2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Emlékeztetőül: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ = az összes részhalmaz száma = 2^n .)

7.4. Feladat Használjuk fel a Vandermonde determinánsról az 5.9. Állításban tanultakat: a vektorok $[1, q, q^2, ..., q^{n-1}]$ alakúak ahol $q \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám !

7.8. Hivatkozások

[BF] Babai,L.,Frankl,P.: *Linear algebraic methods in combinatorics*, Univ. of Chicago, 1988.

[BM] Brualdi,R.A., Massey,J.J.O.: *Some Applications of Elementary Linear Algebra in Combinatorics*, The College Math. Journal 24 (1993), pp. 10-19

[F] Fisher,R.A.: *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, Annals of Eugenics, volume 10, 1940, pp. 52–75.,
https://hekyll.services.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/15239/1/174.pdf

[$DLSz$] Dósa,Gy.,Laflamme,Cl.,Szalkai,I.: *On the Maximal and Minimal Number of Cycles and Bases of Matroids and the Extremal Constructions*, 1997, közlésre benyújtva

[KP] Kumar,S.,Pethő,S.: *Note on a Combinatorial Problem for the Stoichiometry of Chemical Reactions*, Intern.Chem.Eng. 25 (1985), 767-769

[L] Lubell,D.: *A Short Proof of Sperner's Lemma*, J.Comb.Th. 1 (1969)

[$LSz1$] Laflamme,Cl.,Szalkai,I.: *Counting Simplexes in* $\mathbb{R}^n$, Hung. J. of Ind. Chem. 23 (1995), 237-240

[$LSz2$] —— : *The Minimal Number of Simplexes in* $\mathbb{R}^3$: *the Nonparalel Case,* Electr.J. Combin., 5 (1998) No.1, Res. Paper 40, 11 pp,
http://www.combinatorics.org

[$P1$] Pethő,Á. : *On a Class of Solutions of Algebraic Homogeneous Linear Equations*, Acta Math.Hungaricae 18 (1967), 19-23

[RW] Ray-Chaudhuri,D.K.,Wilson,R.M.: *On t-designs*, Osaka J.Math. 12(1975), pp.737-744

[$R1$] Róka Sándor: *Ray-Chaudhuri-Wilson típusú tételek szimmetrikus differenciára és differenciára*, Acta Acad. Paedag. (Nyíregyháza), 13/D (1992), pp.1-2

[$R2$] ——— : *Ray-Chaudhuri-Wilson típusú egyenlőtlenség hármas metszetek esetén*, Acta Acad. Paedag. (Eger), XXI (1993), 105-109

[$R3$] ———: *Független metszőrendszerek II.*, Acta Acad. Paedag. (Eger), XXIV (1997), 67-73

[Ry] Ryser„H.J.: *Combinatorial Mathematics*, Math. Assoc. America, Washington DC, 1964

[Sa] Sali Attila: *Extremális kérdések véges részben rendezett halmazokra és mátrixokra,* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1990

[Sp] Sperner,E.: *Ein Satz über Untermenge einer endlichen Menge*, Math. Zeitschrift 27 (1928), S.544-548.

[$Sz1$] Szalkai,I.: *Generating Minimal Reactions in Stoichiometry Using Linear Algebra*, Hung. J. of Ind. Chem. 19 (1991), 289-292

[$Sz2$] —— : *Lineáris algebra, sztochiometria és kombinatorika,* Polygon, 7 (1997), 35-52

[V] Vízvári,B.: *Diszkrét programozási feladatok optimális megoldásairól*, Alkalmazott Mat. Lapok, 3 (1977), 139-150.old.

8. fejezet

Partíciós problémák

Számok felbontása. Halmazpartíciók. Összefoglalás.

A *partitio* szó jelentése latinul *elosztás, felosztás, részletezés.* A modern kombinatorika egy külön, méghozzá *elég nehéz* ága foglalkozik véges objektumok, halmazok, természetes számok (ami persze majdnem ugyanaz) kisebb részekre való felbontásával, a lehetőségek számával. Mi csak vázlatosan érintjük a kombinatorika eme területét, az érdeklődőknek Hajnal Péter $[HaPé,' 97/2]$, Vilenkin $[ViNJ,' 87]$, Tomescu $[ToIo,' 78]$ és a szerző $[SzIs,' 97]$ könyveit ajánlhatjuk.

Bár a következő két alfejezetben külön vizsgáljuk számok és halmazok partícióit, az Olvasónak melegen javasoljuk, hogy a két probléma között keressen meg minnél több (szoros) kapcsolatot!

8.1. Számok felbontása

Célunk most az, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám felosztásainak, azaz kisebb számok összegére való felbontásainak számát megkeressük. Mint sokszor máshol, itt is célszerű a lehetőségeket (felosztásokat) csoportosítanunk.

8.1. Definíció *Az* $n \in \mathbb{N}$ *szám egy* **k - részre** *történő* **felosztása** (**partíciója**)

$$n = a_1 + ... + a_k \tag{8.1}$$

ahol $a_1 \geq ... \geq a_k \geq 1$ *természetes számok.*

Rögzített $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén jelölje* **P(n,k)** *az* n *szám* k *részre történő felosztásainak* számát, *míg* **P(n)** *jelölje az* n *szám* **összes** *felosztásainak számát, azaz legyen*

$$\mathbf{P(n)} := \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \qquad \square$$

A definíció szerint az összeadandók sorrendje nem lényeges, számuk (k) rögzített, és természetesen egyik sem nulla. Emlékeztetünk rá, hogy a pénzváltási probléma 6.14. Példában ismertetett (6.21) kérdésében az összeadandók között 0 -ák is lehetnek (vagyis a nemnulla tagok száma *legfeljebb* k), és sorrendjük *lényeges.*

Ha az n természetes számot egy n -elemű "halmaznak" tekintjük, aminek elemei megkülönböztethetlenek (!), akkor a (8.1) egyenlőség egy pontosan k elemű (nemüres) partíciónak felel meg, ahol a partíció elemeinek (az eredeti halmaz részhalmazainak) sorrendje nem lényeges. (Halmazpartíciókkal a következő alfejezetben foglalkozunk.)

Az alábbi eredményeket bizonyítás nélkül közöljük, a bizonyítások például Tomescu [$ToIo,'78$] könyvének 5.fejezetében megtalálhatók.

8.2. Állítás:

$$P(n,k) \geq \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \qquad \square$$

8.3. Tétel:

$$P(n+k,k) = \sum_{i=1}^{k} P(n,i)$$

$$P(n,1) = P(n,n) = 1 \qquad \square$$

8.4. Tétel: *Az n szám olyan felosztásainak száma, amelyekben k* tetszőleges, és *a legnagyobb összeadandó m (azaz $a_1 = m$), egyenlő az n szám m részre való felosztásainak számával, azaz $P(n,m)$ -el.* $\square$

A következő eredmény a pénzváltási problémához hasonlóan igazolható:

8.5. Tétel: *A $(P(n))$ sorozat generátorfüggvénye*[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \quad . \qquad \square$$

[1] ezt az ereményt már Euler is ismerte, a problémát Philippe Naudé 1740 -ban kérdezte egy Eulerhez címzett levelében.

8.6. Tétel (Hardy[2]-Ramanujan[3]):

$$P(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}n}\right) \qquad ha \quad n \to \infty \quad . \qquad \square$$

A fenti tételben szereplő

$$f \sim g$$

az f és g függvények *aszimptotikus egyenlőség*ét fejezi ki, képletben

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad .$$

A $P(n)$ számok további tulajdonságait és néhány összefüggés igazolását például Tomescu $[ToIo,'78]$ könyvének 5. fejezetében, Harris-Hirst-Mossinghof $[HHM]$ könyvében és Shiu $[Sh]$ cikkében találhatja meg az érdeklődő Olvasó. Az alábbi táblázatban megadjuk néhány $P(n)$ -szám értékét, $[HHM]$ nyomán.

n	P(n)	n	P(n)	n	P(n)	n	P(n)
0	1	10	42	20	627	30	5604
1	1	11	56	21	792	31	6842
2	2	12	77	22	1002	32	8349
3	3	13	101	23	1255		
4	5	14	135	24	1575		
5	7	15	176	25	1958		
6	11	16	231	26	2436		
7	15	17	297	27	3010		
8	22	18	385	28	3718		
9	30	19	490	29	4565		

A $P(n)$ számok
8.1. Táblázat

---

[2] Godfrey Harold Hardy (1877-1947) angol matematikus, elsősorban (analitikus) számelmélettel foglalkozott.

[3] Srinivasa Ramanujan (1887-1920) indiai matematikus. Szegény családból származott, érettségit sem tudott tenni, de csodálatos megérzéseit több kötetben gyűjtötte össze, amelyek nagy részének bizonyításán még most is sok matematikus dolgozik. Hardy és John E. Littlewood (1885-1977) angliai meghívása mentette meg az éhhaláltól, rengeteg közös felfedezésük és tételük jelent meg, az angol éghajlat azonban hamar tönkretette Ramanujan egészségét.

8.2. Halmazpartíciók

Egy (véges) halmazt (nemüres) részhalmazaira akarunk felbontani, és a felbontások lehetséges számát szeretnénk meghatározni.

8.7. Definíció: *A tetszőleges $H \neq \emptyset$ halmaz egy k* **-adosztályú partíciója (felosztása)** *nemüres részhalmazainak egy diszjunkt lefedő $\{A_i : i \leq k\}$ rendszere, vagyis $A_i \subseteq H$, $A_i \neq \emptyset$ és $A_i \cap A_j = \emptyset$ és $H = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.* $\square$

Tehát kérdés: egy n elemű halmaznak hány k -adosztályú partíciója lehetséges? Több esetet különböztethetünk meg (ld. még a $[SzIs,'97]$ feladatgyűjtemény 11.fejezetét):

Esetek:

a) *H elemei megkülönböztethetetlenek és a partíció A_i elemei megkülönböztethetőek.*

b) *H elemei megkülönböztethetetlenek és a partíció A_i elemei is.* Az esetek számát ekkor jelölje $\mathbf{V(n,k)}$ és legyen $\mathbf{V(n)} := \sum_{k=1}^{n} V(n,k)$ **.**

c) *H elemei megkülönböztethetőek és a partíció A_i elemei is.* Az esetek számát ekkor jelölje $\mathbf{S(n,k)}$ *és legyen* $\mathbf{S(n)} := \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$ **.**

d) *H elemei megkülönböztethetőek és a partíció A_i elemei megkülönböztethetetlenek.* Az esetek számát ekkor jelölje $\mathbf{S}_k^n$ *és legyen*

$$\mathbf{B}_n := \sum_{k=1}^{n} S_k^n \quad .$$

Az a) eset éppen a pénzváltási probléma (6.21) speciális esete, így a lehetőségek száma (mint a 6. fejezetben (6.21) megoldásánál láttuk)

$$C_k^{n\ (ism)} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad .$$

A c) esetben szereplő $S(n,k)$ számok éppen egy adott n elemű halmazból egy k elemű halmazba képező szürjektív függvények számát jelölik, amik értékét a 4. fejezetben a logikai szitaformulával meghatároztuk (vagy lásd még a $[SzIs,'97]$ feladatgyűjtemény 4.3. feladatát):

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \qquad \text{ha} \quad n \geq k \quad .$$

Az S_k^n számokat *másodfajú Stirling*[4] *számok*nak, míg B_n -et *Bell*[5]-*(féle) számok*nak hívjuk. (Az első- és másodfajú Stirling számok az analízisben is fontos szerepet játszanak, mint ezt Pólya[6]-Szegő[7] $[PSz]$ könyvében is láthatjuk, de szinte valamennyi matematikai lexikonban és kézikönyvben is találkozhatunk velük, Michel $[M]$ cikkében egy jó összefoglalót találunk.) Legfontosabb tulajdonságaikat mi a 8.9. Állításban ismertetjük.

Az Olvasó bizonyára észrevette már, hogy az előző alfejezetben a (8.1) egyenlőségben tulajdonképpen egy n elemű halmaz m nemüres részhalmazra felosztása szerepel, a részhalmazok sorrendje nem lényeges, és persze azonos méretű részhalmazok is lehetségesek.

Az alábbiakban bizonyítás nélkül közöljük a $V(n,k)$, S_k^n és a B_n számok legfontosabb tulajdonságait, de javasoljuk az Olvasónak, gondolja meg, hogy az alábbi összefüggések miért is igazak (azaz bizonyítsa be őket).

8.8. Állítás: $V(n,1) = 1$, *és tetszőleges* $k \leq n$ *szám esetén*

$$V(n,k) = \sum_{i=1}^{k} V(n-k,i) ,$$

továbbá $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ *esetén*

$$V(n-k) = V(n,k) \quad . \qquad \square$$

8.9. Állítás (a Stirling számok legfontosabb tulajdonságai):

(i)

$$S_k^{n+1} = S_{k-1}^n + k \cdot S_k^n$$

(ii)

$$S_k^n = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k-i)^n \binom{k}{i}$$

---

4) James Stirling (1692-1770) skót matematikus munkásságát a 2.4. alfejezetben ismertettük.

5) Eric Temple Bell (1887-1960) skót matematikus

6) Pólya György (1887-1985) magyar matematikus, elsősorban végtelen sorokkal, számelmélettel, kombinatorikával, valószínűségszámítással, analízissel, csillagászattal foglalkozott, a "*Gondolkodás iskolája*" c. világhírű könyv szerzője.

7) Szegő Gábor (1895-1985) magyar matematikus. Pólya Györggyel közösen írt könyve ("Válogatott feladatok az analízisből") először 1925 -ben jelent meg, azóta a világ szinte minden nyelvére lefordították, számtalan kiadást ért meg.

(iii)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot S_k^n=0$$

(iv)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k!\cdot S_k^n=(-1)^{n-1}\ ,$$

(v) *tetszőleges* $x\in\mathbb{C}$ *komplex számra*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(S_i^n\prod_{j=0}^{i-1}(x-j)\right)=x^n$$

(vi)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{S_k^n}{x^{n+1}}=\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k)}$$

(vii)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{S_k^n\cdot x^n}{n!}=\frac{(e^x-1)^k}{k!}\quad . \qquad \square$$

A Bell számok tulajdonságai:

8.10. Állítás:

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\quad ,\ B_0=1\quad . \qquad \square$$

8.11. Tétel: (i) *Ha a* $\mathbf{p_k(x)}$ *polinomok kielégítik a*

$$p_1(x):=1$$

és az

$$p_{k+1}:=(x+1)\cdot p_k+x\cdot p_k'(x)$$

összefüggéseket, akkor

$$B_n=p_n(1)\quad .$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=e\cdot B_n$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1} . \qquad \square$$

8.3. Összefoglalás

Végezetül (legtöbbször bizonyítás nélkül) összefoglaljuk a partíciós problémák lehetséges változatait és képleteit. (Sok eset bizonyítását az Olvasó Vilenkin [$ViNJ,'87$] könyvében megtalálja.)

1.) n -elemű halmaz elemeit k *megkülönböztetett* (ún.”számozott”) részhalmazba k^n -féleképpen oszthatjuk szét, ha üres részhalmazokat is megengedünk.

2.) Ha a fenti szétosztásoknál üres csoportokat *nem* engedünk meg, akkor a k -elemű partíciók száma (a logikai szitaformula alapján)

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad .$$

Belátható még, hogy a feladat generátorfüggvénye éppen

$$F(x) = n!(e^x - 1)^k \quad .$$

3.) Ha a fenti szétosztásnál a részhalmazokat nem különböztetjük meg, akkor a lehetőségek száma a fentinek $k!$ -ad része.

4.) n *azonos* tárgyat k nemüres megkülönböztetett csoportba $\binom{n-1}{k-1}$ -féleképpen oszthatunk.

5.) Ha a fenti szétosztásnál üres részhalmazokat is megengedünk, akkor a lehetőségek száma

$$C_k^{n\ (ism)} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

ismétléses kombináció (az k részhalmaz nevét választhatjuk ki az n azonos ”tárgy” részére.)

6.) n *azonos* tárgy k megkülönböztetett, legalább q -elemű részhalmazba való partícióinak száma

$$\binom{n-1-k(q-1)}{k-1} \quad .$$

7.) n *azonos* tárgy k *nem*-megkülönböztetett, legalább q és legfeljebb $q+s-1$ -elemű részhalmazba való partícióinak számát x^{n-kq} együtthatója adja a

$$g(x) := \left(\frac{1-x^s}{1-x}\right)^k$$

függvény hatványsorában.

8.) Ha Π_n^k jelöli az n *azonos* tárgy k nem üres, nem-megkülönböztetett csoporba való partícióinak számát, akkor

$$\Pi_n^k = \Pi_{n-1}^{k-1} + \Pi_{n-k}^k \quad ,$$

ami alapján

$$\Pi_n^k = \Pi_{n-1}^{k-1} + \Pi_{n-k}^{k-1} + \Pi_{n-2k}^{k-1} + ... \quad ,$$

valamint $n-k<k$ esetén

$$\Pi_n^k = \Pi_{n-1}^{k-1} \quad .$$

9.) n -elemű halmaz elemeit k *megkülönböztetett* részhalmazba szétosztva (üres részhalmazokat is megengedve) és a részhalmazokat sorbarendezve a lehetséges sorbarendezések száma

$$k(k+1)...(k+n-1) \quad .$$

10.a) Ha a fenti partíciókban üres részhalmazokat *nem* engedünk meg, akkor a lehetséges sorbarendezések száma

$$n!\binom{n-1}{k-1} \quad .$$

b) Ha a részhalmazokat nem különböztetjük meg (azaz sorrendjük *nem* lényeges), akkor a lehetőségek száma

$$\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1} \quad .$$

11.) Ha n -elemű halmaz elemeit minden lehetséges módon k rendezett részhalmazba osztunk, miközben üres részhalmazok is felléphetnek, nem kell minden elemet felhasználnunk és a csoportok sorrendje is lényegtelen, akkor a lehetséges szétosztások száma

$$n!\left(\frac{1}{n!} + \frac{k}{1!(n-1)!} + \frac{k(k-1)}{2!(n-2)!} + ...\right) \quad .$$

A zárójelben lévő kifejezés éppen x^n együtthatója a

$$h(x) := \frac{e^x}{(1-x)^k}$$

függvény hatványsorában.

12.) Ha a fenti feladatban üres csoportokat nem engedünk meg, akkor a lehetőségek száma éppen x^{n-k} együtthatója a $h(x)$ függvény hatványsorában.

8.4. Hivatkozások

[HHM] Harris,Hirst,Mossinghoff: *Combinatorics and Graph Theory,* Springer Verlag, 2000

[M] Michel,R.: *Aspekte der Stirlingschen Zahlen zweiter Art,* Math. Semesterberichte 43 (1996), 81-92.

[PSz] Pólya - Szegő: *Feladatok és tételek az analízisből,* Műszaki Kiadó, 1980

II. rész

Gráfelmélet

1. fejezet

Gráfelméleti alapfogalmak

BEVEZETŐ PÉLDÁK, A GRÁFOK TÍPUSAI, ALAPFOGALMAK. NEVEZETES GRÁFOK. A KÉZFOGÁSI TÉTEL ÉS KÖVETKEZMÉNYEI. UTAK ÉS KÖRÖK, ÖSSZEFÜGGŐSÉG, A GRÁF KOMPONENSEI. ÖSSZEFOGLALÓ VIZSGAKÉRDÉSEK.

1.1. Bevezetés

Klasszikus bevezető példa a Königsbergi hidak problémája, melyet Euler oldott meg 1736-ban. Ez volt a legelső gráfelméleti munka, a problémát részletesen a 2.”Euler körök és utak” c. Fejezetben ismertetjük. Meg kell még említenünk Kőnig Dénes német nyelven 1936 -ban kiadott Gráfelmélet könyvét, amely több évtizeden keresztül a modern gráfelmélet külföldön is megbecsült alapműve volt. Érdekes még megemlíteni, hogy 1930 -ban jelent meg az első dolgozat a *hipergráfok*ról.

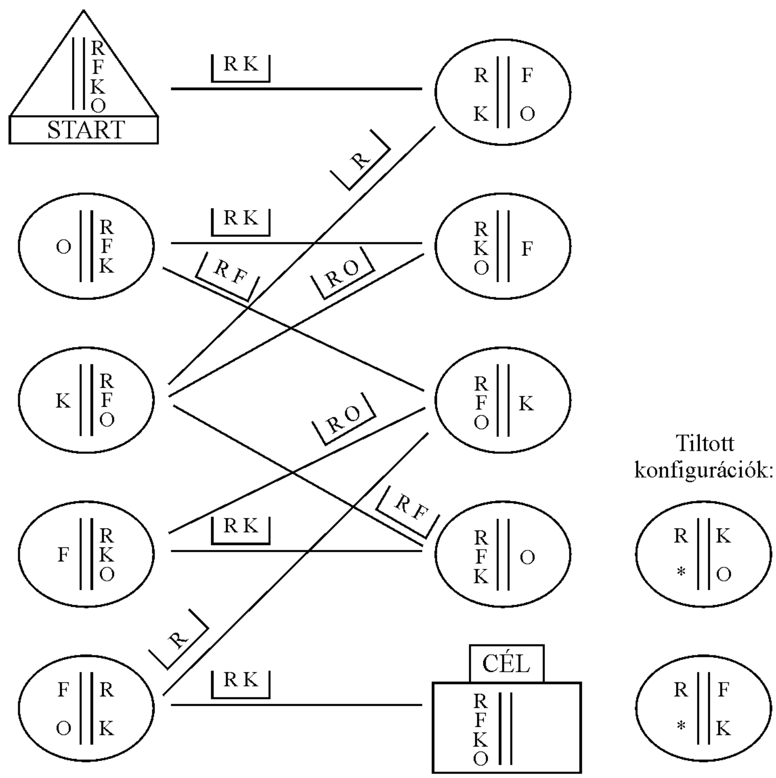
A Königsbergi hidak problémája egy lehetséges sétát kérdez a Pregel folyó hídjain keresztül, a térképvázlatot a 2.1.ábrán láthatjuk. Itt a hidak jelentik a kapcsolatokat a szárazföldek között, ahol átsétálhatunk egyik helyről a másikra, majd egy újabb hidat választhatunk.

Mint a könyv bevezetőjében említettük, a *gráfelmélet* egy (általában véges) halmaz elemei közötti összefüggésekkel foglalkozik. A példákban igyekszünk érzékeltetni, hogy mennyire változatos összefüggések tanulmányozhatók gráfok segítségével, nem csak a ”pontok” és ”vonalak” alkotják a gráfelmélet lényegét.

Gráfokra triviális példáknak bárki azonnal említheti a térképeket, molekulák szerkezetét, elektronikus áramköröket, vagy az emberek közötti kapcsolatokat. (HF itt a halmaz elemeit és a közöttük levő kapcsolatokat megkeresni.)

Kissé meglepőbb példa a "Farkas-Kecske-Révész-káposzta" probléma (és általában a "kannibál-hittérítő" típusú problémák). A feladat közismert: a folyó egyik partján áll egy Révész (R), Farkas (F), Kecske (K) és egy fej káposzta (k), a csónakba közülük csak kettő fér be. Úgy kell a révésznek átvinnie őket a túlsó partra, hogy egyik se egye meg a másikat (amit ugye nem kell magyaráznunk).

A feladat megoldása során bizonyos helyzetek (szituációk) lehetségesek, azaz éppen kik vannak a folyó két partján, és "kapcsolat" csak azok a helyzetek között van, amelyeket a Révész "egymásba alakíthat" úgy, hogy csónakba ül, esetleg valakit vagy valamit maga mellé vesz, és átevez a partra. A feladat gráfját, azaz a lehetséges helyzeteket és kapcsolataikat az 1.1. ábrán vázoljuk.



A "Farkas-Kecske-Révész-káposzta" probléma gráfja

1.1. ábra

Gráfok alkalmazásaira további példákat találunk a következő "Nevezetes gráfok" és "Összefoglaló vizsgakérdések" c. alfejezetekben, a Szerző $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményében, pedagógiai cikkekben a KöMaL, Polygon, The Mathematical Gazette, Elemente der Mathematik köteteiben, példaként Goldman Júlia $[GJ]$ és Pintér Klára $[PK]$ cikkeit említjük, valamint Hajnal Péter $[HaPé,'97/3]$, Recski András $[\mathrm{Re}\,An,'89]$, Andrásfai Béla $[AB]$, Johnsonbaugh $[JoRi,'86]$ és Rosen $[RoKe,'91]$ könyveinek bevezető fejezeteit.

A gráf definíciójához szükségünk lesz az alábbi jelölésre:

1.1. Definíció: *Tetszőleges $A \neq \emptyset$ nemüres halmaz és $k \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen*

$$[A]^k := \{X \subseteq A : |X| = k\}$$

és

$$[A]^{\leq k} := \{X \subseteq A : |X| \leq k\}$$

□

Felhívjuk a figyelmet, hogy $[A]^k$ a k -elemű *(rendezetlen) részhalmazok* halmaza, míg A^k a k - hosszúságú *rendezett k -asok* (sorozatok) halmaza, a k -tényezős Descartes szorzat.

Most pedig lássuk a gráf matematikai meghatározását.

1.2.Definíció: *Tetszőleges $V \neq \emptyset$ nemüres halmaz és $E \subseteq [V]^{\leq 2}$ esetén a*

$$G := (V, E)$$

algebrai struktúrát[1] **gráf***nak* (**graph**) *nevezzük. V elemeit* **csúcsok***nak vagy* **pontok***nak (***node, vertex**[2]*) míg E elemeit* **élek***nek vagy* **ívek***nek (***edge, arc***) nevezzük.*

$x = y$ *azaz* $e = \{x\} \in E$ $(x \in V)$ *esetén az e élt* **hurokél***nek vagy röviden* **hurok***nak (***loop***) nevezzük.*

$e = \{x, y\} \in E$ $(x, y \in V)$ *esetén azt mondjuk, hogy x és y* (*csúcsok*) *az e éllel* **össze vannak kötve** (x *and* y *are* **adjacent**/ **connected by** e), *vagy* **szomszédosak** (**are neighbours**) *vagy* **illeszkednek** e *-re (***are incident on** e*), vagy* e **illeszkedik** x, y *-ra.* □

[1] Egy tetszőleges $A \neq \emptyset$ nemüres halmazon értelmezett néhány művelet (függvény), konstans (kitüntetett elem) és reláció ($[A]^k$ részhalmaza valamely $k \in \mathbb{N}$ természetes számra) együttesét **algebrai struktúrá**nak nevezünk.

[2] plural form: **vertices**

A fenti $G = (V, E)$ jelölés már annyira megszokott, hogy sokszor csak a "G gráf" -ról beszélünk, és külön említés nélkül használjuk a V és E betűket a csúcsok és élek halmazának jelölésére.

A gráfelméleti fogalmak más elnevezéseivel is találkozhatunk a szakirodalomban, néhány találó kifejezést találhatunk pl. Andrásfai Béla $[AB]$ vagy Hajnal Péter $[HaPé,'97/3]$ könyveiben.

Ismételten emlékeztetünk rá, hogy $e = \{x, y\}$ jelölésünk miatt gyakran használjuk az

$$\{x, y\} \in E$$

illetve az

$$x, y \in e$$

jelöléseket is!

Ha a fenti definíciót szigorúan vesszük, akkor E egy *halmaz*, vagyis elemeit pontosan egyszer soroljuk fel, többszöri felsorolás nem jelent semmit. Azonban a gráfok alkalmazásánál sokszor szükségünk van ugyanazon csúcsok többszöri összekötésére (elektronikai vagy más energia hálózatoknál, emberi kapcsolatoknál, térképeknél, stb.). Ezt a követelményt oldja meg a "többszörös" él fogalma.

1.3. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ekkor bármilyen*

$$m : E \rightarrow \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

függvény esetén azt mondjuk, hogy az $e \in E$ él **multiplicitása** $\mathbf{m(e)}$, *és $m(e) > 1$ esetén az e élt* **többszörös él***nek nevezzük.* $\square$

Természetesen a G gráf megadásához hozzátartozik az élek multiplicitása is, azt nem a gráf megadása után kell felírnunk. Vagyis precízen a

$$G = (V, E, m)$$

struktúráról kellene beszélnünk, de sajnos a szakirodalom ehelyett csak $G = (V, E)$ gráfokról és azok "többszörös" éleiről szól. Mi is ezt a szóhasználatot követjük.

Hangsúlyozzuk, hogy $m(e) \neq 0$, hiszen egy $m(e)$ -szeres élt ennyiszer létezőnek tekintünk, ami ugye $m(e) = 0$ esetén bonyodalmakat okozna.

$m(e) = 1$ esetén pedig csak egyszerűen *él* -t vagy esetleg *egyszerű él* -t (*simple edge*) említünk.

A fentiek ellenére sokszor mégis kényelmesebb az E halmazra úgy gondolnunk, mintha a többszörös éleket több példányban tartalmazná (esetleg valami, általunk láthatatlan jellel megkülönböztetve).

A többszörös és hurokélek is sokszor "másképpen viselkednek" a Tételekben és állításokban, ezért már most javasoljuk az Olvasónak, hogy minden Tétel, Állítás, Megjegyzésben alaposan gondolja meg, hogy többszörös és hurokélek jelenléte mennyiben módosítja a vizsgált összefüggéseket!

1.4. Definíció: *A* $G = (V, E)$ *gráfot* **egyszerű gráf***nak* (**simple graph**) *nevezzük, ha nincs benne sem hurokél sem többszörös él. A* **tetszőleges gráf** *kifejezés jelölhet mind egyszerű mind nem egyszerű gráfot is.*

Használatos még ($[RoKe,'91]$) *a* **multigraph** *elnevezés is, ha a gráfban többszörös élek megengedettek de hurokélek nem, továbbá a* **pszeudo**[3]**graph** *kifejezés is,ha a gráfban mind hurokélek mind többszörös élek is megengedettek.* □

A gráf eredeti 1.2. Definíciójának természetes általánosítása a hipergráf, amivel szintén sajnos nincs helyünk foglalkozni, mindössze a definíciót és Claude Berge $[BC]$ könyvét említjük meg.

1.5. Definíció: *Tetszőleges* $V \neq \emptyset$ *nemüres halmaz és* $E \subseteq \mathcal{P}(V)\backslash\{\emptyset\}$ *esetén a*

$$G := (V, E)$$

algebrai struktúrát **hipergráf***nak* (**hypergraph**) *nevezzük.*E *elemeit* **hiperélek***nek nevezzük, az 1.2. definícióban felsorolt többi fogalmat változtatás nélkül használjuk hipergráfokra is.* □

A hipergráfokra persze használatos még a **halmazrendszer** (**set systems**) elnevezés is, sőt a 4."Gráfok mátrixai" Fejezetben megismert *incidencia* mátrixok segítségével mátrixok és hipergráfok tulajdonságait kölcsönösen tudjuk vizsgálni: az egyikre megtalált összefüggésekből a másikra is nyerünk információkat!

Vegyük észre továbbá, hogy hipergráfok elektronikai alkalmazásainál a csúcsok (V elemei) a (vezetékek közötti) csomópontok míg az élek (E elemei) a két- és több"lábú" alkatrészek, vagyis ez utóbbiak *nem* a gráf csúcsai.

Az (eddigi) definíciókban ugyan nem kötöttük ki a V halmaz végességét, Diszkrét Matematika könyv lévén ezt mégis hallgatólagosan fel fogjuk tenni. Amennyiben végtelen V $(|V| = \infty)$ halmazzal foglalkozunk, használni fogjuk

[3] hamis, ál-, képzelt (görög)

a **végtelen gráf** elnevezést. Sajnos csak pár tétel erejéig lesz időnk végtelen gráfokkal foglalkozni, de már most is felhívjuk a figyelmet, hogy a végtelen halmazok és struktúrák (akár $\mathbb{N}$ akár $\mathbb{R}$) egészen más, sokszor egyszerűbb tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a véges (bár korlátozás nélküli) halmazok és struktúrák.

Gráfok gyakorlati alkalmazásainál sokszor nem elegendőek sem a gráf eredeti 1.2.Definícióban megismert fogalma, sem a fenti egyszerű módosításokban ismertetett változatai, az alábbi módosításokra is szükség van. E változatokat is csak érinteni tudjuk könyvünkben.

1.6. Definíció: *Tetszőleges $V \neq \emptyset$ nemüres halmaz és $E \subseteq V^2$ esetén a*

$$G := (V, E)$$

algebrai struktúrát **irányított gráf***nak* (**directed graph** *vagy röviden* **digraph**) *nevezzük.E elemeit* **irányított él***eknek nevezzük, az 1.2.Definícióban felsorolt többi fogalmat változtatás nélkül használjuk irányított gráfokra is.* □

A többszörös irányított élek precízen az 1.3.Definíció szerint adhatók meg, míg a fenti definícióban az $< v, v > \in V$ alakú élek irányított hurokéleket jelölnek. Az irányított éleket rajzon általában nyilakkal ábrázoljuk.

1.7. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Adott tetszőleges*

$$\nu : V \to \mathbb{N} \quad \textit{illetve} \quad \mu : E \to \mathbb{N}$$

függvények esetén **csúcs-** *illetve* **élszínezett gráf***ról beszélünk.* □

A fenti definíció sajnos könnyen összetéveszthető az alábbiakkal, legyünk elővigyázatosak!

1.8. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ha adott egy tetszőleges*

$$c : V \to \{1, .., n\}$$

injektív *függvény ($n = |V|$), akkor G -t* **számozott csúcsú gráf***nak nevezzük.* □

A csúcsok számozásának jelentőségét a 8."Gráfok izomorfiája" Fejezetben ismerhetjük meg.

1.9. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Adott tetszőleges*

$$w : E \to \mathbb{R}$$

függvény esetén G -t **súlyozott élű gráf***nak nevezzük.* □

Minden súlyozatlan élű gráfot is (könnyen) tekinthetünk súlyozott élű gráfnak: egyszerűen minden él minden súlyát 1 -nek választjuk. (Meglepő módon ez az egyszerű ötlet nagyon sokszor hasznos.)

A könyv egészében, ha mást nem mondunk, a *gráf* kifejezés alatt az 1.4.Definíció szerinti *tetszőleges* de *véges* gráfokat értjük.

1.2. Nevezetes gráfok

A most következő alfejezetben néhány nevezetes gráfot ismertetünk, melyek nem csak gyakorlás formájában segíthetik az elmélet jobb megértését, hanem elméleti és gyakorlati szempontból is fontosak.

Mint a legutolsó alfejezetben is megemlítjük: kitűnő vizsgakérdés a nevezetes gráfok összes tulajdonságának felsorolása is. Vagyis a könyv hátralevő részét így olvassuk: minden Fejezetben az alábbi nevezetes gráfokra is vizsgáljuk meg az éppen ismertetett tulajdonságot!

Az alábbi gráfok, ha mást nem mondunk, mind *egyszerűek.*

1.10. Definíció: *Egy tetszőleges (3 dimenziós)* **poliéder**[4] **élgráfja** *a következő: a gráf csúcsai a poliéder (geometriai) csúcsai, élei a poliéder (geometriai) élei.* □

Tanácsoljuk a "Platóni testek" (az öt szabályos térbeli test) élgráfjának tanulmányozását. Élgráfjukat a középiskolai "Függvénytáblázatok" c. segédkönyvben, síkba terítve pedig a Szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében találhatjuk meg.

1.11. Definíció: *Tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *természetes szám esetén* $\mathbf{K_n}$ *az* **n -csúcsú teljes** (**complete**) **gráf** *a következő:* $K_n = (V, E)$ *ahol*

$$|V| = n \quad \text{és} \quad E = [V]^2 \quad ,$$

azaz az összes lehetséges (egyszeres és nem hurok) élt behúztuk az n *csúcs között.* □

1.12. Definíció: (i) *A* $G = (V, E)$ *gráfot* **kétpólusú** (**bipartite**) *vagy* **páros gráf***nak nevezzük, ha* V *csúcshalmaza felbontható két nemüres részre*

[4] síklapokkal (sokszögekkel) határolt térbeli test. *poli éder* = sok lapú (test, görög) .

(**pólus***ok) úgy, hogy élek csak különböző pólusok között húzódhatnak, azaz* $V = A \cup B,\ \ A \cap B = \emptyset,\ \ A, B \neq \emptyset$ *és*

$$E \subseteq \{\{a,b\} : a \in A, b \in B\} \quad .$$

(ii) *A* **teljes** (**complete**) **kétpólusú** (*vagy* **páros**) **gráf,** *jele* $\mathbf{K_{m,n}}$, *egy olyan kétpólusú egyszerű gráf, amelyben a pólusok méretei* $|A| = m$ *és* $|B| = n$, *és* E *az összes lehetséges élt tartalmazza, vagyis*

$$E = \{\{a,b\} : a \in A, b \in B\} \quad \square$$

A gráf fent definiált pólusait *ne* keverjük össze a gráf 1.35. Definícióban bevezetett komponenseivel.

Páros gráfokkal a 11.”Páros gráfok” Fejezetben foglalkozunk részletesen, a kétféle elnevezés miértjét is ott világítjuk meg.

A kétpólusú gráfok mintájára definiálhatjuk a *többpólusú*, köztük a Turán Pál professzorról elnevezett gráfokat, melyek a 12. ”Extremális gráfok” Fejezetben játszanak fontos szerepet.

1.13. Definíció: (i) *A* $G = (V, E)$ *gráfot* **többpólusú** (**multipartite**) **gráf***nak nevezzük, ha* V *csúcshalmaza felbontható több nemüres részre* (**pólus***ok*) *úgy, hogy élek csak különböző pólusok között húzódhatnak, azaz* $V = V_1 \cup ... \cup V_k$ **,** $\quad V_i \cap V_j = \emptyset\ (i < j \leq k), \quad V_i \neq \emptyset$ *és*

$$E \subseteq \{\{u,v\} : u \in V_i,\ v \in V_j\ ,\ i \lneqq j \leq k\} \quad .$$

(ii) *A* **teljes** (**complete**) **többpólusú gráf** *jele* $\mathbf{K_{m_1,...,m_k}}$ *egy olyan többpólusú egyszerű gráf, amelyben a pólusok méretei* $|V_i| = m_i\ (i \leq k)$ *és* E *az összes lehetséges élt tartalmazza, vagyis*

$$E = \{\{u,v\} : u \in V_i,\ v \in V_j\ ,\ i \lneqq j \leq k\} \quad .$$

(iii) *A* $\mathbf{T}_n^{\mathbf{m_1,...,m_k}}$ **Turán gáfok** *olyan többpólusú teljes gráfok, amelyeknél* $m_1 + ... + m_k = n$ *és a pólusok méretei között az eltérés legfeljebb* 1, *azaz*

$$|\ |V_i| - |V_j|\ | \ \leq 1 \quad . \quad \square$$

1.14. Definíció: (i) $\mathbf{P_n}$ *jelöli az* **n -hosszú egyszerű ut***at* (**simple path**) *tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *természetes számra, ahol* $P_n = (V, E)$, $V = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ (különbözőek), *és*

$$E = \{\{a_i, a_{i+1}\} : 0 \leq i < n\} \quad .$$

(ii) $\mathbf{C_n}$ *jelöli az* **n -hosszú egyszerű kört** (**simple circle**) *tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *természetes számra*: C_n *egy olyan* n *-hosszú út, ahol az első és az utolsó csúcs megegyezik* (*az út bezáródik*): $a_n = a_0$.

Megjegyezzük, hogy gráfok köreinek neve *nem* circuit hanem circle.

(Lásd még az 1.24-1.26. Definíciókat is.)

(iii) $\mathbf{S_n}$ *jelöli az* **n -ágú csillag** (**star**) **gráf***ot tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *természetes számra, ahol* $S_n = (V, E)$, $V = \{a_0, ..., a_n\}$ *és*

$$E = \{\{a_0, a_i\} : 0 < i \leq n\} \quad .$$

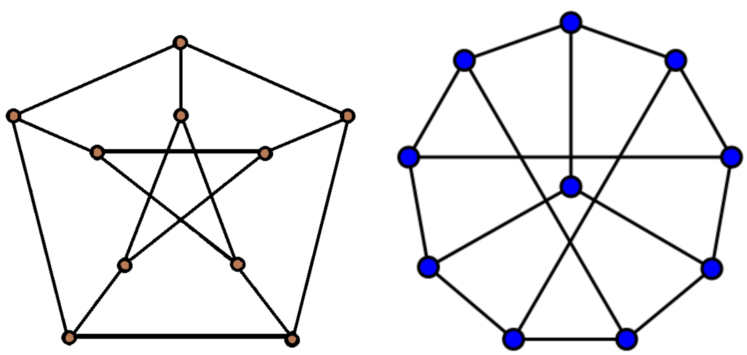
(iv) $\mathbf{W_n}$ *jelöli az* **n -ágú szélkerék** (**windmill**) **gráf***ot tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *természetes számra, ahol* $W_n = (V, E)$,

$$V = \{a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\}$$

és

$$E = \{\{a_0, a_i\}, \{a_0, b_i\}, \{a_i, b_i\} : 0 < i \leq n\}$$

(v) *A* **Petersen**[5] és **Kempe**[6] **gráfok** (melyek izomorfak!), *a* következők:



A Petersen- *és* Kempe- *gráfok*
1.2. ábra

A *kockagráfok*at (*cubic graphs*) a 3. "Hamilton körök" Fejezet 3.13.Definíciójában ismertetjük. □

Javasoljuk még az "Összefoglaló vizsgakérdések" alfejezet 1.5.1.-20. pontjaiban előforduló problémák gráfjait is felrajzolni és tanulmányozni.

[5] Julius P.Ch. Petersen (1839-1910) dán matematikus és pedagógus, a *reguláris* gráfokat ő tanulmányozta először behatóan.

[6] Sir Alfred B. Kempe (1849-1922) angol matematikus, többek között a négyszíntétellel és csuklós tartószerkezetekkel foglalkozott.

1.3. Elemi definíciók és összefüggések

Jelen alfejezetben a gráfok legegyszerűbb, általános fogalmait és tulajdonságait soroljuk fel. A vizsgált gráfok *tetszőlegesek,* azaz hurokéleket és többszörös éleket is tartalmazhatnak, természetesen *végesek.*

1.16.a) Definíció: *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf* **komplementer**[7] **gráfja** (**complement of** G) *a következő* (*szintén egyszerű*) *gráf:*

$$\overline{G} := (V, \overline{E}) \ , \quad \overline{E} := [V]^2 \setminus E \ ,$$

azaz

$$\{x, y\} \in \overline{E} \quad \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \quad \{x, y\} \notin E \qquad (x, y \in V) \ . \quad \square$$

Továbbá, legelőször is azt a kérdést kell tisztázunk: mikor tekintsünk két gráfot *azonosnak,* vagyis *ugyanannak.* Bár ez az 1.2.-1.4. Definíciókból egyértelműen következik, a precíz matematikai meghatározást alább közöljük. (Gráfok izomorfiájával a 8. Fejezetben foglalkozunk.)

1.16.b) Definíció: *A tetszőleges* $G = (V, E)$ *és* $H = (W, F)$ *gráfok* **izomorf***ak* (**isomorphic**)*, ha létezik csúcshalmazaik között* **éltartó** (**edge preserving**) *bijekció (kölcsönösen egy-egy értelmű megfeleltetés), azaz olyan*

$$f : V \to W$$

bijektív függvény, amelyre

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in F \qquad (\forall x, y \in V)$$

és többszörös élek esetén az élek multiplicitása a két gráfban ugyanannyi, azaz

$$m_H\left(\{f(x), f(y)\}\right) = m_G\left(\{x, y\}\right) \quad (x, y \in V) \quad .$$

Gráfok izomorfiáját a $G \cong H$ *jellel jelöljük.* $\square$

1.17. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy tetszőleges gráf.* G **csúcsainak fokszáma**

$$\delta(v) := \sum_{v \in e} m(e) + \sum_{\substack{v \in e \\ e \text{ hurokél}}} m(e) \quad ,$$

[7] kiegészítő (latin)

és ha a gráfban nincs többszörös él, akkor a fenti képlet az alábbi módon is írható:

$$\delta(v) := \sum_{v \in e} 1 + \sum_{\substack{v \in e \\ e \text{ hurokél}}} 1 \quad . \qquad \square$$

Tehát egy csúcs fokszáma nem más, mint a rá illeszkedő élek száma, multiplicitással, ráadásul a hurokéleket mindig kétszer számoljuk! Ez érthető is, hiszen a hurokélek mindkét "végpontja" a v csúcshoz illeszkedik, a v csúcs két "vegyértékét" köti le.

Az irodalomban nem egységes a fokszám jelölése, érdemes minden gráfelméleti könyvben legelőször a fokszám jelölését megnézni.

1.18. Definíció: *A tetszőleges G gráf egy csúcsa* **izolált**[8] (**isolated**), *ha fokszáma* 0, *vagyis él nem illeszkedik rá.* $\square$

A következő alfejezetben gráfok összefüggőségével és komponenseivel foglalkozunk, az izolált pontok speciális komponensei a gráfnak. Tulajdonképpen az olyan csúcspontok is elszigeteltek, amelyekre csak hurokélek illeszkednek, de a szakirodalomban ez a szóhasználat terjedt el, és sok összefüggés igazolásakor is jobb ez az elnevezés.

1.19. Definíció: *Egy tetszőleges gráf* **reguláris** (**regular**), *ha minden csúcsának fokszáma ugyanannyi. Ha ez a közös fokszám a $k \in \mathbb{N}$ természetes szám, akkor a gráfot* **k -reguláris** *gráfnak hívjuk.* $\square$

Íme itt a legelső "igazi" Tétel és következményei:

1.20. Tétel: (Kézfogási tétel / Handshaking Theorem) *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszerese:*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E| \tag{1.1}$$

Bizonyítás: Minden élnek két végpontja van, vagyis ezt az élet is mindkét végpontjánál, azaz kétszer számoltuk meg, még a hurokéleket is. $\square$

Hasonlóan számolja meg a juhász is juhait: a lábak számát osztja el néggyel. Ez utóbbi bizonyítás azonban csak olyan hipergráfokról szólt, amelyeknél minden hiperél 4 csúcsra illeszkedik, az egyszerűség kedvéért legyen

[8] elszigetelt (latin)

e 4 csúcs különböző, azaz $E \subseteq [V]^4$: a juhok a hiperélek, és lábnyomaik a hipergráf csúcsai (vagyis egymás lábára is léphetnek).

Hogy miért hívjuk a fenti Tételt "Kézfogási tétel"-nek? Egy társaságban a riporter mindenkitől megkérdezi, hányszor fogott kezet másokkal (a hurokélek ismét bonyodalmat okoznak), és ebből kitalálja: hány kézfogás is volt a valóságban.

1.21. Következmény: *Tetszőleges gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.*

Bizonyítás: Az (1.1) egyenlőség jobb oldala páros. □

1.22. Következmény: *A szénhidrogénekben* (C_nH_m *összegképletű molekulák*) *mindig páros számú* H *atom van.*

Bizonyítás: Csak a H csúcsok fokszáma páratlan. □

A következő fogalmat is állandóan használjuk az elmélet során: adott (input) gráfokban keresünk majd különféle speciális (jó tulajdonságú) részgráfokat.

1.23. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *tetszőleges gráf. Ekkor a* $H = (W, F)$ *gráf* **részgráf***ja* (**subgraph**) G *-nek, ha* $W \subseteq V$ *és* $F \subseteq E$, *azaz*

$$\forall x, y \in W \qquad \{x, y\} \in F \Rightarrow \{x, y\} \in E$$

és többszörös élek esetén

$$\forall e \in E \qquad m_H(e) \leq m_G(e) \ .$$

A $H = (W, F)$ *gráf* **feszített részgráf***ja* (**spanned subgraph**) G *-nek, ha* $W \subseteq V$ *és*

$$\forall x, y \in W \qquad \{x, y\} \in F \Leftrightarrow \{x, y\} \in E$$

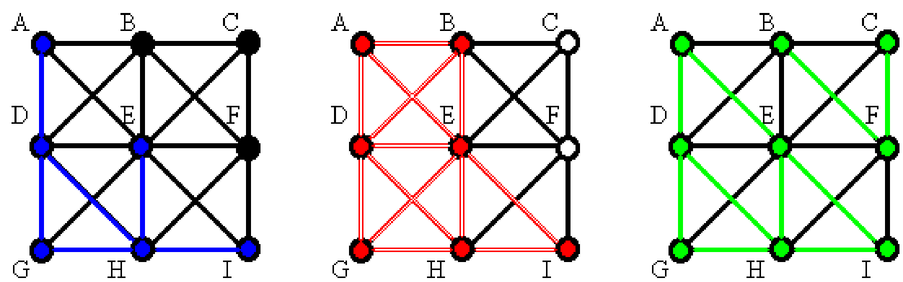
és többszörös élek esetén

$$\forall e \in E \qquad m_H(e) = m_G(e) \ .$$

A részgráfot $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$, *míg a feszített részgráfot* $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ *jellel jelöljük.* □

Bár a H gráf 1.2 Definíciójából következik, nem árt meggondolni, hogy egy G gráf tetszőleges részgráfja nem más, mint hogy a G gráf néhány csúcsát és *közöttük* néhány élt kiválasztunk, "behúzunk". A *feszített* részgráf ennél annyival több, hogy a kiválasztott csúcsok között az *összes* G -ben szereplő élt, multiplicitással együtt behúzunk. Például részgráf esetén előfordulhat a $W = V$ és $F \subsetneqq E$ eset is, míg feszített részgráf esetén a $W = V$ egyenlőségből $F = E$ következik.

Az alábbi rajzon a részgráf, feszített- és feszítő részgráfok közötti különbséget szemléltetjük.



Részgráf, feszített- és feszítő részgráfok
1.3. ábra

1.4. Utak, összefüggőség

A gráfokban előforduló utak és körök a gráf sok tulajdonságaival kapcsolatban vannak, mind elméleti és gyakorlati kérdések megoldásában fontos szerepet játszanak. Bár a nevezetes gráfok között már megismerkedtünk velük, mint különálló gráfokkal, most azonban adott gráf részgráfjaiként vizsgáljuk őket.

1.24. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy tetszőleges gráf. A* $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *pontsorozat* **k -hosszú út** *vagy* **séta** *vagy* **vonal** (**path**) G **-ben**, *ha* $\{c_i, c_{i+1}\} \in E$ *minden* $0 \leq i < k$ *esetén.*

Ha G *-ben többszörös élek is előfordulnak, akkor a* $(c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *pontsorozat mellett egy* $(e_1, ..., e_k) \subseteq E$ *élsorozatot is meg kell adnunk ahol* e_i *a* $\{c_i, c_{i+1}\} \in E$ *többszörös él közül az egyik lehetséges.*

A P *út* **kezdőpontja** c_0 , **végpontja** c_k, *vagyis a* P *út a* c_0 *és* c_k *pontokat* **köti össze.**

A G *gráf* C **köre** *minden olyan útja, amelynek kezdő és végpontja megegyezik:* $c_k = c_0$. □

Természetesen a gráf fenti definíció szerinti útjai és körei az 1.14. Definíció szerint (is) utak és körök, és a 1.23. Definíció szerinti részgráfjai is G -nek. Azonban, ha a gráf csúcsain vagy élein szeretnénk sétálni, lényeges az érintett csúcsok és élek *sorrendje*, különösen akkor, ha valamely csúcson vagy élen többször haladunk keresztül. (Ezt a kérdést részletesebben az 1.26-28. pontokban vizsgáljuk.) Ennek ellenére a fent definiált utak és körök *nem* irányított gráfok, bár, mint most említettük, az 1.23. Definíció szerinti részgráfoknál "valamivel" többek.

1.25. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy tetszőleges gráf. A* $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *út (vagy kör)* **hossza** (**length**) *a benne szereplő (érintett) élek száma:*

$$\ell(P) := k \qquad .$$

Ha G *éleit a* $w : E \to \mathbb{R}$ *függvény súlyozza, akkor egy* $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *út* **összsúlya** (**költsége**) *a benne szereplő (érintett) élek összsúlya:*

$$w(P) := \sum_{e \in P} w(e) := \sum_{i=0}^{n-1} w(\{c_i, c_{i+1}\}) \qquad \square$$

1.26. Definíció: *A* $G = (V, E)$ *gráf* $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *útja (köre)* **egyszerű út** (*vagy* **kör**), *ha a benne szereplő* $\{c_i, c_{i+1}\}$ *élek és* c_i *csúcsok mind különbözőek, azaz* P *-ben* nincs *sem* **él-** *sem* **csúcsismétlődés.** $\square$

1.27. Állítás: *Ha egy* $G = (V, E)$ *gráf* $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ *útjában (körében) van élismétlődés akkor van csúcsismétlődés is.*

Bizonyítás: Ha $\{c_i, c_{i+1}\} = \{c_j, c_{j+1}\}$ valamely $0 \leq i < j < n$ indexekre, akkor $i = j$ vagy $i = j + 1$ ami igazolja az állítást. $\square$

1.28. Algoritmus: A $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ út ismeretében egy egyszerű algoritmussal felismerhetjük az útban levő csúcs- és élismétlődéseket. Sőt ki is küszöbölhetjük azokat, azaz találhatunk olyan $P^- \subseteq P$ egyszerű utat, melynek kezdő és végpontja (c_0 és c_k) ugyanaz, mint P -ben. HF! $\square$

A következő fogalomra (többek között) a 9. "Gráfok síkbateríthetősége" Fejezetben lesz szükségünk.

1.29. Definíció: *A* $G = (V, E)$ *gráf* $P = (c_0, ..., c_k)$, $Q = (d_0, ..., d_\ell) \subseteq V$ *útjai* **csúcs-** *illetve* **éldiszjunktak**, *ha nincs közös csúcsuk illetve élük.* $\square$

1.30. Állítás: *Ha egy* G *gráf két útjának van közös éle, akkor közös csúcsuk is van.*

Bizonyítás: Az 1.27. Állítás bizonyításának mintájára. □

A fenti Állítás szerint a pontdiszjunktság feltétel erősebb az éldiszjunktságnál, példákat minden Olvasó könnyen tud rajzolni (HF).

Most a gráfok egyik legfontosabb tulajdonságát, az *összefüggőség*et és néhány egyszerű összefüggést ismertetünk. Mivel az összefüggőség szinte a gráfelmélet minden fejezetében fontos szerepet játszik, a könyv olvasása közben erre is figyeljünk.

A mindennapi szóhasználattal összhangban egy gráf összefüggősége valami olyasmit kell hogy jelentsen, hogy a gráf nem esik szét darabjaira, valamik összetartják. Lássuk tehát a precíz matematikai meghatározásokat és elemi tulajdonságaikat.

1.31. Definíció: *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf* **összefüggő**, *ha bármely $v_1, v_2 \in V$ csúcsai között van út.* □

1.32. Állítás: *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor összefüggő ha létezik olyan $a \in V$ csúcs hogy belőle a gráf minden csúcsába vezet út.*

Bizonyítás: Ha a gráf bármely $v, w \in V$ csúcsaiból eljuthatunk egy úton (éleken keresztül) a -ba, akkor természetesen a -n *keresztül* bármelyik csúcsból bármelyik csúcsba is eljuthatunk. □

1.33. Állítás: *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf bármely két pontja között ha van út akkor van* egyszerű *út is.*

Bizonyítás: Ha a $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$ út nem egyszerű, van benne $c_i = c_j$ csúcsismétlődés valamely $0 \leq i < j < n$ indexekre. Ekkor a $(c_i, ..., c_j)$ kört "kivághatjuk" az útból (HF), és az eljárást addig ismételjük, amíg az út egyszerű nem lesz. □

1.34. Állítás: *Ha a tetszőleges, összefüggő $G = (V, E)$ gráfban van kör, akkor e körből bármelyik élét elhagyva a gráf még mindig összefüggő marad.*

Bizonyítás: Legyen $P = (c_0, ..., c_k) \subseteq V$, $c_0 = c_k$ a gráf egy köre, és egyszerűség miatt tegyük fel, hogy a csúcsokat úgy számoztuk, hogy a $\{c_0, c_1\}$ élt hagyjuk el. Legyen $a, b \in V$ két tetszőleges csúcs. Megmutatjuk, hogy a csonkított G^- gráfban is van út a és b között. Az eredeti gráf összefüggő volt, ezért volt P_0 út a és b között.

Ha P_0 tartalmazta esetleg a $\{c_0, c_1\}$ élt, akkor ezt az élt (mindegyik előfordulásakor) helyettesítjuk a C kör megmaradt $(c_1, ..., c_k)$ darabjával. □

A fenti (egyszerű) **algoritmus**t ismételgetve végül körmentes összefüggő gráfokat kaphatunk, melyeket a 6."Fák" Fejezetben vizsgálunk részletesen.

Bár a gráfok alkotórészei pontok és élek, mégis nagyobb egységeket nevezünk a gráfok *komponensei* -nek. Vizsgán (sem) nem illik összetéveszteni ezeket a fogalmakat, és emlékeztetünk arra, hogy a gráf *pólusai* is mást jelentenek!

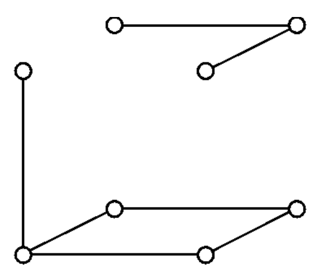
1.35. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. G maximális összefüggő részgráfjait a gráf* **komponensei***nek vagy* **tag***jainak* (**component**) *hívjuk.*

Másképpen: *$H \subseteq G$ komponens ha H összefüggő és nincs G -nek olyan $L \subseteq G$ összefüggő részgráfja mely tartalmazná H -t, azaz $H \subseteq L$ és $H \neq L$ lenne.* $\square$

Ha tekintjük V -n az "x és y között van út" $\backsim$ *ekvivalencia relációt* (HF), akkor a $\backsim$ ekvivalenciaosztályai éppen G komponenseit adják meg. (A fenti definíciót *Skolem*[9]*-lezárás* (Skolem-hull) segítségével is meg lehetne fogalmazni.) A 4."Mátrixok" Fejezetben bemutatott "tintacsöppentés" algoritmus is lényegében ezen az elven működik.

A gráf izolált pontjai nyilván a gráf (legkisebb) komponensei. Az is könnyen belátható, hogy minden gráf (saját) komponenseinek diszjunkt úniója.

Az alábbi ábrán *egy* gráf komponenseit rajzoltuk fel.



Egy több komponensű gráf

1.4. ábra

A következő két definíció azzal foglalkozik, hogy egy gráf mennyire összefüggő, milyen "nehéz" nem összefüggő részekre bontani. E fogalmakra (többek között) a 3."Hamilton körök" Fejezetben lesz szükségünk.

[9] Thoralf Albert Skolem (1887-1963) norvég matematikus

1.36. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges* összefüggő *gráf. Ekkor egy tetszőleges $v \in V$ csúcs illetve $e \in E$ él* **elvágó csúcs** *illetve* **él**, *ha a v csúcsot illetve az $e \in E$ élt a G gráfból elhagyva (v elhagyása esetén a rá illeszkedő éleket is elhagyjuk) a kapott gráf már* nem *összefüggő.* □

Természetesen egy $e \in E$ él elhagyásakor az él csúcsait *nem* hagyjuk el a gráfból.

1.37. Definíció: *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf* **k -szorosan csúcs-** *illetve* **élösszefüggő** *($k \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám), ha bármely $k-1$ -nél* kevesebb *csúcsát illetve élét elhagyva (csúcsok elhagyása esetén a rájuk illeszkedő éleket is elhagyjuk) a kapott gráf még mindig összefüggő.*

A többszörösen csúcsösszefüggő gráfokat egyszerűen csak **többszörösen összefüggő***nek is hívjuk.* □

Vegyük észre hogy az 1 -szeresen összefüggő gráfok éppen az (1.31.Definíció szerint) összefüggő gráfok.

1.38. Állítás: *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ természetes számra ha egy (tetszőleges) gráf k-szorosan* csúcs*összefüggő akkor ugyanannyiszorosan* él*összefüggő is.* □

1.39. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy* tetszőleges *gráf. Tetszőleges $x, y \in V$ csúcsai között értelmezzük az* **x és y csúcsok távolságá***t* (**distance**) *a következőképpen: legyen*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \textit{az } x \textit{ és } y \textit{ között húzódó} & \textit{ha létezik ilyen út} \\ \quad \textit{legrövidebb út hossza} & \\ \infty & \textit{ha nem létezik út} \end{cases}$$

Ha G súlyozott élű gráf $w : E \to \mathbb{R}_+$ függvénnyel, akkor definiálhatjuk a csúcsok **súlyozott távolságát:** (**weighted distance**)

$$\mathbf{d_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \textit{az } x \textit{ és } y \textit{ között húzódó} & \textit{ha létezik út} \\ \quad \textit{legolcsóbb út összköltsége} & \\ \infty & \textit{ha nem létezik} \end{cases} \qquad \square$$

Belátható, hogy tetszőleges súlyozatlan élű gráfban $d(x, y)$ metrika (ld. az alábbi Állítást), azonban súlyozott élű gráfban $d_w(x, y)$ már nem mindig (HF).

Azt is meggondolhatjuk, hogy egy gráf pontosan akkor összefüggő ha $d(x, y) < \infty$ minden $x, y \in V$ csúcspár esetén.

1.40. Állítás: *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf esetén a*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_+$$

függvény **metrika**, *azaz teljesíti az alábbi tulajdonságokat (axiómákat):*

(i) d **pozitív definit**, *azaz bármely* $x, y \in V$ *csúcsokra*

$$d(x,y) \geq 0 \qquad \text{és} \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(ii) d **szimmetrikus,** *azaz bármely* $x, y \in V$ *csúcsokra*

$$d(x,y) = d(y,x)$$

(iii) (**háromszög - egyenlőtlenség**): *tetszőleges* $x, y \in V$ *csúcsaira*

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Bizonyítás: HF. □

Az alábbi fogalmakat (is) többször fogjuk használni a gráfelmélet több fejezetében.

1.41. Definíció: *Legyen G egy* tetszőleges *gráf. Ekkor G* **átmérője** (**diameter**), **d(G)** *a gráfban található* legnagyobb, *míg G* **derékbősége** (**girth**), **g(G)** *a* legkisebb *kör hossza, illetve* $+\infty$ *ha a gráf körmentes.* □

Az alábbi fogalmak az algoritmuselmélet témakörébe tartoznak, precíz definíciójuk a III. részben találjuk meg. Mivel azonban a gráfelméleti problémákat megpróbáljuk algoritmikus szempontból is tekinteni, ezért most megadjuk a fogalmak naiv (népszerűsítő) változatát. Hangsúlyozzuk azonban, bármilyen hihetetlen is, hogy precíz matematikai fogalmakról és róluk szóló precízen megfogalmazott és bebizonyított eredményekről van szó, nem filozófiai fejtegetésekről!

1.42. Definíció: *Tetszőleges* $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *függvények esetén azt mondjuk, hogy* $f = \mathcal{O}(g)$ *azaz f (egyenlő)* **nagy ordó** (**big oh**) g , *ha f és g nagyságrendje ugyanakkora, azaz léteznek olyan* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ *valós számok, amelyekre*

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

azaz

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

bármilyen $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén. $\square$

1.43. Definíció (naiv)**:** *A π (algoritmikus) problémát $\mathcal{NP}$* **-teljes***nek* ($\mathcal{NP}$**-complete**) *hívjuk, ha igaz rá a következő: HA π -re LENNE gyors algoritmus, AKKOR a világ ÖSSZES problémájára is (azonnal) LENNE gyors algoritmus.* $\square$

1.5. Összefoglaló vizsgakérdések

Az alábbi problémákra általában a könyv több fejezetében visszatérünk. Ne csak a könyv elolvasása után, hanem már olvasása közben is gyűjtsük össze a különböző elméleti válaszokat és algoritmusokat!

1.5.1. Összefüggőség- ellenőrző és komponens- kereső algoritmusok, összefüggések.

1.5.2. Mely főbb fogalmakban (Definíciók) elméleti összefüggésekben (Tételek és Állítások) és algoritmusokban lényeges vagy lényegtelen az adott gráf összefüggősége?

1.5.3. Tetszőleges gráfban páratlan/páros/bármilyen kör létezésére ill. a gráf körmentességére vonatkozó eredmények.

1.5.4. Tetszőleges gráfok izomorfiájáról szóló összefüggések, megismert algoritmusok.

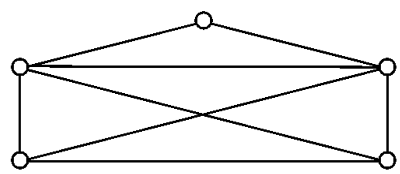
1.5.5. Nevezetes gráfok (ld. fenti alfejezet) összes tulajdonságát gyűjtsük össze a könyv különböző fejezeteinek megfelelően (pl. K_n , $K_{m,n}$, H_n , C_n, P_n , S_n , W_n , Petersen- , fa- , reguláris-, stb. gráfok).

A bevezetőben említett valamint az alábbi kérdéseket fogalmazzuk meg a gráfelmélet fogalmaival és keressük meg a választ a tanultak alapján!

1.5.6. Igaz-e, hogy egy 6 tagú társaságban, ahol a személyek ismeretsége kölcsönös, mindig található 3 olyan személy, akik mindegyike vagy ismeri a másik kettőt, vagy mindegyike nem ismeri a másik kettőt!

1.5.7. Bejárható-e a 8x8 -as sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk, és visszatérjünk a kiindulási mezőre?

1.5.8. Rajzoljuk meg egy vonallal az alábbi rajzot a ceruza felemelése nélkül, és minden vonalon csak egyszer haladjunk át!



Rajzoljuk meg egy vonallal
1.5. ábra

1.5.9. Adott egy számítógép - hálózat. Vizsgáljuk meg megbízhatóságát, ha tudjuk, hogy egyszerre legfeljebb két kapcsolatnak szabad elromolnia !

1.5.10. Elhelyezhetők -e 0 -ák és 1 -esek egy kör kerületére úgy, hogy egy adott körüljárási sorrend szerint az egymás után következő három számjegyet az összes lehetséges módon leolvasva minden 3 hosszúságú 0-1 sorozatot pontosan egyszer kapjunk meg?

1.5.11. Egy klubdélutánon 10 fiú és 10 leány van jelen. Minden fiú legalább 5 lányt és minden lány legalább 5 fiút ismer (az ismeretség kölcsönös). Táncolhat-e az összes résztvevő úgy, hogy minden táncoló párban levő fiú és lány ismerje egymást?

1.5.12. Egy telken 3 ház és 3 kút van. Tervezhető -e kilenc út a házaktól közvetlenül a kutakhoz anélkül, hogy az utak keresztezzék egymást?

1.5.13. Legkevesebb hány színnel tudjuk Európa térképét (2000.augusztus 31. -ei állapotában) úgy kiszínezni, hogy határos országok színei különbözők legyenek?

1.5.14. Igaz-e, hogy minden társaságban páros azon személyek száma, akik akik páratlan sok jelenlevőt ismernek (kölcsönösen)?

1.5.15. Miért nyílt szénláncúak a paraffinok (a C_nH_{2n+2} képletű szénhidrogének)?

1.5.16. Miért van minden fullerénmolekulában pontosan 12 db ötszög és (szinte) akármennyi hatszög?

1.5.17. Egy sakkversenyen bármely két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Mutassuk meg, hogy a verseny bármely pillanatában van két versenyző, akik eddig ugyanannyi mérkőzést játszottak le!

1.5.18. Leültethető-e egy öttagú ill. hattagú társaság minden tagja egyetlen (kerek) asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a két szomszédja, feltéve hogy mindenkinek a társaságban legalább 3 (kölcsönösen) ismerőse van?

1.5.19. Egy gyár hat különböző színű fonalból készít kétszínű kelméket. Minden szín legalább három párosításban előfordul. Mutassuk meg, hogy kiválasztható a kelmék közül három olyan, amelyeken mind a hat szín előfordul!

1.5.20. A síkon (vagy a térben) adott néhány (véges számú) pont úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok mind különbözőek. Minden pontot kössünk össze a hozzá legközelebbi ponttal. Igazoljuk, hogy bezáródó vonal nem jöhet így létre!

1.6. Feladatok

Az előző alfejezeten kívül a Szerző $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjteményében sok feladatot találunk a gráfok elemi tulajdonságait illetően, ezekből most csak párat ismertetünk.

1.1.Feladat: Mutassuk meg, hogy egy egyszerű gráfban mindig van (legalább) két azonos fokú csúcs!

1.2.Feladat: Átlagosan hány élük van az n számozott csúcsú egyszerű gráfoknak ?

1.3.Feladat: Mutassuk meg, hogy minden kétpólusú gráfban minden kör páros hosszúságú.

1.4.Feladat: Van-e 77 csúcson 5 -reguláris gráf ?

1.7. Hivatkozások

$[AB]$ Andrásfai Béla: *Gráfelmélet*, Polygon könyvtár, Szeged, 1994
$[BC]$ Berge, Claude: *Graphs and Hypergraphs,* North-Holland, 1973
$[GJ]$ Goldman Júlia: *Egy ötlet: alkalmazzunk gráfokat,* VIII. (1998), 91-94
$[PK]$ Pintér Klára: *Rajzoljunk gráfokat*, Polygon VIII. (1998), 51-71

2. fejezet

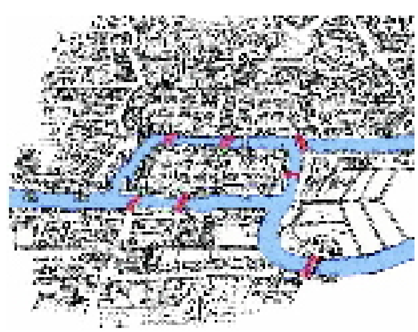
Euler körök és utak

DEFINÍCIÓK. EULER TÉTELEI, AZ ALGORITMUS GYORSASÁGA. A KÍNAI POSTÁS PROBLÉMÁJA.

Kivétel nélkül minden gráfelméleti könyv, tanulmány, előadás Euler 1736-ban megjelent dolgozatának említésével indul, ami való igaz, a legelső olyan munka, mely elvonatkoztatott absztrakt *valamik* és a közöttük levő *kapcsolatok*at vizsgálja.

2.1. A königsbergi hidak

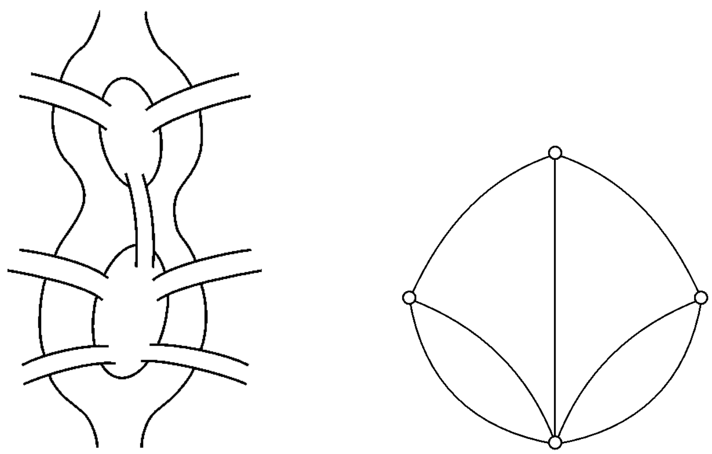
Az alábbi ábrán láthatjuk a Königsbergi (ma Kalinyingrádi) Pregel folyón átívelő 7 hidat.



Königsberg ma (Kalinyingrád) és a hidak
2.1. ábra

Lehetséges -e (vasárnap délután) olyan sétát tennünk, hogy minden hídon *pontosan egyszer* haladjunk végig (az mindegy, hogy milyen irányban)? Indulási és érkezési helyünket a városban tetszőlegesen határozhatjuk meg. Olyan sétát is kérdezhetünk, amikor indulási helyünkre kell visszaérkeznünk.

Nyilvánvalóan választásunk a szárazföldi részeken (part vagy sziget) van: melyik csatlakozó hídon folytatjuk utunkat. Így, ha a szárazföldeket (csomó) pontokkal, a hidakat vonalakkal (élekkel) ábrázoljuk, akkor a 2.2. ábrát kapjuk.



A hidak és a gráf-modell
2.2. ábra

A feladat pedig a következő: minden élen pontosan egyszer kell keresztülhaladnunk, mindegyik csúcsot többször is érinthetjük, a kiindulási és az érkezési csúcsok tetszőlegesek. A probléma nehezebb változatánál a kiindulási és az érkezési csúcs tetszőleges de *azonos*.

Ehhez *hasonló* feladattal iskolában, rejtvényújságban sokszor, talán még a gyakorlatban is néha találkozunk: megadott ábrát kell megrajzolni *egy vonással*, a ceruza felemelése nélkül, minden vonalon csak (pontosan) egyszer keresztülhaladva. Itt is nehezíthetjük a feladatot azzal, hogy a kiindulási és az érkezési csúcs legyen azonos. A szerző $[SzIs,'97]$ feladatgyűjteményében is sok hasonló gyakorló ábrát találunk (HF).

A fenti típusú problémákat gyakran *"a Königsberi hidak problémájának"* is szokás hívni, alább megadjuk precíz leírásukat.

A továbbiakban (mint az egész könyvben is) $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, azaz többszörös és hurokélek is lehetnek a gráfban.

A probléma két változatát - út vagy kör - hasonlóságuk miatt igyekszünk, ahol lehet egyszerre vizsgálni, vigyázzunk azonban a különbségekre!

2.1. Definíció: *A $C \subseteq G$ út/kör a gráf* **Euler útja/köre** *ha G minden élét pontosan egyszer tartalmazza, azaz ha C -ben érintett csúcsok sorrendben $C = (c_1, ..., c_m)$, akkor a*

$$\{\{c_i, c_{i+1}\} \;:\; i < m\}$$

illetve a

$$\{\{c_i, c_{i+1}\} \;:\; i < m\} \cup \{c_i, c_{i+1}\}$$

élek sorozata egyszeresen kiadja a G gráf E éleinek halmazát. □

2.2. Megjegyezések: (i) használatos még az **Euler-bejárás** elnevezés is, mi inkább a matematikai szakkifejezéseket használjuk.

(ii) Az Euler utak/körök nem feltétlenül egyszerűek, hiszen csúcsismétlődés lehetséges bennük (sőt legalább harmadfokú csúcsoknál szükséges is a csúcs többszöri érintése), de az élismétlődés, mint a definíció ki is mondja, ki van zárva.

(iii) Bár C részgráfja G -nek, de a csúcsok és élek megegyezése miatt $C = G$, vagyis így, részgráfokkal, nehézkes lenne a definíció. Vigyázat: C megadásánál lényeges a *csúcsok* megadási sorrendje, a csúcsok ismétlődése ellenére (vagy éppen miatta). Tehát *tévúton* jár az, aki az Euler - utakat/köröket részgráfként igyekszik (egyszerűsítve) megközelíteni!

Az eredeti definíciót általánosíthatjuk többféleképpen: például, ha minden élt (utcát) *pontosan kétszer* kell bejárnunk ("precíz postás"), vagy nevezetes a "kínai postás" problémája

2.3. Probléma: (A Kínai postás problémája)**:** *Adott egy G súlyozott élű gráf $w : E \to \mathbb{R}_+$ pozitív súlyfüggvénnyel. Keresendő olyan $C \subseteq G$ út/kör amely G minden E -beli élét (legalább egyszer) tartalmazza és*

$$w(C) := \sum_{e \in C} w(e)$$

minimális. □

A fenti problémát Mei-ko Kwan kínai matematikus tanulmányozta először, az ő tiszteletére nevezték el a problémát így. A fenti változatban (is) természetesen még élismétlődés is lehetséges. A probléma fenti és más változataival könyvünkben nem foglalkozunk, az érdeklődőknek Hajnal Péter [$HaPé,'97/3$] és Lipi-Nemes-Novák [LNN] könyveit ajánljuk

2.2. Euler tételei

A kérdéskör legelső és legfontosabb eredménye Euler eredeti tétele, amit alább foglalunk össze, sőt lényegében Euler eredeti gondolatmenetét használjuk. Felhívjuk a figyelmet, hogy a tétel egyrészt egyszerű, és a gyakorlatban is pillanatok alatt ($\mathcal{O}(n^2)$, de miért?) ellenőrizhető jellemzést ad az Euler-körök és utak létezésére[1], sőt *gyors* algoritmust is megkeresésükre!

Hangsúlyozzuk, hogy az alábbi tételekben G tetszőleges gráf, azaz többszörös- és hurokélek is lehetnek a gráfban.

2.4. Tétel[2] (Euler, 1736)**:** *Tetszőleges G gráfban pontosan akkor van* Euler - kör, *ha a gráf összefüggő (izolált pontoktól eltekintve) és minden csúcs fokszáma páros.*

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Ha a gráfban van Euler- kör, akkor izolált pontok nem lényeges hogy vannak avagy sem (hiszen az élek iránt érdeklődünk), egyébként a gráf többi része (csúcsa) szükségszerűen összefüggő, hiszen a többi csúcs mindegyike (legalább) egy élhez tartozik, és az Euler kör, összefüggő lévén, és az összes élt tartalmazza, így az összes többi (nem izolált) csúcsot összeköti. Továbbá, az élek bejárásakor minden csúcsnál ugyanannyiszor lépünk ki mint be (hurokéleknél is), hiszen körbementünk, vagyis minden csúcs fokszáma valóban páros.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tehát G az izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és minden csúcs fokszáma páros, és a gráfban egy Euler - kört kell keresnünk. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az izolált pontokat nem vesszük figyelembe.

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk a gráf *éleinek* számára vonatkozóan, sőt egy (polinomiális) algoritmust is adunk az Euler-kör megkeresésére.

Ha a gráf *egyetlen* élt tartalmaz, az csak hurokél lehet, ha minden csúcs foka páros, ez pedig egy Euler-kör.

Ha *két* élünk van, akkor az összefüggőség és a csúcsok páros fokszámai miatt a két él vagy egy kétszeres és két különböző végpontú él, vagy két hurokél egyetlen pontra illeszkedve (HF: miért?)

Tekintsük tehát az indukciós lépést, vagyis egy $G = (V, E)$ gráfot, több mint két éllel.

Válasszunk egy tetszőleges csúcsot, $v_0 \in V$ -t. Induljunk el v_0 -ból bármelyik, belőle kiinduló élen és tegyünk egy sétát tetszőleges éleken keresztül,

---

[1] ellentétben a Hamilton körökkel, amik létezésének problémája $\mathcal{NP}$ -teljes

[2] Sem ez, sem a következő Tétel nem tévesztendő össze Euler *poliédertételei*vel, amiket a 9. Fejezetben ismertetünk!

amíg el nem akadunk. Útközben csak arra kell ügyelnünk, hogy egyetlen élen se menjünk keresztül több mint egyszer.

Hol akadhatunk el? Ha egy csúcson keresztülmegyünk, fokszámát kettővel "csökkentettük", azon két élére nem léphetünk már többször, amelyiken bejöttünk ill. kimentünk. Ez csak a legelső, v_0 csúcsnál és csak a legelső lépésünknél (első él) nincs így. Lévén mindegyik csúcs eredeti fokszáma páros, csak v_0 -ban akadhatunk el, vagyis kört jártunk be. Jelöljük ezt a kört C_0 -al, ismételjük: C_0 -ban élismétlődés nincs!

Hagyjuk el a G gráfból a C_0 által érintett éleket és az esetleg így keletkezett izolált csúcsokat. A megmaradt gráf nem lesz feltétlenül összefüggő, komponenseit (amelyek azonban már összefüggőek) jelöljük $G_1, ..., G_k$ -val.

Mint feljebb meggondoltuk, előző (C_0 -beli) sétánk során *minden* csúcsot páros sokszor érintettük, vagyis fokszámukat páros számmal csökkentettük. Így a G_i komponensek csúcsai páros fokszámúak, vagyis összefüggő voltuk miatt teljesítik Euler feltételeit. Vagyis alkalmazhatjuk az indukciós feltevést a $G_1, ..., G_k$ komponensekre, ami alapján megkapjuk $C_1, ..., C_k$ Euler - köreiket.

A C_0 és $C_1, ..., C_k$ körökkel nyilvánvalóan egyrétűen lefedhetjük az eredeti G gráf összes élét, de nekünk egy körre van szükségünk. Az alábbi állítás alapján össze tudjuk fűzni köreinket *egyetlen* körré, ami nyilván a keresett Euler - kör lesz.

2.5. Segédállítás[3]**:** *C_0 -nak mindegyik C_i körrel van (legalább egy) közös csúcspontja.*

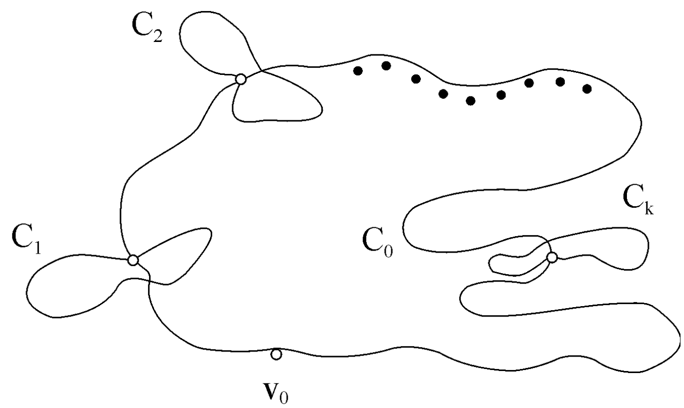
Bizonyítás: Ne feledjük, hogy G eredetileg összefüggő volt.

$k = 1$ esetén, vagyis ha C_0 elhagyása után csak a G_1 komponenst kapjuk, akkor G nem más mint G_1 és C_0, ami csak akkor lehet összefüggő ha van közös pontjuk.

$k > 1$ esetén pedig a $G_1, ..., G_k$ komponensek (csúcsai) között csak C_0 élein keresztül van út, az állítás ekkor szintén nyilvánvaló. □

Az állítás alapján pedig a C_0 és $C_1, ..., C_k$ köröket már egyszerűen felfűzhetjük egyetlen nagy körré (ami az eredeti G gráf Euler - köre lesz), a "körutazás" módszerrel.

[3] latinul Lemma



Euler- körök felfűzése
2.3. ábra

Induljunk el C_0 egyik, tetszőleges csúcsából (akármelyik irányba), C_0 élein keresztül. (Nem feltétlenül kell a v_0 csúcsból elindulnunk.) Addig maradjunk a C_0 körön, amíg bele nem botlunk valamelyik C_{i_1} körbe (annak egyik v_{i_1} csúcsába). Utunkat most a C_{i_1} kör élein folytatjuk, és természetesen a v_{i_1} csúcsnál térünk vissza a C_0 körre. Ismét a C_0 körön haladunk, míg valamely másik C_{i_2} körhöz nem érkezünk, annak v_{i_2} csúcsánál. A C_{i_2} kör bejárása után a v_{i_2} csúcsnál ismét visszatérünk a C_0 körre, és így tovább. Már csak annyit kell meggondolnunk (nem nehéz), hogy végül is mindegyik $C_1, ..., C_k$ kört sikerült felfűznünk, és a kiindulási csúcsba értünk vissza. Mint említettük, a kapott kör valóban Euler - kör. $\square$

Vegyük észre, hogy a tétel bizonyítása egy gyors (polinomiális) és egyszerű *algoritmust* is ad a létező Euler-körök/utak *megtalálására* is! (HF az algoritmus gyorsaságának $\mathcal{O}(...)$ megállapítása!) Az algoritmus programozása a tapasztalatok alapján nem nehéz, javasoljuk az önmagukat rekurzíve meghívó alprogramok (procedúrák/szubrutinok/eljárások ...) használatát, a bizonyításban használt teljes indukció mintájára.

Bár a fenti Tételből egyszerűen következik, mégis érdemes külön Tételként megfogalmazni az Euler - utak esetét:

2.6. Tétel (Euler)**:** *Tetszőleges G gráfban pontosan akkor van* Euler - út, *ha a gráf összefüggő (izolált pontoktól eltekintve) és a páratlan fokú csúcsok száma* 0 *vagy* 2 .

Bizonyítás: Ha a gráfban nincs páratlan fokú pont, akkor az előző Tétel szerint van benne Euler - kör.

Legyen tehát $a, b \in V$ a gráf két páratlan fokú csúcsa. Ha gráfunkat bővítjük egy új $\{a, b\}$ éllel, akkor minden csúcs fokszáma páros lesz. Mivel többszörös éleket Euler előző tétele megenged, ezért a bővített gráfban van Euler - kör, amiből az új $\{a, b\}$ élt elhagyva egy Euler - utat kapunk. □

A bizonyításból az is kiderül, hogy az Euler - út végpontjai a páratlan fokú csúcsok.

Euler tételei alapján, mint 1736 -ban megjelent dolgozatában is kimutatta, Königsbergben semmilyen séta (kör vagy út) nem lehetséges.

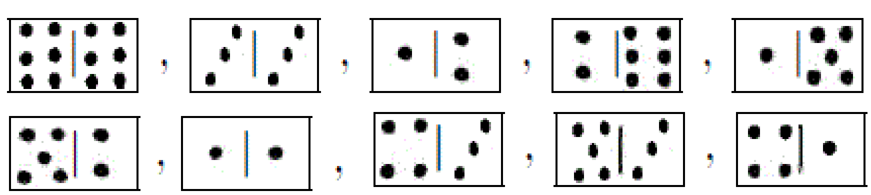
Végezetül röviden leírjuk Fleury algoritmusát [$RoKe,'91$] alapján, melyet részletesebben Hajnal Péter [$HaPé,'97/3$] könyvében találhatunk meg.

2.7. Algoritmus (Fleury) Euler - körök keresésére. Induljunk ki egy tetszőleges $x_0 \in V$ csúcsból, egymás után válasszunk ki egymáshoz kapcsolódó éleket. A kiválasztott éleket távolítsuk el a gráfból, és minden lépésben a legutolsó kiválasztott élhez csatlakozó élek közül válasszunk ki egy nem elvágót (aminek elhagyása után a megmaradt gráf még mindig összefüggő marad). □

2.3. Feladatok

A szerző [$SzIs,'97$] feladatgyűjteményében elegendő változatos feladatot találunk, így csak egyet említünk:

2.1. Feladat: Az alábbi dominókövekből lehet-e egy olyan kört kirakni, hogy mindegyik követ felhasználjuk, és a csatlakozó köveken ugyanannyi pötty legyen az érintkezési felükön?



2.4. Hivatkozás

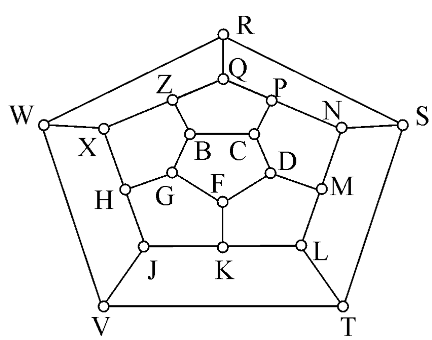
[LNN] Lipi Gábor, Nemes Áron, Novák István: *A kínai hadseregtől az utazó ügynökig (Gráfok gépközelben),* Novotrade, 1990

3. fejezet

Hamilton körök és utak

Hamilton körök és utak, az utazó ügynök problémája. Elvágó pontrendszer. Dirac Gábor, Ore, Pósa Lajos és Erdős Pál tételei. Kockagráfok és alkalmazásaik.

1857 -ben Hamilton[(1)] úr 25 angol fontért adta el egy kereskedőnek az alábbi *Dodekaéder - játék*ot (a kereskedő meggazdagodásáról nincs hírünk): a dodekaéder[(2)] csúcsai különböző városokat jelölnek, mint például *Brüsszel, Canton, Delhi, ... , Zanzibár.*



A dodekaéder és élgráfja
3.1. ábra

Az éleken haladva úgy kell a városokat bejárnunk, hogy minden csúcson pontosan egyszer haladjunk keresztül és a legvégén a kiindulási csúcsba

[1)] Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus

[2)] 12 lapú, 20 csúcsú és 30 élű szabályos test, ld. a középiskolai *Négyjegyű Függvénytáblázatok* segédkönyv térgeometriai részében.

térhessünk vissza. Sőt, tetszőleges (egymás mellett levő) városból kiindulva kell az összes városon keresztülhaladni.

Az Olvasó által esetleg már hallomásból ismert *"Utazó ügynök problémája"* hasonló de nem ugyanaz, a következő alfejezetben részletesebben bemutatjuk.

3.1. Hamilton körök

3.1. Definíció: *Egy tetszőleges G gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazó útját/körét* **Hamilton út -***nak ill.* **Hamilton kör -***nek nevezzük.* □

3.2. Megjegyzések: (i) Már itt hadd hívjuk fel az Olvasó figyelmét arra, hogy bár a Hamilton- és Euler- körök definíciója nagyon hasonló (élek helyett mindössze csúcsok szerepelnek), de ez nagyon is lényeges különbség! Nem csak egyszerű vagy gyors algoritmusunk nincs Hamilton körök keresésére vagy akár létezésük eldöntésére, de ráadásul még $\mathcal{NP}$ - *teljes*[3] is! Ez a Tétel más szavakkal azt fejezi ki, hogy Hamilton - körök keresése "nehéz" (és ezt be is bizonyítja), röviden: "bizonyíthatóan nehéz".

(ii) Mint az Euler-köröknél, a Hamilton köröket is szokás *Hamilton -* **bejárás -**nak vagy -**vonal -**nak is hívni. A Hamilton kört/utat tartalmazó gráfot *Hamiltonian* ill. *semi*[4] *Hamiltonian graph* -nak is hívják.

(iii) Az Euler körökkel/utakkal ellentétben, a Hamilton körök és utak részgráfjaiként is felfoghatók a gráfnak, hiszen nincs csúcs- (és így él-) ismétlődés sem a Hamilton kör/út -ban.

(iv) A fenti problémára csak $\mathcal{O}(2^n)$ lassú algoritmusok ismeretesek, mint minden NP-teljes problémára. Egy triviális "algoritmus" a következő: Vizsgáljuk meg a csúcsok összes lehetséges permutációját: éleken keresztül be lehet -e járni a csúcsokat ebben a sorrendben. Ez n csúcs esetén persze $\mathcal{O}(n!) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) > \mathcal{O}(2^n)$ lassú algoritmus ami "természetesen" már közepes méretű gráfoknál is *használhatatlan* (ld. az *A* Függelék táblázatát). Vannak ugyan nagyságrendekkel gyorsabb Hamilton - köröket kereső algoritmusok is, azonban azok is $\mathcal{O}(2^n)$ lassúak.

---

[3] Egy π algoritmikus probléma $\mathcal{NP}$ **- teljes**sége körülbelül annyit tesz (naiv definíció): *"Ha a π problémára lenne gyors [azaz polinomiális] algoritmus, akkor a világ összes problémájára is lenne gyors algoritmus. "* Ismételjük: ez a Tétel nem csak tapasztalat, hanem bebizonyított tény.

[4] félig (latin)

3.3. Észrevétel: *Hamilton körök és utak mindig egyszerűek.*
Bizonyítás: következik a definícióból! □

3.4. Feladat: Az új fogalommal való ismerkedés céljából vizsgáljuk meg a nevezetes gráfokat: K_n, $K_{m,n}$, fák, C_n, W_n, S_n, H_n kockagráfok,..., van -e bennük Hamilton - kör. (HF)

Gyakorlati feladatoknál jól használhatók az alábbi egyszerű, *negatív* összefüggések, azaz olyan állítások, melyek Hamilton - körök és utak létezését kizárják. Hangsúlyozzuk azonban, hogy az alábbi állítások nem "szükséges és elégséges" feltételeket tartalmaznak, azaz a bennük szereplő feltétel nem teljesülése esetén egyáltalában nem biztos, hogy lenne bennük Hamilton - kör vagy út !

3.5. Állítás: *Ha a G gráfban van k db olyan csúcs, ($k \in \mathbb{N}$ tetszőleges), hogy e csúcsokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt G -ből elhagyva*

(i) *a gráf k-nál* több *komponensre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton* kör.

(ii) *a gráf $k+1$ -nél több komponensre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton* út.

Bizonyítás: **(i)** Egy egyszerű körből k csúcsot elhagyva a kör pontosan k komponensre esik szét. Mivel egy Hamilton -kört tartalmazó gráfban a körön kívül más élek is lehetnek, ezért az ilyen gráfok legfeljebb k komponensre eshetnek szét, ami bizonyítja az állítást.

(ii) Hasonlóan. □

3.6. Definíció: *A fenti állításban szereplő k pontot* **elvágó pontok***nak illetve* **erősen elvágó pontok***nak (pontosabban* **pontrendszer***nek) nevezzük.*
□

Az alábbi "*nyakkendő*" gráfban például az A jelű pont elvágó de nem erősen elvágó pont, míg a W_3 "*szélkerék*" gráfban B erősen elvágó pont.

Elvágó és erősen elvágó pontok
3.2. ábra

Az alábbi tételek mennyiségileg is leírják azt az érzésünket, hogy sok élt (nagy fokszámú pontokat) tartalmazó gráfokban van H-kör (pozitív tételek).

3.7. Tétel (Dirac Gábor, 1952)**:** *Ha egy egyszerű gráfban minden pont foka*

$$\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} \ , \tag{3.1}$$

ahol V *a gráf csúcsainak halmaza,* $|V| \geq 3$, *akkor a gráfban van Hamilton-kör.*

A gráf egyszerűségének feltételezése nyilvánvalóan szükségességes, hiszen többszörös élekkel akármeddig növelhetnénk a fokszámokat anélkül, hogy a gráf Hamilton - kört tartalmazna (HF).

Az Olvasó könnyen talál olyan egyszerű gráfot is, amelyben $\delta(v) = \frac{|V|}{2} - 1$ minden $v \in V$ csúcsra, és amely még csak nem is összefüggő, azaz Hamilton út sincs benne. Vagyis a (3.1) becslés éles, nem csökkenthető. Azonban a becslés nem szükséges, hiszen tetszőleges (nagy) körben minden csúcs fokszáma 2 .

Bizonyítás: Legyen $|V| = 2m$ és indirekt módon tegyük fel, hogy G -ben nincs Hamilton - kör. Ha létezik G komplementerének olyan éle, amelyet a G gráfhoz hozzávéve az így kapott bővebb gráfban még mindig nincs Hamilton - kör, akkor jelöljünk egy ilyen élt k_1 -el, és a G -hez k_1 hozzávételével nyert gráfot G_1 -el. Folytassuk az eljárást addig amíg lehetséges, azaz egy maximális, pontosabban *telített* (latinul *szaturált*) gráfot kapunk, az "újabb élek hozzávételéle Hamilton-körök nélkül" tulajdonságra nézve. Az eljárás megakad, mivel a gráfok éleinek száma növekszik, csúcsain változatlanok, a gráf a feltétel szerint egyszerű, és ugye K_n -ig csak nem juthatunk el. Jelöljük a kapott gráfok sorozatát $G_1, ..., G_s$ -el, természetesen a $G_s = G$ esetet is megengedjük. Az alábbiakat tudjuk:

$$G \subseteq G_s \quad , \tag{3.2}$$

$$G_s \textit{ -ben nincs Hamilton-kör ,} \tag{3.3}$$

$$G_s \textit{ telített .} \tag{3.4}$$

és (3.2) -ből azonnal következik:

$$G_s \textit{ -ben minden pont foka legalább } m \ . \tag{3.5}$$

Ha most belátjuk, hogy bármely, (3.4) és (3.5) tulajdonsággal rendelkező G_s gráf tartalmaz Hamilton - kört, akkor (3.3) szerint ellentmondásra jutunk.

3.8. Lemma: *Legyen G egy tetszőleges egyszerű $2m$ csúcsú gráf, amelyben minden pont fokszáma legalább m , továbbá G -t komplementere bármely élével bővítve már Hamilton - kört tartalmazó gráfot kapunk. Ekkor G maga is tartalmaz Hamilton - kört.*

Bizonyítás: K_{2m} tudvalevőleg mindig tartalmaz Hamilton - kört ha $m \geq 2$. Legyen tehát $a, b \in V$ két, éllel össze nem kötött csúcs G -ben. Feltevésünk szerint az $\{a, b\}$ élt G -hez csatolva már van Hamilton - kör a bővített gráfban, aminek $\{a, b\}$ -től különböző élei már G -beliek és a -ból b -be vezető utat alkotnak, és G összes csúcsát tartalmazzák (azaz Hamilton út). Jelöljük az út (azaz a G gráf) pontjainak sorozatát (a bejárás sorrendjében)

$$a = a_1, \ a_2, \ ..., \ a_{2m-1}, \ a_{2m} = b \tag{3.6}$$

-vel. Az $a = a_1$ csúcs a feltételek szerint össze van kötve a_2-vel de nincs összekötve $a_{2m} = b$-vel és legalább m -edfokú, így az $a_2, ..., a_{2m-1}$ pontok közül legalább $m - 1$ -el össze van kötve. Ha minden ilyen, az a -val összekötött ponthoz megkeressük a sorrendben közvetlenül előtte állót, akkor így legalább $m - 1$ pontot találunk, amelyek az $a_2, ..., a_{2m-2}$ pontok közül valók és olyanok hogy a sorrendben utánuk következő a -val össze van kötve.

Az $a_2, ..., a_{2m-2}$ pontok közül legalább $m - 1$ össze van kötve b -vel, mert b is legalább m -edfokú.

Az $a_2, ..., a_{2m-2}$ csúcssorozatban ugye $2m - 3$ csúcs van, így van legalább egy olyan közöttük, amely a fenti két bekezdésben leírt két, legalább $m - 1$ -elemű halmaz mindegyikében benne van, legyen ez a_i .

Tehát a_i össze van kötve b -vel és a_{i+1} össze van kötve a -val. Ekkor azonban a (3.6) -ban felírt Hamilton útból könnyen találhatunk Hamilton - kört is G -ben: az $\{a_i, a_{i+1}\}$ él helyett az $\{a_i, b\}$ élen keresztül b -be lépünk, visszafelé indulunk a_{i+1} -ig, majd az $\{a_{i+1}, a\}$ élen keresztül már ismét a -ban vagyunk:

$$a = a_1, \ a_2, ..., a_i, \ b = a_{2m}, \ a_{2m-1}, a_{2m-2}, ..., a_{i+1}, \ a_1 = a \quad . \qquad \square$$

Mint láttuk, a Segédtétel bizonyítja a 3.7. Tételt is. $\square$

Dirac tételét általánosította O. Ore norvég matematikus 8 évvel később:

3.9. Tétel (Ore[5], 1960)**:** *Ha egy egyszerű gráfban tetszőleges $u, v \in V$ csúcsok (amelyek között* nincs él*) fokszámainak összege legalább annyi, mint*

[5] Øystein Ore (1899-1968) norvég matematikus

a csúcsok (össz) száma, vagyis

$$\delta(u) + \delta(v) \geq |V| \quad , \tag{3.7}$$

ahol $|V| \geq 3$, *akkor a gráfban van Hamilton-kör.* □

Ore tételéből nyilvánvalóan következik Dirac tétele, továbbá az Olvasó által előbb megtalált ellenpélda azt is mutatja, hogy Ore (3.7) feltétele sem szükséges a Hamilton körök létezéséhez.

Dirac tételének nagyfokú (másik irányú) általánosítását igazolta Pósa Lajos (ld.alább) aki tétele felfedezésekor gimnáziumi tanuló volt. Bizonyításának volt alapgondolata a Hamilton - kört nem tartalmazó tulajdonságra telített gráfok vizsgálata, Dirac tételének fenti egyszerű bizonyítása is tőle származik. A 3.3. Feladatot is ezzel az ötlettel oldhatjuk meg.

Az alábbi Tételeket sem bizonyítjuk most.

3.10. Tétel (Pósa Lajos[6], 1962)**:** *Ha* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf,* $n = |V| \geq 3$ *és minden* $k \leq \frac{n}{2}$ *természetes számra igaz, hogy a legfeljebb* k*-fokú pontok száma* kisebb*, mint* k*, akkor van* G*- ben Hamilton -kör.*

Az állítás éles, vagyis bármely $n \geq 3$ és $k \leq \frac{n}{2}$ *számok esetén található olyan gráf, melynek csak* k *darab, legfeljebb* k *adfokú csúcsa van és a gráf nem tartalmaz Hamilton - kört.* □

3.11. Tétel (Pósa Lajos, 1962)**:** *Ha egy* n *pontú gráf véletlenszerűen (egyenletes eloszlással)*

$$c \cdot n \cdot \log(n)$$

élt tartalmaz, akkor elég nagy (rögzített) $c \in \mathbb{R}$ *valós számra annak a valószínűsége, hogy a gráf tartalmaz Hamilton kört,* 1*-hez tart* $n \to \infty$ *esetén.* □

A fenti és az alábbi tételek között első látásra csak árnyalatnyi különbségek vannak: a legfeljebb k -fokú pontok száma *kisebb* vagy *legfeljebb* k, valamint Hamilton - kör vagy Hamilton út létezését biztosítja a tétel. Azonban Erdős Pál alábbi Tétele jelentős élesítése Pósa Lajos Tételének, sajnos a részletekre és a bizonyításokra most nincs módunk kitérni. A vizsgán azonban vigyázzunk e tételek feltételei közötti különbségekre!

3.12. Tétel (Erdős Pál[7])**:** *Ha* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf,* $n = |V| > 2$

---

[6] 1947 -ben Budapesten született kiváló matematikus. 1971 óta az ELTE Tanárképző Karán dolgozik, "szabadidejében" tehetséges fiatalokat tanít, készít fel versenyekre.

[7] méltatását ld. az I. "Kombinatorika" Rész 7. "*Extremális halmazrendszerek*" c. Fejezet 6. lábjegyzetben.

és minden $k \leq \frac{n-1}{2}$ *természetes számra igaz hogy a legfeljebb k-fokú pontok száma* legfeljebb k*, akkor van G- ben Hamilton -út.* □

3.13. Tétel (Tutte[8], 1956)**:** *Ha a G gráf négyszeresen összefüggő és síkba teríthető akkor van Hamilton köre.* □

Bár irányított gráfokkal könyvünkben nem foglalkozunk, egy egyszerűbb (de nem triviális) Tétel mégis ide kívánkozik:

3.14. Tétel (Rédei László[9])**:** *Egy legalább két csúcsból álló teljes gráf bármilyen irányítása révén nyert gráfnak van Hamilton útja.* □

Az érdeklődők figyelmébe ajánlhatjuk Gould [G] összefoglaló cikkét, amelyben a Hamilton körök problémakör legújabb eredményeiről és nehézségéről olvashatunk.

Végül csak arra hívnánk fel ismételten a figyelmet, hogy az említett pozitív és negatív tételek feltételei között nagy távolság van, és a probléma (bizonyítottan) $\mathcal{NP}$ -teljessége miatt nem is várhatunk nagy közeledést.

Még nagyobb a nehézség az *utazó ügynök (kereskedő)* problémánál, ahol súlyozott élű (általában síkbeli) gráfban kell minimális összsúlyú Hamilton - kört keresnünk. Ugyanis,a fenti Tételek (és érzésünk szerint is) Hamilton - kör létezéséhez a gráfban sok élre van szükségünk, míg a gráf síkba teríthetőségéhez éppen ellenkezőleg, kevés élt tartalmazhat a gráf (ld. a 9.fejezetet).

Az utazó ügynök probléma a gyakorlatban igen fontos, bőséges szakirodalma van. Nem lehet egy-két összefüggést kiragadni belőle, éppen ezért még érintőlegesen sem foglalkozunk e témával könyvünkben. Mindössze csak a 7. fejezet végén, a feszítőfák egy meglepő alkalmazásaként mutatunk be egy tanulságos példát. Az Olvasóknak, első ismerkedésként a [GL] és [LNN] könyveket ajánlhatjuk.

3.2. Kockagráfok és Gray-kódok

Az alábbiakban ismertetendő speciális gráfoknak sokrétű alkalmazása van a műszaki életben, elektronikai áramkörök elméletében, matematikai logikában, eméleti vizsgálatuk is érdekes tulajdonságaikat tárja fel .

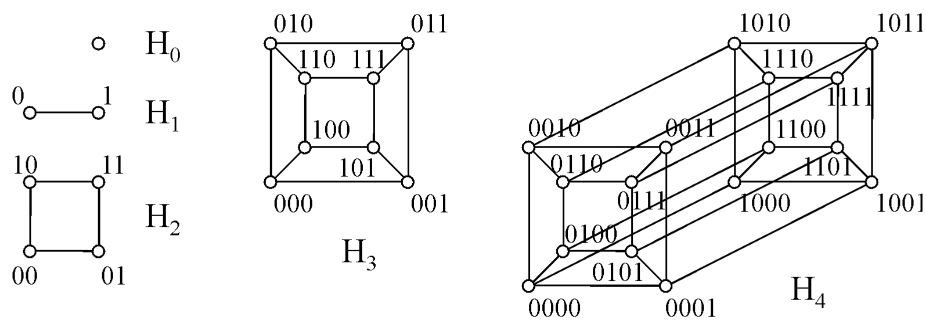
[8] William Thomas "Bill" Tutte (1917-2002) angol-kanadai matematikus.
[9] Rédei László (1900-1980) magyar matematikus.

3.15. Definíció: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra az* **n-dimenziós kockagráfok***at* (**cubic graphs**) *csúcsaik* **standard címkéi***vel a következőképpen definiáljuk:*

$\mathbf{H_0}$:= *egyetlen pont él nélkül, címkéje legyen* (0) .

$\mathbf{H_{n+1}}$ *-et a következőképpen kapjuk meg: rajzoljuk le H_n -et két példányban és a megfelelő (azonos címkéjű) csúcsokat kössük össze egy-egy új éllel; majd H_n egyik példánya csúcsainak eredeti címkéi elé írjunk* 0 *-át, míg H_n másik példányának eredeti címkéit* 1 *-el egészítsük ki.* $\square$

Az alábbi ábrán néhány, kisebb dimenziós kockagráfot mutatunk be, $\mathbf{H}_{10}$ felrajzolása HF. (Könyvünk címlapján $\mathbf{H}_7$ látható.)



Néhány kockagráf standard címkékkel
3.3. ábra

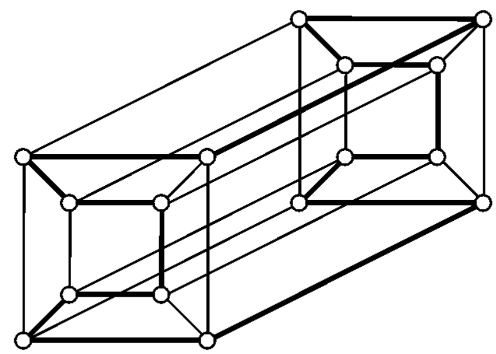
Bemelegítésként megmutatjuk, hogy bármely dimenziós kockagráfban van Hamilton kör, majd részletesen megvizsgáljuk tulajdonságaikat, végül röviden megemlítjük néhány alkalmazásukat.

3.16. Állítás: *H_n -ben, $n \geq 2$ esetén mindig létezik Hamilton kör.*

Bizonyítás: Indukcióval $n \in \mathbb{N}$ -re. $H_2 = C_4$ (négyzet), amiben láthatóan van Hamilton - kör.

Az indukciós lépés $n + 1$ -re a következő. H_n két példányában az indukciós feltétel szerint létező Hamilton köröket azonos helyen megszakítjuk, és a H_n két példányában levő megfelelő végpontokat összekötő új élekkel e két megszakított Hamilton kört összekötjük. $\square$

Például $n = 4$ esetén az alábbi Hamilton - kört kapjuk:



H_4 Hamilton köre
3.4. ábra

3.17. Állítás: *H_n -ben az éllel összekötött (szomszédos) csúcsok standard kódjai pontosan* egy *számjegyben (digit) térnek el egymástól.*

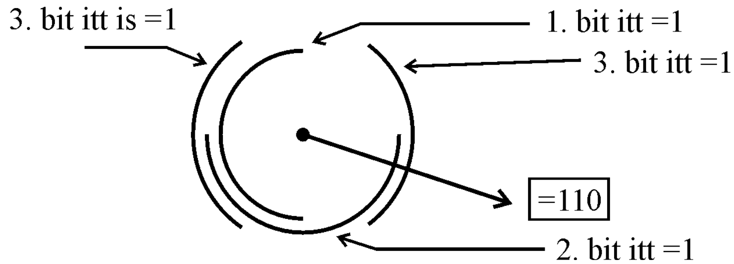
Bizonyítás: n-re vonatkozó indukcióval. $n = 0$ "üresen" igaz (nincs két szomszédos csúcs).

H_{n+1} ugye H_n két példányának megfelelő módon történt összekötésével jön létre. Ha a két csúcs ugyanabban a H_n példányban van, akkor az indukciós feltevés miatt az állítás igaz. Ha pedig két különböző H_n példányban vannak, akkor a konstrukció miatt pontosan akkor vannak összekötve, ha eredeti címkéjük megegyezett, de most egyikük címkéjét 0 -val, míg a másikat 1 -el bővítettük, ami igazolja állításunkat. □

A fenti állítások alapján könnyedén tudunk akár $2n$ hosszúságú listát készíteni n hosszúságú 0-1 jelsorozatokból úgy, hogy szomszédos helyen álló sorozatok pontosan egy számjegyben térjenek el egymástól. Az ilyen listákat hívják Gray kódoknak, amiket például elektronikai áramköröknél és a matematikai logikában használnak széles körben. Urbán János $[U]$, Johnsonbaugh $[JoRi,'86]$ és Rosen $[RoKe,'91]$ könyveiben olvashatunk ezekről bővebben.

3.18. Definíció: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén az $(s_1, ..., s_k) \subseteq \{0,1\}^n$ jelsorozat* **k hosszúságú Gray kód**, *ha a szomszédos s_i, s_{i+1} $(i < k)$ és az s_k, s_1 sorozatok pontosan egy koordinátájukban (bit) térnek el egymástól.* □

Gray-kódokat például a logikai függvények minimalizálásához használt Karnaugh- Weitch módszernél használjunk, vagy például egy körbefordítható kapcsoló 2^n állását lehet kódolni segítségükkel: a kapcsolót szomszédos állásai között elforgatva mindössze (pontosan) egyik vezetéken levő jel változik *csak* meg.



Kapcsoló kódolása az előző ábra alapján

3.5. ábra

Nézzük a kockagráfok további néhány tulajdonságát (bővebb lista található $[W]$ -ben).

3.19. Állítás: *Tetszőleges dimenziós kockagráfban*

(a) H_n *-nek* 2^n *csúcsa van, és a címkék az összes* n *-hosszúságú 0-1 sorozatok.*

(b) H_n *-ben minden,* 2^n *-nél nem hosszabb* páros *hosszúságú kör megtalálható. (Azaz van pontosan ilyen hosszúságú Gray-kód.)*

(c) H_n *éleinek* $\mathbf{e_n}$ *számára fennáll a következő rekurzió:*

$$\mathbf{e_{n+1}} = 2\mathbf{e_n} + 2^n, \quad \mathbf{e_0} = 0 \ .$$

(d) H_n n *-reguláris gráf.*

(e) H_n *kétpólusú gráf.*

(f) H_n *-ben bármely két csúcs távolsága éppen annyi, mint ahány helyen a (standard) címkéjük eltér egymástól.*

(g) H_n *átmérője* n .

(h) H_n *derékbősége* 4 .

Bizonyítás: Általában indukcióval n -re.

(e) a páros illetve a páratlan sok 1 számjegyet tartalmazó címkéjű csúcsok alkotják a két pólust. $\square$

3.3. Feladatok

A szerző [$SzIs,'97$] feladatgyűjteményében elegendő változatos feladatot találunk az alábbiakon kívül.

3.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha a gráfban minden csúcs foka legalább k ahol $k \geq 2$ rögzített, akkor van a gráfban legalább $k+1$ hosszúságú kör!

3.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha a gráfban minden csúcs foka legalább k ahol $k \geq 2$ rögzített, és a gráfnak legfeljebb $2k$ csúcsa van, akkor a gráf összefüggő!

3.3. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú gráfban legalább $\binom{n-1}{2} + 2$ él van, akkor tartalmaz Hamilton - kört! Mutassuk meg, hogy az állítás $\binom{n-1}{2} + 1$ élű gráfokra már nem igaz!

3.4. Feladat: **a)** Mely $m, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén van Hamilton kör/út a $K_{m,n}$ teljes páros gráfokban?

b) Mutassuk meg, hogy páratlan csúcsból álló (tetszőleges) páros gráfban *nincs* Hamilton kör.

c) Mutassuk meg, hogy *páratlan* $n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén az $n \times n$ méretű sakktábla mezői nem járhatók be huszárral úgy, hogy minden mezőrre pontosan egyszer lépünk, és a végén *visszatérünk* a kiindulási mezőre.

d) Be lehet -e járni a 8×8 méretű sakktáblát a fenti módon?

3.4. Megoldás

3.4. Feladat: **d)** Igen, egy rajzot a Szerző [$SzIs,'97$] feladatgyűjteményében a 88. oldalon láthatunk.

Röviden: D4, C2, A1, B3, C1, A2, B4, D3, C5, A6, B8, D7, F6, E8, G7, H5, G3, H1, F2, E4, D6, B5, A7, C8, E7, G8, H6, F5, H4, G2, E1, F3, E5, F7, H8, G6, F8, H7, G5, E6, F4, H3, G1, E2, C3, D1, B2, A4, B6, A8, C7, D5, E3, G4, H2, F1, D2, B1, A3, C4, A5, B7, D8, C6.

vagy: D5, C7, A8, B6, A4, B2, D1, F2, H1, G3, H5, G7, E8, D6, C8, A7, B5, A3, B1, D2, F1, H2, G4, H6, G8, E7, G6, H8, F7, G5, H3, G1, E2, C1, B3, A1, C2, B4, A2, C3, E4, F6, H7, F8, D7, B8, A6, C5, B7, A5, C4, E3, F5, H4, G2, E1, F3, D4, C6, D8, E6, F4, D3, E5.

vagy

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Megjegyzés: A sakktábla mezőire azt írtuk, hogy hányadik lépésben lépünk arra a mezőre. A fenti megoldás érdekessége, hogy így egy bűvös négyzetet is kaptunk: minden sorban és oszlopban a számok összege 260.

3.5. Hivatkozások

[G] Gould,R.: *Updating the Hamiltonian Problem - A Survey,* J.of Graph Theory, 15 (1991), 121-157

[GL] Gács Péter, Lovász László: *Algoritmusok,* Tankönyvkiadó 1987

[LNN] Lipi Gábor, Nemes Áron, Novák István: *A kínai hadseregtől az utazó ügynökig (Gráfok gépközelben)*, Novotrade, 1990

[U] Urbán János: *Matematikai logika,* Gimnáziumi tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

[W] Wikipédia: *Hiperkockagráf,* https://hu.wikipedia.org/wiki/Hiperkockagráf HTTPS://HU.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/HIPERKOCKAGR%C3%A1F

4. fejezet

Gráfok mátrixai

A CSÚCS- (ADJACENCIA-) MÁTRIX ÉS VÁLTOZATAI. UTAK SZÁMA, ÖSSZEFÜGGŐSÉG ÉS KOMPONENSEK. A FOKSZÁM-MÁTRIX, A FESZÍTŐFÁK SZÁMA. AZ ÉL- (INCIDENCIA-) MÁTRIX ÉS HALMAZRENDSZEREK.

EGYÉB MÁTRIXOK ÉS ÁBRÁZOLÁSI MÓDOK, MUTATÓK (POINTEREK).

A gráfok tanulmányozásának egyik hatékony eszköze lehet egy olyan megadási (ábrázolási) mód, amellyel különféle számítások válnak lehetővé. Ilyen irányú törekvések és eredmények már jóval a számítógépek megjelenése előtt megjelentek, hiszen nem csak a számítások elvégzését könnyíti meg az adatok és a számítások rendezése, hanem (mint a jelen és a 13. fejezetben látni fogjuk) elméleti eredmények meglepő felfedezésére és igazolására is kiválóan alkalmasak. (Így már érthető, hogy már jóval a számítógépek megjelenése előtt részletesen tanulmányozták a különféle ábrázolási módokat.)

Az 1.2. Definíció és a fokszám fogalma mély számításokra nem alkalmas, de szerencsére a lineáris algebra eszközei ismét rendelkezésünkre állnak. A fejezet tartalmát is jobban érzékeltetné a *"Gráfok számítógépes ábrázolása/reprezentációja"* cím, de mivel egy kivételével (mutatók) mindegyik módszer valamilyen mátrix, ezért maradtunk a már elterjedt "mátrixok" fejezetcímnél.

Természetesen gyakoroljuk gráfok különböző mátrixainak felírását, és fordítva: adott mátrix alapján a gráf (szokásos) felrajzolását, ami nem lehet túl nehéz feladat. Azonban ne feledjük: a különböző algoritmusok, és különösképpen azok számítógépes leírása a gráfok (valamely) reprezentációját és nem rajzunkat használják. Vagyis az algoritmusok (pl. a 4.13. Algoritmus) gyakorlásakor[1] lehetőleg tartózkodjunk a gráf felrajzolásától, igyekezzünk csak a reprezentációra (pl. a gráf mátrixára) hivatkozni!

Fejezetünkben csak a csúcs- és élmátrixokkal foglalkozunk részletesen. A gráfhoz rendelhető egyéb, például kör-, vágat- és egyéb mátrixok, valamint gráfok pointerekként vagy éllistával történő megadási módjaira nincs helyünk részletesen kitérni. Az érdeklődő Olvasónak például Andrásfai Béla [$AnBé,'94$], [A] valamint Recski András [Re $An,'89$] könyveit ajánlhatjuk.

Emlékeztetünk, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $[\mathbf{A}]_{\mathbf{i,j}}$ jelöli az A mátrix i -edik sorának j -edik elemét, valamint

$$\mathbf{Sp}(\mathbf{A}) := \mathbf{Tr}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$$

a **mátrix nyoma** (**Spur**/**Trace**), a főátlóban levő elemek összege. □

4.1. Csúcsmátrixok

A csúcsmátrixokat szokás **adjacencia** - mátrixoknak is hívni, az angol *"x and y are adjacent"* (szomszédos, határos, közeli) elnevés alapján. A magyar *"szomszédsági/összekötöttségi mátrix"* elnevezés is használatos, ami még jobban kifejezi a mátrix lényegét, a gráffal való kapcsolatát.

A csúcsmátrixok többféle gráfra is definiálhatók, a könyebb érthetőség céljából alább négy különálló definícióban adjuk meg a mátrix egyes változatainak meghatározásait.

4.1. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges* egyszerű *gráf, $V = \{v_1, ..., v_n\}$ a csúcsok egy tetszőleges, rögzített felsorolása. A G gráf* **csúcs-** (**adjacencia-** *vagy* **szomszédsági-**) **mátrixa** *az $A \in \{0,1\}^{nxn}$ mátrix, ahol*

$$[A]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{ha } nem \end{cases} \qquad \square$$

4.2. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy* tetszőleges *(nem feltétlenül egyszerű) gráf, $V = \{v_1, ..., v_n\}$ a csúcsok egy tetszőleges, rögzített felsorolása. A G gráf* **csúcs-** (**adjacencia-** *vagy* **szomszédsági-**) **mátrixa**

[1] és természetesen vizsgán való bemutatásakor

az $A \in \mathbb{N}^{nxn}$ *mátrix, ahol*

$$[A]_{i,j} := \begin{cases} \;\;k & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \quad k \text{ -szoros (nem hurok) él} \\ 2k & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \quad k \text{ -szoros hurokél} \\ \;\;0 & \text{ha } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases} \qquad \square$$

A hurokélek számát a mátrixban azért kétszerezzük meg, hogy a csúcsmátrixok általános tulajdonságai a fenti típusú (nem egyszerű) gráfok mátrixaira is igazak maradjanak.

4.3. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy tetszőleges* súlyozott élű *gráf, melyben hurokélek lehetnek de többszörös élek nem,* $w : E \to \mathbb{R}_+$ *pozitív súlyfüggvénnyel, és legyen* $V = \{v_1, ..., v_n\}$ *a csúcsok egy tetszőleges, rögzített felsorolása. Ekkor a* G *gráf* **csúcs-** (**adjacencia-** *vagy* **szomszédsági-**) **mátrixa** *az* $A \in \mathbb{R}_+^{nxn}$ *mátrix, ahol*

$$[A]_{i,j} := \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{ha } \{v_i, v_j\} \in E \\ +\infty & \text{ha } \textit{nem} \end{cases} \qquad \square$$

A $+\infty$ szimbólum a számítógépeknél még nem mindenütt használható, helyette a legnagyobb ábrázolható számot vagy $-$ -t (vonalkát) alkalmazhatunk.

Bár könyvünkben irányított gráfokkal nem foglalkozunk, a teljesség kedvéért mégis megemlítjük az irányított gráfok csúcsmátrixainak definícióját is.

4.4. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy tetszőleges egyszerű* irányított *gráf és* $V = \{v_1, ..., v_n\}$ *a csúcsok egy tetszőleges, rögzített felsorolása. A* G *gráf* **csúcs-** (**adjacencia-** *vagy* **szomszédsági-**) *mátrixa az* $A \in \{-1, 0, +1\}^{nxn}$ *mátrix, ahol*

$$[A]_{i,j} := \begin{cases} +1 & \text{ha } (v_i, v_j) \in E \\ -1 & \text{ha } (v_j, v_i) \in E \\ \;\;0 & \text{ha } \textit{egyik sem} \end{cases} \qquad \square$$

4.5. Megjegyzések: **(i)** A csúcsmátrixok minden további alkalmazásánál, a könyv minden további állításánál, megjegyzésénél mindig gondoljuk meg alaposan, hogy melyik típusú gráfról ill. mátrixról van szó! Minden eredményünket igyekszünk a legáltalánosabb formában bemutatni, természetesen más típusú gráfokra más összefüggések igazak.

(ii) A csúcsmátrixok felírásánál, mint látjuk, fontos a gráf csúcsainak $V = \{v_1, ..., v_n\}$ sorrendje, bár a csúcsok felcserélése/permutációja esetén csak az eredeti csúcsmátrix megfelelő oszlopait és sorait kell *felcserélnünk / permutálnunk*. Vegyük észre azonban, hogy a csúcsok sorrendje a mátrix oszlopainál (fejlécben) és sorainál (oldallécben) *mindig ugyanaz* kell hogy legyen! Vagyis az előbb (és az alábbiakban) említett sor-oszlop cseréknél a sorokat és az oszlopokat *ugyanúgy* kell permutálnunk!

(iii) Nyilván akkor célszerű a gráfot csúcsmátrix alakban felírnunk, ha sok éle van, különben a mátrixnak sok eleme lesz 0 , ami feleslegesen foglalja a memóriát, nem is szólva a 4.6.(i) Állításban említett szimmetriáról. Ettől függetlenül mégis csúcsmátrixot fogunk használni, ha az éppen vizsgált algoritmus ezt kívánja meg (ld.pl. az alábbi 4.13. Algoritmust, vagy az 5., 7. és 13. Fejezeteket).

Kezdjük a csúcsmátrixok egyszerű tulajdonságainak vizsgálatával. Mint említettük, mindig gondoljuk meg (HF), hogy az állítások milyen típusú mátrixokra / gráfokra teljesülnek.

4.6. Állítás: (i) *A G gráf komplementerének csúcsmátrixa (a 4.1.esetben)*

$$A_{\overline{G}} = \mathbb{I} - A_G$$

ahol $\mathbb{I}$ *a csupa* 1 *elemből álló* $n \times n$ *-es mátrix.*

(ii) *Az A csúcsmátrix szimmetrikus a főátlóra, azaz* $A^T = A$ *(4.4. kivételével mindegyik esetben), irányított gráfokra (4.4. esetben) alternáló, azaz* $A^T = -A$ *(*A^T *az A mátrix transzponáltja).*

(iii) $\frac{1}{2}Sp(A) =$ *a hurokélek száma (4.3. kivételével mindegyik esetben)*

(iv) *Az A csúcsmátrix tetszőleges sorában/oszlopában levő elemek összege (sor/oszlop-összeg) a megfelelő csúcs fokszámával egyenlő (4.1. és 4.2. esetben), azaz*

$$\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j} = \delta(v_i) \quad (i \le n)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j} = \delta(v_j) \quad (j \le n)$$

(v) *Az A csúcsmátrix összes elemének összege az élek kétszeresével egyenlő (a 4.3. és 4.4. változatok kivételével), azaz*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j} = 2 \cdot |E|$$

Bizonyítás: Egyszerű HF a definíciók alapján. $\square$

4.7. Állítás: *a* 4.1. *és* 4.2. *esetekben*

(i) *G akkor és csak akkor* kétpólusú *ha csúcsmátrixa sorok és oszlopok cserélgetésével*

0_1	X
X^T	0_2

alakúra hozható, ahol 0_1 *és* 0_2 *(valamekkora) csupa* 0 *elemet tartalmazó négyzetes mátrixok (a két pólusnak megfelelően) és X megfelelő méretű tetszőleges mátrix (a közöttük levő élek).*

(ii) *G akkor és csak akkor* nem összefüggő *ha csúcsmátrixa sorok és oszlopok cserélgetésével*

X_1			
	X_2		
		...	
			X_k

alakúra hozható, ahol $X_1, ..., X_k$ *tetszőleges négyzetes mátrixok (a komponensek) és a mátrix többi eleme* 0 .

(iii) *Két gráf akkor és csak izomorf ha csúcsmátrixaik sor-oszlop cserékkel*[2] *azonossá tehetők*

Bizonyítás: a definíció alapján könnyen beláthatóak. $\square$

Az Olvasónak javasoljuk az (i) állítást többpólusú gráfokra is megfogalmazni.

Ezek sajnos csak $\mathcal{O}(n!) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) > \mathcal{O}(2^n)$ lassúságú (csiga) algoritmusok (ld. az *A* Függelék táblázatát), hiszen a mátrix n sora (és oszlopa) cserélgetésének mikéntjéhez nincs semmi támpontunk, így mind az $n!$ lehetőséget ki kell próbálnunk. Az alábbi Tétel alapján egy kicsit gyorsabb algoritmust kapunk a gráfok összefüggőségének eldöntésére a 4.12. Állításban, de a Fejezet végén (tintacsöppentős algoritmus) vagy a következő Fejezetben (Dijkstra algoritmusa) még gyorsabb algoritmusokat találunk erre a problémára.

---

2) természetesen a 4.5.(ii) Megjegyzésben leírtak figyelembe vételével

4.8. Tétel: *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ természetes számra (a 4.1. és 4.2. esetben)*

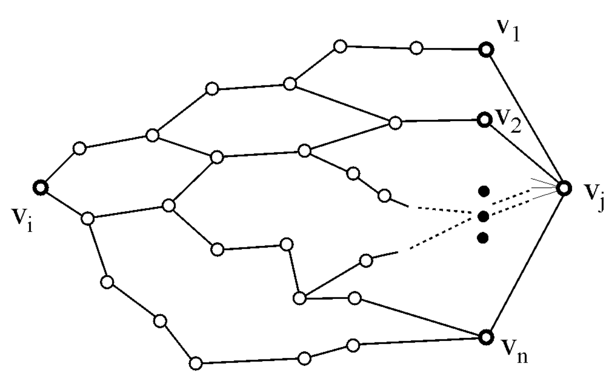
$$\left[A^k\right]_{i,j} = \text{a } v_i \text{ és } v_j \text{ csúcsok között húzódó, pontosan } k \text{ hosszúságú utak száma.} \tag{4.1}$$

Bizonyítás: Indukcióval $k \in \mathbb{N}$ -re. A $k = 1$ eset a definíció alapján egyszerű: $i \neq j$ esetben $[A]_{i,j}$ éppen az élek, azaz 1 hosszúságú utak száma, $i = j$ esetben pedig $[A]_{i,i}$ a v_i csúcsra illeszkedő hurokélek számának *kétszerese*, de v_i -ből v_i -be minden hurokélen kétféle irányban mehetünk, vagyis a lehetőségek száma valóban $[A]_{i,i}$ -vel egyenlő.

Az indukciós lépés $k + 1$ -re: Induljunk ki az

$$\left[A^{k+1}\right]_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} \left[A^k\right]_{i,t} \cdot [A]_{t,j}$$

összefüggésből. Gondoljuk csak meg: ha v_i -ből akarunk eljutni v_j -be egy (pontosan) $k+1$ -hosszú úton, akkor (természetesen) előbb k lépést megtéve eljutunk valamelyik (akármelyik) v_t csúcsig, az utolsó előtti állomásig, majd ezután egy lépésben célhoz érünk. A kombinatorikában megismert szorzási tulajdonság (ld. I.rész 2.fejezet 2.2.b) összefüggése) alapján pedig az út első és második részén a lehetőségeket össze kell szoroznunk, ha a v_t csúcs rögzített. A 2.2.a) összefüggés (összeadási tulajdonság) alapján pedig a v_t csúcs összes választása esetén kapott lehetőségeket össze kell adnunk. A gondolatmenetet az alábbi ábra segíti megérteni.



Utak v_i és v_j között
4.1. ábra

□

4.9. Megjegyzések: Mint a $k=1$ eset vizsgálatánál is láttuk, a (4.1) képletnél a hurokéleket és a köröket elővigyázatosan kell számításba vennünk, sőt a "*pontosan k hosszúságú*" kifejezést is meg kell gondolnunk. A (v_i -ből v_j -be vezető) utak nem feltétlenül egyszerűek, ráadásul az útban szereplő hurokéleket és köröket mindkét irányba bejárhatjuk vagyis az I.2.2.b) szorzási tulajdonság alapján a lehetőségek számát $2-2$ -vel szoroznunk kell. Továbbá, ha a fenti körök nem egyszerűek, akkor a 2 -vel szorzás helyett a kört egyszerű (elemi) részköreire kell bontanunk, és így kell a lehetőségek számát megfelelő számmal (mennyivel is? = HF) szoroznunk. A többszörös éleket is hasonlóan kell számításba vennünk. Pontosabban: a (4.1) képlet számolja az utakat a most leírt módon.

Összefoglalva: az utak (körök) hossza nyilvánvalóan az (esetleg többszörösen) felhasznált élek száma (multiplicitással), és két utat pontosan akkor tekintünk különbözőnek, ha van különböző élük vagy (legalább) az egyik élen különböző irányban megyünk végig a két út surán.

A fenti Tétel megfelelője irányított gráfokra is megfogalmazható, mi most erre nem térünk ki.

A 4.8.Tétel jelentőségét (mind elméletileg, mind gyakorlatilag) az adja, hogy rengeteg és sokféle következménye, alkalmazása ismert. Mi csak találomra sorolunk fel néhányat, az Olvasó még találhat további összefüggéseket, általánosításokat.

4.10. Következmények: *(a 4.1. és 4.2. esetben)*

(i) *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ természetes számra $\left[A^k\right]_{i,i}$ megadja a v_i csúcsból induló,* pontosan k hosszúságú *körök számát*[3]*.*

(ii) *Egyszerű gráf (azaz 4.1.) esetén $[A^2]_{i,i}$ éppen a v_i csúcs fokszáma, azaz*

$$\left[A^2\right]_{i,i} = \delta(v_i)$$

(iii) *Egyszerű gráf (azaz 4.1.) esetén $Sp(A^3)$ éppen a G gráfban levő háromszögek (C_3 részgráfok) számának* hatszorosát *adja.*

Bizonyítás: (i) A 4.8. Tétel speciális esete.

(ii) Az előző pont szerint $[A^2]_{i,i}$ éppen a kettő hosszúságú, v_i -ből induló körök száma. Ha többszörös élek nincsenek, akkor v_i -be csak ugyanazon

[3] természetesen az előző Megjegyzés szerint számolva

az élen juthatunk vissza mint amelyen tőle eltávolodtunk, vagyis minden élt pontosan egyszer számoltunk.

(iii) Az előző ponthoz hasonlóan $[A^3]_{i,i}$ éppen a három hosszúságú, v_i -ből induló körök számának kétszerese, hiszen egy kört két irányban is bejárhatunk. $Sp(A^3) = \sum_{i=1}^{n} [A^3]_{i,i}$ miatt ezeket a köröket mindhárom csúcsuknál megszámoljuk, így jön ki a hatszoros szorzótényező. □

Az alábbi következmények nem csak elméleti jelentőségűek, jól használható algoritmust is adnak gráfok köreinek vizsgálatához, melyekre a 6. (Fák) és 11. (Páros gráfok) Fejezetekben lesz majd szükségünk.

4.11. Következmény: *(4.1 és 4.2. esetben) G -ben pontosan akkor* nincs *páratlan/páros hosszúságú kör, ha minden* $k \in \mathbb{N}$ *páratlan/páros számra* $Sp(A^k) = 0$, vagy másképpen

$$Sp\left(\sum_{t=0}^{n/2} A^{2t+1}\right) = 0$$

illetve

$$Sp\left(\sum_{t=1}^{n/2} A^{2t}\right) = 0 \quad .$$

Bizonyítás: A 4.8. Tétel egyenes következménye.

Csak annyit jegyzünk meg, hogy n csúcs esetén elegendő a legfeljebb n hosszúságú utakat tekinteni. □

Most a gráfok összefüggőségére adunk egy újabb algoritmust, mely egy nagyságrenddel jobb a 4.7.(ii) Állításon alapuló algoritmusnál.

4.12. Tétel (4.1 és 4.2. esetben): *G akkor és csak akkor összefüggő,ha az*

$$Y := A + A^2 + ... + A^{n-1}$$

mátrixnak nincs *egyetlen* 0 *eleme sem, ahol n a gráf csúcsainak száma.*

Bizonyítás: $[Y]_{i,j}$ a v_i és v_j csúcsok közötti *legfeljebb* n hosszú utak száma. Mivel a gráf összefüggőségéhez elegendő legfeljebb $n-1$ hosszú[4] utakat keresni, ezért az állítás igaz. □

4) pontosabban csak $d(G)$ azaz G átmérője hosszú utakat kell keresni.

Az Olvasó könnyen meghatározhatja a fenti két állításon alapuló algoritmusok $\mathcal{O}(...)$ futásidejét (ajánlott HF!). Az most következő egyszerű algoritmus is kényelmesen kezelhető a csúcsmátrix segítségével, szintén a gráf összefüggőségének eldöntésére és komponenseinek megkeresésére alkalmazható. Futásideje szintén HF.

4.13. Algoritmus ("Tintacsöppentős módszer"): *gráf komponenseinek megkeresésére.*

Szemléletesen: a gráf egyik (bármelyik) v_0 csúcsába kék tintát csöppentve az először v_0 szomszédait festi kékre, az éleken szétfolyva, majd tovább folyva a szomszédok szomszédait, és így tovább. Mivel a gráf véges, előbb-utóbb a kék tinta terjedése megáll. Ha a gráf összes csúcsa kék, akkor a gráf összefüggő. Ha nem minden csúcs kék, akkor a kék csúcsok alkotják a gráf egyik, a v_0 csúcsot tartalmazó komponensét.

Ekkor választunk egy tetszőleges, nem kék v_1 csúcsot, amelybe piros tintát csöppentve (és szétfolyatva) megkapjuk a v_1 -et tartalmazó piros komponenst. Majd a sárga, zöld ... , $i \leq k$ komponenst.

Az algoritmust, pontosabban a tinták terjedését csúcsmátrix segítségével könnyen nyomon tudjuk követni (és programozni). Nyilvánvalóan elegendő csak a 4.1. esetre szorítkoznunk, hiszen összefüggőség és komponensek szempontjából a többszörös-, hurok- és súlyozott élek lényegtelenek.

A csúcsmátrixot kiegészítjük egy újabb oszloppal, amibe a tinták színeit írjuk, kezdetben mindegyik csúcs fehér (vagyis 0 színű). Pontosabban, mondjuk a hupilila (vagyis az i -edik szín) esetén h.lila O jelet (vagyis $-i < 0$ számot) teszünk azon pont(ok)ba, ahová már befolyt a tinta de még nem folyt tovább (vagyis szomszédait még nem vizsgáltuk) és h.lila X jelet (vagyis $i > 0$ számot) teszünk, ha már onnan továbbfolyt (vagyis szomszédait már megjelöltük O -val). Kezdjük v_j -vel, ide O jel kerül. Szomszédait (a j -edik oszlop alapján) megjelöljük O -val míg v_j -t magát X -el. Egyik (pl.legelső) O jelű w csúcs szomszédait a w -nek megfelelő oszlop alapján megjelöljük O -val míg w -t magát X -el. Ezt egészen addig ismételjük míg már nincs tovább O jelű csúcs. Ha van még fehér csúcs, akkor elővesszük a következő ($i + 1$ -edik) színt, egyébként STOP. $\square$

Az alábbi példában, akárcsak a ZH -ban, az új oszlopot minden lépés után újra leírjuk, a változatlan cellákat is ismételten azért, hogy a számításokat nyomon lehessen követni. A kiválasztott O jelet megvastagítottuk (ahonnan a tinta továbbfolyását éppen vizsgáljuk). Dupla vonallal választottuk el a két komponens keresését, a második részben már nem másoltuk le az első komponens jeleit. A mátrix ki nem töltött elemei 0 -ák.

4.14. Példa.

	A	B	C	D	E	F	G	H		k	$é$	k		p	i	r	o	s
A						2			**o**	x	x	x	x					
B					1							o	x					
C							1							o	x	x	x	x
D							1	1								**o**	x	x
E		1				1					**o**	x	x					
F	2				1					**o**	x	x	x					
G			1	1											o	x	x	x
H				1													**o**	x

A gráf komponensei tehát $\{A, B, E, F\}$ és $\{C, D, G, H\}$. □

Felhívjuk a figyelmet arra,hogy a komponenseket a gráf felrajzolása *nélkül* kerestük meg.

A következő, 5. Fejezetben bemutatott útkereső algoritmusok szintén alkalmasak a gráf komponenseinek megkeresésére.

Végezetül hadd álljon itt még egy tétel, a mátrixok sokoldalú felhasználhatóságának illusztrálására.

4.15. Definíció: *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf* **fokszám** (**degree**) **mátrixa** $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ahol*

$$[D]_{i,j} := \begin{cases} \delta(v_i) & ha \;\; i = j \\ 0 & ha \;\; i \neq j \end{cases}$$

□

4.16. Definíció: *Egy tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix* **előjeles aldeterminánsa** (**cofactor**) *alatt a*

$$(-1)^{i+j} \cdot \det(M_{i,j})$$

valós számot értjük, ahol

$$\mathbf{M_{i,j}} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

az M mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával nyert mátrixot jelöli, tetszőleges $i, j \leq n$ indexek esetén. □

4.17. Tétel (Fa-Mátrix Tétel)**:** *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges, összefüggő, számozott csúcsú gráf, D és A a fokszám- és adjacencia- mátrixa. Ekkor a (számozott csúcsú) feszítőfák száma éppen az*

$$M := D - A$$

mátrix bármelyik aldeterminánsával egyenlő. □

4.2. Élmátrixok

Az *él-*, *illeszkedési-* vagy *incidencia-* (*incidence*[5]) mátrixok a csúcsok és élek közötti (tartalmazási) kapcsolaton alapul. A gráf bonyolultságának megfelelően most is a mátrix több változatát definiálhatjuk.

4.18. Definíció[6]**:** *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf, csúcsainak és éleinek egy adott felsorolása legyen $V = (v_1, ..., v_n)$ és $E = (e_1, ..., e_m)$. Ekkor a gráf* **él-, illeszkedési**- *vagy* **incidencia-** (**incidence**) **mátrix***a $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ahol $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ esetén*

a) *ha G egyszerű, akkor legyen*

$$[B]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha } \ v_i \in e_j \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

b) *ha G -ben többszörös- és hurokélek is lehetnek, akkor legyen*

$$[B]_{i,j} := \begin{cases} k & \textit{ha } \ v_i \in e_j \ \ k \textit{ -szoros él nem hurok} \\ 2k & \textit{ha } \ v_i \in e_j \ \ k \textit{ -szoros hurokél} \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

c) *ha G irányított, akkor legyen*

$$[B]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha } e_j \textit{nem hurokél és } \text{kezdő}\textit{pontja } v_i \\ -1 & \textit{ha } e_j \textit{nem hurokél és } \text{vég}\textit{pontja } v_i \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

d) *ha $G = (V, E)$ (egyszerű) hipergráf, akkor legyen*

$$[B]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \textit{ha } \ v_i \in e_j \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

---

[5] "x is incident on e" = "x illeszkedik e -re" (angol), ami *nem* tévesztendő össze az "incident" = incidens = "esetleges, eset, véletlen" kifejezéssel

[6] az élmátrixot 1959-ben míg a hipergráfokat 1930 -ban vizsgálták először behatóan.

A b) *és* c) *változatok esetén a B mátrixot valós számokból állónak, míg az* a) *és* d) *változatok esetén* mod 2 (*azaz a* GF(2) *test*[7] *felett*) tekintjük. □

Gráfok súlyozott élei és még számos változat szintén kódolható a fentiekhez hasonló formában, amikre mi szintén nem térünk ki. A b) változat helyett az e élnek megfelelő oszlop többszöri felsorolását is választhatjuk, ha a mátrix 0 és 1 elemeit a memória bitjeiben tároljuk, matematikai szempontból azonban a fenti Definícióban felírt változat az egyszerűbb.

A d) változat alapján hipergráfok, azaz halmazrendszerek tulajdonságait vizsgálhatjuk mátrixok segítségével. Meglepő módon azonban mátrixok tulajdonságait is vizsgálhatjuk *gráfelméleti* módszerek és eredmények segítségével. Ezt kiválóan szemléltei Hujter Mihály [H] cikke.

Élmátrixok használata nyilvánvalóan akkor célszerű, ha kevés él van vagy a pontok fokszáma nagy.

Most pedig lássuk a mátrix tulajdonságait, használatát a gráf vizsgálatában. Az Olvasó pedig mindegyik Állítás, Tételnél ellenőrizze, hogy a kimondott összefüggés a fenti a)-d) változatok közül melyikre lehet igaz (HF)!

4.19. Megjegyzés: A mátrix oszlopainak cserélgetése esetén a sorokat nem feltétlenül kell cserélgetni, főleg nem "azonos" sorrendben (pl. $m \neq n$), és hasonlóan fordítva.

4.20. Állítás: *Két tetszőleges gráf pontosan akkor izomorf, ha élmátrixaik sorok és oszlopok cserélgetésével azonossá tehetők.* □

4.21. Állítás: *Egy tetszőleges gráfban*

(i) *egy csúcs pontosan akkor izolált, ha a gráf élmátrixában a csúcsnak megfelelő sorában az összes elem* 0 *,*

(ii) *bármely csúcs fokszáma éppen a gráf élmátrixában a csúcsnak megfelelő sorban levő elemek összege,*

(iii) *egy él pontosan akkor hurokél/hiperél ha a gráf élmátrixában az élnek megfelelő oszlopban pontosan egy/több mint kettő nemnulla elem van.* □

4.22. Állítás: *Egy tetszőleges G gráf pontosan akkor* páros *ha élmátrixának sorai átrendezhetők úgy, hogy valamely $i_0 < n$ indexre teljesül, hogy minden oszlopban az i_0 sor alatt és felett pontosan egy nemnulla elem szerepel.* ("*húzható egy elválasztó vonal vízszintesen*"). □

---

[7] **2 -rendű Galois Test (Field)**, azaz a *mod(2)*={0,1} alaphalmazon a szokásos négy alapművelet az *1+1=0* kikötéssel; *Évariste Galois* (1811-1832) francia matematikus, a modern algebra megteremtője tiszteletére.

4.23. Állítás: *Egy tetszőleges G gráf pontosan akkor* nem összefüggő *ha élmátrixa blokkosítható, azaz sorok és oszlopok átrendezésével*

$$B = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{X} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Y} \\ \hline \end{array}$$

alakra hozható ahol X *és* Y *tetszőleges míg* 0 *megfelelő méretű csupa nulla mátrixok.* □

A fenti Állításnál többet mondhatunk, ha az élmátrixot (pontosabban annak a) és c) változatait) lineáris algebrai szempontból tekintjük.

B sorvektorait (mindkét vektortérben) összeadva nullvektort kapunk, ezért B sorai lineárisan összefüggők. Ha a gráf összefüggő, akkor n -nél kevesebb sorvektor mindig lineárisan független, mert valamelyik koordinátából csak e vektorok egyikében van 0 -tól különböző: annak az élnek megfelelően, amelyik egyik végpontjának a megfelelője a kiszemelt sorok között szerepel, a másik pedig nem.

Ebből következik az alábbi Tétel:

4.24. Tétel: *Ha B az n csúcsot tartalmazó összefüggő G* illetve $\vec{G}$ *(irányított) gráf élmátrixa, akkor B rangja (az* a) *változat esetén* mod 2 *tekintve):*

$$r(B) = n - 1 \quad . \quad \square$$

Nem összefüggő gráfra komponensenként adódik egy-egy $(b-1)$ -elemű négyzetes (kvadratikus) nemszinguláris minor az élmátrixban. A determinánsok tanult (Laplace-) kifejtését és a Szorzástételt alkalmazva kapjuk a következő Tételt:

4.25. Tétel: *Ha B az n csúcsot tartalmazó és k komponensből álló G* illetve $\vec{G}$ *(irányított) gráf élmátrixa, akkor B rangja (az* a) *változat esetén* mod 2 *tekintve):*

$$r(B) = n - k \quad . \qquad \square$$

4.26. Definíció: *Ha a B élmátrixból komponensenként egy-egy pontnak megfelelő sort elhagyunk, a kapott B_0 mátrixot* **redukált él-** *vagy* **incidencia-mátrix***nak hívjuk.* □

4.27. Tétel: *A 4.25. Tétel feltételei esetén*

(i)

$$r(B_0) = n - k \quad ,$$

(ii) *továbbá B_0 olyan oszlopai lineárisan összefüggőek, amelyeknek megfelelő élek a G gráf egy körének éleit alkotják* (*az* a) *változat esetén* mod 2 *tekintve*). $\square$

4.28. Tétel: *Az n csúcsot tartalmazó és k komponensből álló G* illetve *$\vec{G}$ (irányított) gráf redukált élmátrixának $(n-k)$ -adrendű kvadratikus minora akkor és csak akkor nem szinguláris ha az oszlopainak megfelelő élek a gráf egy feszítő erdejének éleit adják.* $\square$

4.29. Tétel: *Ha M a $\vec{G}$ gráf élmátrixának négyzetes nem szinguláris minora, akkor* $|\det(M)| = 1$. $\square$

4.3. Egyéb mátrixok és ábrázolási módok

Most csak röviden felsorolunk néhány további mátrix típust, ezen mátrixok tulajdonságairól és felhasználásukról Andrásfai Béla $[AnBé, '94]$ és $[A]$ könyveiben olvashatunk részletesebben.

4.30. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy* tetszőleges *gráf, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ az élek és $C = \{c_1, ..., c_q\}$ a gráf köreinek egy (tetszőleges) rögzített felsorolása. Ekkor a gráf* **körmátrixa** (**circle matrix**) $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{q\times m}$ *ahol*

$$[K]_{i,j} := \begin{cases} 1 & ha\ e_i eleme\ a\ c_j\ körnek \\ 0 & ha\ nem\ eleme \end{cases}$$

$\square$

4.31. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy* tetszőleges *gráf, $E = \{e_1, ..., e_m\}$ az élek és $W = \{v_1, ..., v_q\}$ a gráf vágatainak*[8] *egy (tetszőleges) rögzített felsorolása. Ekkor a gráf* **vágatmátrixa** (**cut matrix**) $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{q\times m}$ *ahol*

$$[W]_{i,j} := \begin{cases} 1 & ha\ e_i eleme\ a\ v_j\ vágatnak \\ 0 & ha\ nem\ eleme \end{cases}$$

$\square$

[8] Gráfok vágataival a 14. "Hálózati folyamok" c. Fejezetben ismerkedhetünk meg részletesebben.

4.4. Feladatok

4.1. Feladat: Rajzoljuk fel az alábbi csúcsmátrixszal megadott *Petersen* - gráfot (az üres helyeken 0 áll):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		1			1	1				
B	1		1				1			
C		1		1				1		
D			1		1				1	
E	1			1						1
F	1							1	1	
G		1							1	1
H			1			1				1
I				1		1	1			
J					1		1	1		

4.2. Feladat: Írjuk fel a H_n (n -dimenziós kockagráfok) csúcsmátrixát.

4.5. Hivatkozások

[A] Andrásfai Béla: *Graph Theory: Flows, Matrices,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991

[H] Hujter Mihály: *Combinatorial Ranks of Matrices,* Publ. Univ. Debrecen, Ser.D., 40 (1999), 35-46.

5. fejezet

Útkereső algoritmusok

Útkeresési problémákról általában. Legrövidebb utak keresése, Dijkstra algoritmusa, egy példa.

Gráfok alkalmazásainak nagy részét teszik ki adott csúcsai között legrövidebb, legolcsóbb, vagy esetleg más jellegű utak keresése (elektromos vagy energia hálózatoknál, térképeknél, játékok stratégiájánál stb.).

Hely hiányában most csak a legrövidebb utak problémáját vizsgáljuk pozitív súlyfüggvény esetén, az általános téma változatai és részletei iránt érdeklődő Olvasó bőséges szakirodalmat találhat könyvtárakban.

Emlékeztetjük az Olvasót, hogy egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvénnyel ellátott $G = (E, V)$ gráf $P = \{x_0, ..., x_n\}$ útjának hossza ugyan az éleinek száma, n, míg *költsége* vagy *súlya* $w(P) := \sum_{i=0}^{n-1} w(x_i, x_{i+1})$. A P út az $a, z \in V$ *csúcsokat köti össze* vagy *közöttük húzódik*, ha $x_0 = a$ és $x_n = b$. A P út *minimáli* s az $a, z \in V$ csúcsok között, ha $w(P)$ -nél kisebb súlyú út nincs a és z között. Használatos még a *legrövidebb* út elnevezés is.

Az alábbiakban egy egyszerű de mégis elég gyors algoritmust mutatunk be legrövidebb utak keresésére, ízelítőül. Amennyiben súlyozatlan élű gráfban keresnénk legkevesebb *él*ből álló utat adott $a, z \in V$ csúcsok között, az alábbi algorimus most is használható, ha minden élnek ugyanazt az 1 súlyt adjuk: $w : E \to \mathbb{R}_+$ és $w(e) := 1$ minden $e \in E$ él esetén. Ebből következik, hogy az algoritmus gráfok *összefüggőségének* eldöntésére, komponenseinek megkeresésére is használható. (HF.)

5.1. Dijkstra algoritmusa

Legyen tehát $G = (V, E)$ egy tetszőleges súlyozott élű gráf a $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvénnyel, és adott csúcsok között keresünk "legrövidebb" (legolcsóbb) utakat. Természetesen két csúcs között több legrövidebb (ugyanolyan hosszú) út is lehetséges, az algoritmus ezek közül *egyiket* fogja megtalálni. Pontosabban, az algoritmus apró módosításávl az *összes* legrövidebb utat is megtalálhatjuk, mint ezt az 5.4.(ii) Megjegyzésben megmutatjuk. A mondottakkal nem áll ellentétben, hogy az egyszerűbb fogalmazás érdekében alább mindig "a" legrövidebb utat említjük.

5.1. Algoritmus (Dijkstra[1], 1959) Az algoritmus csak *egyetlen* $a \in V$ csúcs megadását kéri, és az a csúcsból *minden* más $x \in V$ csúcshoz megkeresi a "legrövidebb" (legolcsóbb) utat, illetve kijelzi ha *nincs* út a és x között.

Az algoritmus számításai során minden $x \in V$ csúcs esetén, ha talál egy (akármilyen) utat a -ból x -be, feljegyzi ezen ideiglenes út hosszát (length) és leírását, melyet mi az $\ell(x)$ valós számmal és az $S(x)$ (csúcs)*sorozat*tal (string) jelölünk. Időnként egy-egy utat elfogadunk minimálisnak, azt állítván hogy azon x csúcsba az (eddig) megtalált útnál rövidebb nincs biztosan a gráfban, vagyis az (eddig ideiglenes) utat "véglegesítjük". Ennek érdekében bevezetjük a $T(x) \in \{i, h\}$ logikai változót: $T(x) = "i"$ jelentse azt, hogy a kérdéses út "temporary" azaz ideiglenes míg $T(x) = "h"$ azt hogy az út végleges.

A fenti adatokat érdemes az adjacencia- (csúcs-) mátrixhoz csatolt három új oszlopba írnunk. A számítógép futásakor e három oszlop tartalmát nyilván felülírja, de az alábbi példában és dolgozatokban a számítások követhetősége érdekében ajánljuk, hogy az új oszlopokat minden alkalommal újra teljes *egészében* írjuk le sorban egymás után.

Kezdetben "természetesen" $\ell(x) := +\infty$, $S(x) :=$ "" (üres sorozat) és $T(x) := i$ minden $x \in V$ csúcsra.

Kezdőlépés: legyen $\ell(a) := 0$, $S(a) := "a"$ és $T(a) := i$ (lényeges!) .

Ciklus: legyen $y \in V$ egy olyan, még terminális csúcs amelyre $\ell(y)$ minimális és "természetesen" $\ell(y) \neq +\infty$. Az y -ba vezető utat véglegesnek (minimálisnak) ismerjük el, vagyis $T(y)$ értékét h -ra állítjuk, $S(y)$ és $\ell(y)$ értékét változatlanul hagyjuk.

---

[1] Edsger Wybe Dijkstra (1930-ban született) holland matematikus, jelenleg az University of Texas munkatársa

Ekkor a többi, még terminális $x \in V$ csúcs adatait attól függően módosítjuk, hogy y -on *keresztül* kapunk-e rövidebb utat x -be mint az eddigi, $S(x)$ -ben leírt, $\ell(x)$ hosszúságú út. Vagyis, **ha** $\ell(y)+w(x,y) \lneqq \ell(x)$ akkor legyen $S(x) := S(y)\hat{}"x"$ és $\ell(x) := \ell(y) + w(x,y)$, ahol $\hat{}$a *konkatenáció* azaz a sorozatok összefűzésének műveletét jelenti. **Ha** $\ell(y) + w(x,y) \geq \ell(x)$ akkor $S(x)$ és $\ell(x)$ maradjon változatlanul.

Mindkét esetben $T(x) = i$ maradjon.

Minden egyéb, azaz terminális csúcs adatait változatlanul hagyjuk.

Megállás: az algoritmus megáll ha már nincsen olyan terminális y csúcs amelynek $\ell(y)$ értéke véges (azaz $\ell(y) < +\infty$) lenne.

Ekkor minden véglegesített csúcs (amelyre $T(x) = h$) elérhető az a csúcsból $\ell(x)$ hosszú úton, az út leírása $S(x)$ -ben megtalálható, és ez az út minimális a -ból x -be vezető út. Azon csúcsokra pedig, melyekre $T(x) = i$, $\ell(x) = +\infty$, ami azt jelenti, hogy az x csúcs úttal nem érhető el a -ból, másik komponensében van a G gráfnak mint az a csúcs, vagyis (többek között) a G gráf nem összefüggő. $\square$

5.2. Megjegyzések: Természetesen ellenőrizni (azaz bebizonyítani) kellene, hogy a fenti algoritmus jó eredményt ad, vagyis minden súlyozott élű gráf esetében valóban a legrövidebb utat adja tetszőleges $a, x \in V$ csúcsok esetén. Ezt a bizonyítást most nem ismertetjük (hasonló a 7."Feszítőfák" Fejezetben a Kruskál algoritmus helyességére adott bizonyításhoz), az Olvasó ezt minden gráfelméleti algoritmusokkal foglalkozó könyvben megtalálja.

Az algoritmus most ismertetett változata $\mathcal{O}(n^2)$ ideig fut rögzített $a \in V$ esetén (n a csúcsok száma), hiszen minden ciklusban egy-egy csúcsot véglegesítünk, amikor is annak "ideiglenes" szomszédjait kell végignéznünk. A $\mathcal{O}(n^2)$ idő nem csökkenthető ha a -ból csak *egy* kívánt $z \in V$ csúcsba keresnénk legrövidebb utat, hiszen az összes (bizonyos) utat meg kell vizsgálnunk a és z között, ami során (majdnem) az összes többi csúcsot érintünk, és az alábbi (önmagában is érdekes) 5.3.Állítás szerint ekkor már a többi csúcsba is megtaláltuk a legrövidebb utat.

5.3. Állítás: *Tetszőleges súlyozott élű gráf esetén, ha P egy legrövidebb út a -ból z -be, akkor a P út bármelyik n csúcsa esetén a P út a -tól n -ig eső része is* legrövidebb *út a és n között.*

Bizonyítás: Meggondolható (HF). $\square$

Ha pedig minden csúcsból mindegyik csúcsba keresnénk legrövidebb utat, akkor az ismertetett algoritmust lefuttatjuk minden lehetséges $a \in V$ csúcsra, ami összesen $\mathcal{O}(n^3)$ lépést igényel. Gondoljuk meg (HF), hogy ennél lényegesen kevesebb idő alatt a fenti algoritmus (alaposabb átdolgozás nélkül) nem találhatja meg *tetszőleges* két csúcs között a legrövidebb utat, hiszen ha csak $a_1, ..., a_k$ -ból ismerjük x -be vagy akárhova az utat, akkor egy újabb b -ből vezető (legrövidebb) utat az előző utakból nem feltétlenül találhatjuk meg, bonyolult (vagy trükkös) gráf (úthálózat) esetén!

Nem meglepő, hogy az ismertetett egyszerű algoritmusnál gyorsabbak de bonyolultabbak is vannak, sőt még ennek az algoritmusnak is többféle változata és implementálása van (mint pl. Dial módszere, d-kupac, Fibonacci-kupac, Radix kupac segítségével, stb.). Sajnos ezek ismertetésére most ismét nem térhetünk ki, a témakör áttekintéséhez például Biacsi Dávid $[B]$ szakdolgozatátát ajánlhatjuk.

Azonban érdemes az algoritmus kapcsán legalább két egyszerű trükkel megismerkednünk, amit talán máshol is alkalmazhatunk.

5.4. Változatok: (i) Az $x \in V$ csúcsokra a legrövidebb utat leíró teljes $S(x)$ sorozat helyett elegendő az útnak az x előtti közvetlen legutolsó csúcsát, $P(x)$ -et[2] tárolni. (Ez különösen nagyméretű és ugyanakkor nagy átmérőjű gráfoknál jelent lényeges memória- megtakarítást.) Ekkor ugyanis a teljes $S(x)$ utat (amire csak az algoritmus legvégén van szükségünk) a következőképpen adhatjuk meg: az út *visszafelé* olvasva: $x_\ell := x$, $x_{\ell-1} = P(x)$, $x_{\ell-2} = P(x_{\ell-1})$, ... , $x_{i-1} = P(x_i)$, ... , $x_0 = P(x_1) = a$.

(ii) Nem csak az egyik legrövidebb, hanem az *összes* legrövidebb vagy a második, harmadik ... stb. t -edik legrövidebb út is megkereshető, ha az 5.1. Algoritmusban minden $x \in V$ csúcshoz $\ell(x)$ és $S(x)$ (legrövidebb út) helyett $\ell_1(x), ..., \ell_t(x)$ és $S_1(x), ..., S_t(x)$ -ben a t legrövidebb utat tartjuk mindig emlékezetben. $\square$

5.5. Példa: Keressünk legrövidebb utat A és Z között az alábbi csúcsmátrixszal meghatározott gráfban (a táblázat ki nem töltött elemei 0 -ák).

[2] **p**redecessor = megelőző (angol)

	A	B	C	D	E	F	G	Z
A		2			8			
B	2		2	6	4	2		
C		2		5		3		2
D		6	5		2		2	5
E	8	4		2		3		
F		2	3		3		2	
G				2		2		4
Z			2	5			4	

Megoldás: A csúcsmátrixnak megfelelően három új oszlopba írjuk ℓ, T és P értékeit, minden ciklust külön leírunk. T üresen hagyott mezői az i értékeket jelölik.

	St a rt			1.			2.			3.			4.		
	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T
A	$\boxed{0}$	-		0	-	h	0	-	h	0	-	h	0	-	h
B	∞			$\boxed{2}$	A		2	A	h	2	A	h	2	A	h
C	∞			∞			$\boxed{4}$	B		4	B	h	4	B	h
D	∞			∞			8	B		8	B		8	B	
E	∞			8	A		6	B		6	B		$\boxed{6}$	B	
F	∞			∞			4	B		$\boxed{4}$	B		4	B	h
G	∞			∞			∞			∞			6	F	
Z	∞			∞			∞			6	C		6	C	

	5.			6.			7.			vé - ge		
	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T	ℓ	P	T
A	0	-	h	0	-	h	0	-	h	0	-	h
B	2	A	h	2	A	h	2	A	h	2	A	h
C	4	B	h	4	B	h	4	B	h	4	B	h
D	8	B		8	B		$\boxed{8}$	B		8	B	h
E	6	B	h	6	B	h	6	B	h	6	B	h
F	4	B	h	4	B	h	4	B	h	4	B	h
G	$\boxed{6}$	F		6	F	h	6	F	h	6	F	h
Z	6	C		$\boxed{6}$	C		6	C	h	6	C	h

Tehát, a csúcsokba vezető (egyik) legrövidebb utak a következők: A, AB, ABC, ABD, ABE, ABF, ABFG és ABCZ .

5.2. Hivatkozás

[B] Biacsi Dávid: *A Dijkstra-algoritmus és adatszerkezetei,* Szakdolgozat, Veszprémi Egyetem, 1999.

6. fejezet

Fák

Fák és erdők, elemi tulajdonságaik. Fák élszáma. Prüfer kód és Cayley tétele. Fák alkalmazásai: molekulák, sorbarendező algoritmusok, tárolás fán, bináris fák.

A gráfelmélet sok elméleti fejezetében és gyakorlati alkalmazásainál egyaránt nagyon sokszor van szükségünk összefüggő és körmentes gráfokra, mint például adatrendezések, sakk- és egyéb játékok stratégiájának elemzése, elektronikai és egyéb energia hálózatok optimális tervezése, szerteágazó feladatokat végző programok szerkesztése, stb. esetén. E speciális gráfokat hívjuk "fa" gráfoknak, melyekkel a gráfelmélet tekintélyes része foglalkozik, mi csak a jelen és a következő Fejezetekben mutatjuk be alapvető tulajdonságukat és néhány egyszerű alkalmazásukat. További bevezető tulajdonságok és alkalmazások találhatók például Aho-Hopcroft-Ullmann [AHU], Lipi-Nemes-Novák [LNN], Knuth [K], Recski [Re $An,'$ 89], Johnsonbaugh [$JoRi,'$ 86] vagy Rosen [$RoKe,'$ 91] könyveiben.

6.1. Alapvető összefüggések

6.1. Definíció: *Körmentes gráfokat (azaz amikben nincs kör)* **erdő***nek vagy* **liget***nek* (**forest**)*, míg körmentes összefüggő gráfokat* **fá***nak* (**tree**) *nevezzük.* □

Az alábbi egyszerű észrevételek (is) hasznosak lesznek a továbbiakban.

6.2. Állítás: (i) *Egy erdő komponensei fák, azaz egy erdő nem más, mint fák diszjunkt uniója.*

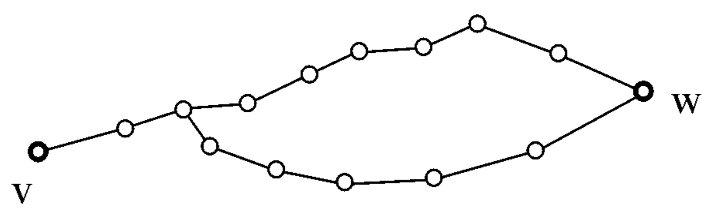
(ii) *Fák és erdők mindig egyszerű gráfok.*

Bizonyítás: Definícióból következik, HF. A hurokélek és a többszörös élek is kört alkotnak. □

6.3. Állítás: *Egy gráf akkor és csak akkor fa, ha bármely két csúcsa között* pontosan egy *út van.*

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Ha a gráf összefüggő akkor bármely két csúcs között *van* út. Ha lenne két út, akkor azok el- és visszaágaznának, ami kört jelentene. Ellentmondás mert a gráf fa.

$\boxed{\Leftarrow}$ A gráf összefüggő mert van út bármely két csúcsa között. Kör nem lehet benne, mert egy kör bármely két csúcsa között két utat lehetne találni. Így a gráf valóban fa. □



Két út elágazásai
6.1. ábra

Kiemeljük, hogy egy gráf pontosan akkor összefüggő ha bármely két csúcsa között *van* út, körmentes ha *legfeljebb egy* út, és fa ha *pontosan egy* út húzódik bármely két csúcsa között. Másszóval, egy fa minimális összefüggő gráf (összefüggő de bármely élét elhagyva már nem maradösszefüggő), vagy ami ugyanaz: maximális körmentes gráf (hiszen kör ugyan nincs benne, de bármely két csúcsa között élt behúzva a gráfban már keletkezik kör).

Hasonló módon lehet jellemezni vektorterek generátorrendszereit, lineárisan független vektorhalmazait és bázisait. Az említett fogalmak közös általánosítását a 15."Matroidok" Fejezetben mutatjuk meg részletesebben.

Az alábbi állítások célja fák élszámának meghatározása, egyszerű bizonyítási módszerük is tanulságos, érdemes átgondolni őket.

6.4. Állítás: *Ha minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör.*

Bizonyítás: Vegyük egy maximális hosszú egyszerű út végpontjait: onnan tovább csak az út pontjaiba húzódhat még (legalább egy) élük, hiszen az út már tovább nem folytatható (maximális). Ekkor pedig a kör bezárult. □

6.5. Következmény: *Ha egy tetszőleges (egyszerű) gráfban nincs kör, akkor van legalább egy elsőfokú pont.*

Bizonyítás: Izolált pontokat elhagyva következik az előző állításból. □

Később szükségünk lesz a fenti állítás élesítésére is (pontosabban, előző állításunk az alábbi módszerrel *is* igazolható) :

6.6. Állítás: *Ha egy tetszőleges (egyszerű) gráfban nincs kör, akkor van legalább* két *elsőfokú pont*.

Bizonyítás: Teljes indukcióval a csúcsok számára. □

6.7. Állítás: *Ha egy $G = (V, E)$ gráfban nincs kör, akkor $|E| \leq |V| - 1$.*

Bizonyítás: Indukcióval $|V|$ -re. $|V| = 1, 2, 3$ -ra könnyen ellenőrizhető.

Az indukciós lépés $|V| = n + 1$ -re: az előző állítás szerint van a gráfban elsőfokú pont, amit a hozzátartozó éllel együtt a gráfból elhagyva a kapott gráfra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, mely szerint $|E| - 1 \leq |V| - 1 - 1$. Ebből az állítás már azonnal következik. □

6.8. Megjegyzés: A fenti állítás azt mondja (sőt pontosan ki is számolja), hogy körmentes gráfnak nem lehet sok éle. Az alábbi állítás pedig arról szól, hogy az összefüggőséghez legalább hány (ugyanennyi) él kell.

6.9. Állítás: *Ha egy $G = (V, E)$ gráf összefüggő akkor $|E| \geq |V| - 1$.*

Bizonyítás: Indukcióval $|V|$-re. $|V| = 1, 2, 3$ -ra könnyen ellenőrizhető az állítás. $|V| = n + 1$ -re az indukciós lépés igazolásához két esetet kell megvizsgálnunk.

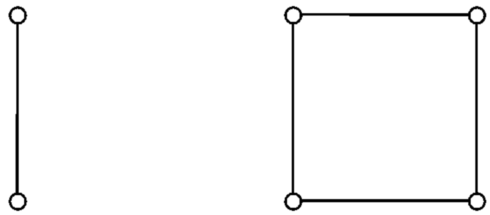
a) Ha van G-ben elsőfokú pont, akkor (mint az előző állításban) ezt a pontot a hozzá tartozó éllel együtt elhagyva , az indukciós feltétel szerint $|E| - 1 \geq |V| - 1 - 1$ lenne, amiből az állítás következik.

b) Ha G-ben nincs elsőfokú pont, akkor minden csúcs fokszáma legalább 2 (izolált pont összefüggő gráfban nem lehet), és ekkor a Kézfogási Tétel (1.Fejezet) alapján

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V} 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |V| = |V| > |V| - 1$$

amiből az állítás következik. □

6.10. Megjegyzés: Hangsúlyozzuk,. hogy sem a 6.7. sem a 6.9. Állítás nem fordítható meg, amint az alábbi (nem összefüggő) gráf mutatja!



Az ellenpélda gráf
6.2. ábra

6.11. Következmény: *Minden fa gráfban*

$$\boxed{|E| = |V| - 1\ .} \qquad \square \tag{6.1}$$

6.12. Megjegyzés: Egy gráf összefüggősége gyorsn és sokféleképpen ellenőrizhető (például a Dijkstra-, tintacsöppentős vagy stb. algoritmusokkal), körmentessége — hát ez nem olyan egyszerű kérdés, míg az $|E| = |V| - 1$ összefüggés szinte pillanatok alatt! Kár, hogy ez utóbbi (egyszerű) összefüggés egymagában nem elég ahhoz, hogy G fa legyen, mint a 6.2. ábrán láthatjuk. Azonban, mint alább kiderül, a fenti (6.1) összefüggés segít megkönnyíteni annak eldöntését, hogy G fa, így azt is, hogy körmentes.

6.13. Tétel: *Ha $G = (V, E)$ tetszőleges összefüggő gráf és $|E| = |V| - 1$, akkor G körmentes (azaz fa).*

Bizonyítás: Ha G -ben van kör, akkor e körből bármely élt törölve G még összefüggő marad. (MIÉRT?) De ekkor $|E| = |V| - 2 < |V| - 1$ lenne, ami ellentmondana a 6.9.Állításnak. $\square$

6.14. Tétel: *Ha a G tetszőleges gráfban nincs kör (vagyis G egyszerű) és $|E| = |V| - 1$, akkor G összefüggő (azaz fa).*

Bizonyítás: Indukcióval $|V|$ -re. $|V| = 1, 2, 3$ -ra az állítás könnyen ellenőrizhető. $|V| = n + 1$ -re az indukciós lépés a következő: a 6.5 Állítás szerint G -ben van elsőfokú pont. Ezen csúcsot a hozzá tartozó éllel együtt elhagyva a maradék G' gráfban sincs kör és nyilván $|E'| = |V'| - 1$, így az indukciós feltevés szerint a G' gráf összefüggő. Az elvett csúcsot élével együtt visszaragasztva összefüggő gráfot kapunk, vagyis az eredeti G gráf is összefüggő volt, Q. E. D. $\square$

A fenti tételek és állítások szerint bebizonyítottuk az alábbi Tételt, amely a fák elméletének (egyik) *legfontosabb, legalapvetőbb* összefüggése:

6.15. Tétel: *Tetszőleges G gráf esetén az alábbi 3 tulajdonság közül egyik sem vonja maga után semelyik másikat, de bármely kettőből következik a harmadik, tehát hogy G fa:*

a) *G összefüggő,*

b) *G körmentes,*

c) $|E| = |V| - 1$ *(a (6.1) összefüggés)* .

Bizonyítás: HF. □

A fenti Tételből azonnal adódik egy egyszerű, mégis meglepő alkalmazás.

6.16. Állítás: *A paraffinok (C_nH_{2n+2} összegképletű, de tetszőleges alakú molekulák) nyílt szénláncúak.*

Bizonyítás: Számoljuk meg először is a gráf csúcsait és éleit. $|V| = n + 2n + 2 = 3n + 2$ az atomok száma, míg a kötések száma

$$|E| = \frac{1}{2}(4 \cdot n + 1 \cdot (2n + 2)) = 3n + 1$$

a Kézfogási Tétel és az atomok vegyértékei miatt, vagyis $|E| = |V| - 1$. Mivel pedig egy molekula mindig összefüggő, ezért a paraffinok gráfja fa, vagyis valóban nyílt szénláncúak. □

6.2. Fák összeszámlálása

A 8. "Gráfok izomorfiája" c. Fejezetben a 8.6.Definícióban és a 8.1.ábrán ismertetjük számozott csúcsú gráfok izomorfiáját. Nem számozott csúcsú (páronként nem izomorf) *tetszőleges* fa gráfok számára csak gyenge becsléseink vannak. Az alábbiakban csak néhány idevágó eredményt ismertetünk, és ismét hangsúlyozzuk, hogy e nehéz (még ma sem lezárt) kérdések nem csak a kémikusok számára fontosak[1].

[1] mint tudjuk, az atomok vegyérték- elméletét August Kekulé, majd 1864-ben Alexander C.Brown a molekula-gráfok izomer-elméletét dolgozta ki. Ezután Arthur Cayley több dolgozatában próbálkozott a fa szerkezetű izomer molekulák összeszámlálásával és rendszerezésével.

6.2.1. Számozott csúcsú fák

6.17. Tétel (Cayley[2], 1889)**:** *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra n^{n-2} páronként nem izomorf, számozott csúcsú fa gráf van n csúcson.*

Bizonyítás (Prüfer[3], 1918)**:** A Tétel alábbi bizonyítása önmagában is érdekes, hiszen a fa csúcsainak számozását felhasználva minden fát, kölcsönösen egy-egy értelmű módon, egy-egy $(n-2)$ hosszúságú számsorozattal, az ún. "Prüfer kód" -dal azonosít, vagyis kódol, amelyből egyértelműen lehet rekonstruálni a fát.

Tehát adott a csúcsok egy rögzített számozása az $\{1, ..., n\}$ számokkal, és legyen G egy tetszőleges fa gráf ezeken a csúcsokon. G -t a következőképpen kódoljuk: töröljük a legkisebb sorszámú elsőfokú csúcsot (**levél, leaf**) a hozzá csatlakozó éllel együtt (felhasználva a 6.5.Következményt) és írjuk le (egyetlen) *szomszédjának* sorszámát. Ezt az eljárást addig ismételjük amíg az összes él és csúcs el nem fogy.

Nyilván egy $n-1$ hosszúságú számsorozatot írtunk le, hiszen ennyi élt töröltünk a gráfban.

6.18. Lemma: *A legutoljára leírt szám mindig n .*

Bizonyítás: A 6.6.Állítás szerint sohasem töröljük az n sorszámú csúcsot. A legutolsó lépésben egy $\{n, k\}$ alakú él marad, amikor is a k jelű csúcsot töröljük, vagyis valóban n -et írjuk le. □

6.19. Lemma: *A leírt $\vec{i} = (i_1, .., i_{n-2})$ sorozatból a gráf egyértelműen rekonstruálható (dekódolható).*

Bizonyítás: Mivel minden lépésben a törölt csúcs *szomszédját* írtuk le, ezért minden csúcs fokszáma pontosan 1 -gyel nagyobb mint ahányszor a csúcs sorszáma az $\vec{i}$ sorozatban szerepel (tehát ha nem szerepel, akkor fokszáma pontosan 1). Ekkor $j = 1, ..., n-1$ értékeire sorban a legkisebb sorszámú elsőfokú csúcsot i_j -vel összekötjük és e két csúcs (még felhasználatlan) fokszámát 1 -el csökkentjük, majd tekintjük j következő értékét. Ne feledjük, hogy $i_{n-1} = n$. □

A fentiek alapján kölcsönösen egy-egy értelmű megfeleltetés van a fák és az $\vec{i}$ sorozatok között, utóbbiak száma pedig valóban n^{n-2}. Ezzel a 6.17. Tétel állítását beláttuk. □

---

[2] Arthur Cayley (1821-1895) angol matematikus, elsősorban algebrával foglalkozott, a *négyszínsejtés* is érdekelte.

[3] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896-1934) német matematikus, algebrával, számelmélettel, projektív geometriával és a csomók elméletével foglalkozott.

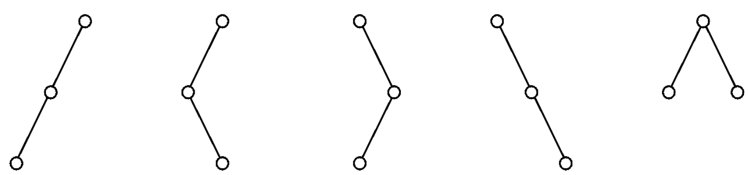
Az alábbiakban speciális, vagyis maximált fokszámú fa gráfok páronként nem izomorf "fajtáit" számoljuk össze.

6.2.2. Bináris fák

A következő, "Fák alkalmazásai" alfejezetben bináris fák segítségével fogunk adatokat rendezni, ezért nem haszontalan a lehetséges bináris fák összeszámlálása.

6.20. Definíció: *Egy (gyökereztetett[4]) fa* **bináris** (**binary**), *ha minden csúcs foka* legfeljebb *kettő. A bináris fák* **szigorúan izomorfak** (**strictly isomorphic**), *ha lényeges, hogy a csúcsok leszármazottait[5]* jobbra *vagy* balra *rajzoljuk a papírra.* □

Például, 3 csúcsból 5 páronként szigorúan nem izomorf bináris fagráfot rajzolhatunk:



Páronként szigorúan nem izomorf bináris fa gráfok
6.3. ábra

6.21. Tétel (Cayley,)**:** *Jelölje u_n $(n \in \mathbb{N})$ az n csúcson rajzolható páronként szigorúan nem izomorf bináris fa gráfok számát. Ekkor $u_1 = 1$ és*

$$u_n = 2 \cdot u_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} u_i u_{n-1-i} \quad .$$

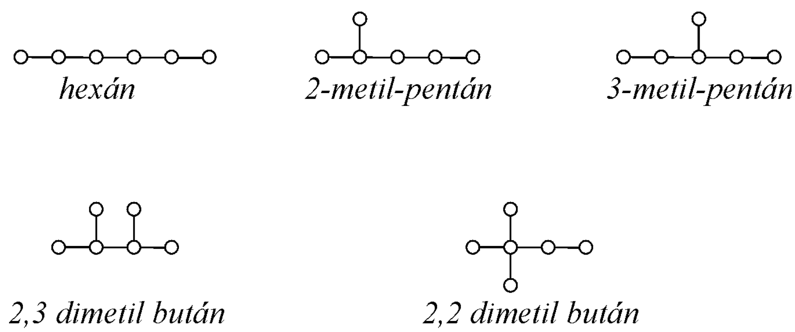
Bizonyítás: Ha a gyökérnek (a legfelső szinten levő egyetlen csúcsnak) csak egy leszármazottja van, akkor ezt rajzolhatjuk jobbra vagy balra, ami $2 \cdot u_{n-1}$ eset. Ha pedig (pontosan) két leszármazottja van, akkor két oldalon egymástól függetlenül u_i ill. u_{n-1-i} -féleképpen rajzolhatjuk fel a jobb- és baloldalon levő csúcsokat. □

[4] fák gyökereztetését a 8.3. "Fák izomorfiája" Alfejezetben ismertetjük részletesen.
[5] velük éllel összekötött, alacsonyabb szinten levő csúcsok

6.2.3. Paraffin molekulák

Az alkánok (paraffinok) nyílt szénláncú szénhidrogének, összegképletük C_nH_{2n+2} , azaz olyan fa gráfok, melyekben minden csúcs fokszáma 1 vagy 4, még pontosabban n negyedfokú csúcs mellett pontosan $2n+2$ elsőfokú csúcsa van. A szénatomok összefüggő (fa) vázat alkotnak, amiből az egész molekula már egyértelműen meghatározható.

Vagyis elegendő az olyan, páronként nem izomorf fa gráfokat megszámolnunk, amelyekben minden csúcs fokszáma *legfeljebb* négy. Például, $n=6$ esetén öt ilyen szénvázat találhatunk, neveik rendre *hexán, 2-metil pentán, 3-metil pentán, 2,3 dimetil bután* és *2,2 dimetil bután.*



A hexán és izomerjei
6.4. ábra

Cayley 1857 és 59 között több dolgozatban próbálta az ilyen fa gráfokat megszámolni, míg a fák "*közepe*" (*middle*) fogalmával egy bonyolult rekurzív összefüggéshez jutott.

6.22. Definíció: *Legyen G egy tetszőleges fa gráf. Hagyjuk el a gráf elsőfokú csúcsait éleikkel együtt, majd ezt az eljárást ismételjük meg addig, míg a gráfból vagy* 1 *vagy* 2 *csúcs marad. Az így kapott* 1 *csúcsot a fa* **közepének** (**center**) *míg* 2 *maradék csúcs esetén ezt a két csúcsot a fa* **kétközepének** (**bicenter**) *hívjuk.* □

A középpontok (pontosabban a fák) alábbi tulajdonsága könnyen igazolható:

6.23. Állítás: *Tetszőleges fa gráfnak mindig van vagy középpontja vagy kétközéppontja, de egyszerre csak (pontosan) az egyik.* □

Cayley bonyolult formuláját most nem ismertetjük, csak a sorozat néhány értékét foglaltuk össze az alábbi táblázatban.

n	# alkán
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3

n	# alkán
6	5
7	9
8	18
9	35
10	75

n	# alkán
11	159
12	355
13	802
14	1858
15	4347

6.3. Fák alkalmazásai

6.3.1. Rendezésekről általában

Napjainkban adatok gyors rendezése (sorting) mindennapi feladat, de nagyméretű adathalmazok esetén nem mindegy, hogy az ezerféle (bonyolult vagy egyszerű) algoritmus közül melyiket válasszuk, nemegyszer jelentős időt takaríthatunk meg egy-egy újítással. A figyelmes Olvasónak feltűnhet, hogy a jelzett időnyereség csak a $\mathcal{O}(...)$ jelölésben alkalmazott $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok "lefaragását" jelenti, hiszen kevés kivételtől eltekintve a sorbarendező algoritmusok mindegyike $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ időigényű. Meglepő módon az alábbi 6.26. Tétel meg is mutatja ennek okát, vagyis hogy ($\mathcal{O}$ tekintetében) ennél gyorsabb sorbarendző algoritmus *nem* lehetséges.

Előtte ismerjük meg a szükséges segédeszközöket.

6.24. Definíció: *Ha egy T fát tudunk úgy gyökereztetni, hogy minden csúcsnak legfeljebb* két *leszármazottja van, akkor T -t (a fenti gyökereztetéssel)* **bináris fá***nak nevezzük.* □

6.25. Állítás: *Ha egy bináris fa magassága h, leveleinek száma ℓ, akkor $\ell \leq 2^h$.*

Bizonyítás: Indukcióval h -ra. $h = 0, 1$ esetén az állítás könnyen ellenőrizhető. Mivel a gyökérnek legfeljebb 2 fia van és nyilvánvalóan mindkét fia alatti részfa legfeljebb $h-1$ magas, így az indukciós feltételt felhasználva az egész fa leveleinek száma $e \leq 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$, Q.E.D. □

Az alábbi eredmény a rendezések elméletének Alaptétele annak ellenére, hogy állítása is és bizonyítása is meglepően egyszerű.

6.26. Tétel: *Tetszőleges n adatot (input) sorbarendező algoritmus (a legrosszabb input esetében)* legalább

$$\mathcal{O}\left(n \cdot \log(n)\right)$$

ideig számol (fut).

Bizonyítás: Előrebocsájtjuk, hogy a $\mathcal{O}(...)$ definíciója miatt teljesen mindegy, hogy mi a logaritmus alapja (HF).

Az algoritmusban levő *if* -elágazásokat (összehasonlításokat) figyelembevéve a program lehetséges működései (futásai) bináris fán ábrázolható, START = GYÖKÉR, a megállások (output) a fa leveleinél jelentkeznek. Mivel $n!$ féle lehetséges input (adatok sorrendje) lehetséges, így mindegyikre különböző számítás és így különböző levél tartozik. Így a levelek száma legalább $n!$.

A fenti Állítás szerint ekkor

$$n! \leq \ell \leq 2^h .$$

Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$h \geq \log_2(n!) = \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$$

a Stirling-formula alapján. □

6.3.2. Rendezés bináris fán

Bár rendezési algoritmust jó párat ismerünk, az alábbi érdekes módon tárolja az adatokat fán, a program szerkezete meglepően egyszerű, mellesleg gyors is.

6.27. Algoritmus *adatok sorbarendezésére*

Az adatokat egy gyökereztetett $G = (V, E)$ fán tároljuk, minden (különböző) adatot a gráf egy-egy csúcspontjához írunk. A gráfot az adatok beolvasásával együtt növesztjük. A sorbarendezendő adatokat egyesével (online) olvassuk be és megpróbáljuk a gráf csúcsain elhelyezni. Ha a beolvasott adat már szerepelt előzőleg, akkor már (az előző beolvasáskor) egy csúcsra elhelyeztük, és csak az adat multiplicitását növeljük most $+1$ -el. Ha pedig új adatot olvastunk be, akkor a gráf egy megfelelő helyén új csúcsot növesztünk és az új adatot oda írjuk.

A fa bináris lesz, ezért beszélük egy csúcs *bal* és *jobb oldali gyerekei*ről. (A programban kapcsolatukat mutatókkal [pointerek] tartjuk nyilván.) A fát a következő elv alapján növesztjük és írjuk az adatokat a csúcsokra:

" *Minden v csúcs alatti* bal*oldali részfa minden csúcsán tárolt adat a kívánt sorrendben* megelőzi *a v csúcson tárolt adatot, míg minden csúcsa alatti* jobb*oldali részfa minden csúcsán tárolt adat a v csúcson tárolt adat* után *következik.* "

A gráf gyökerét **gyökér**, tetszőleges $v \in V$ csúcsán tárolt adatot és multiplicitását **v.adat** -tal és **v.db** -al, a v csúcs jobb- és baloldali gyerekeit (V elemei) **v.jobb** és **v.bal** jelekkel jelöljük (azaz ezekben a változókban tároljuk). Feltesszük továbbá,a hogy a **növeszt(w)** eljárás (alprogram) a gráfban **w** elnevezéssel a gráfban egy új csúcsot hoz létre a megfelelő (lenullázott) **w.adat**, **w.db**, **w.jobb** és **w.bal** értékekkel.

Az algoritmus *indulásakor* a gráf csak a **gyökér** csúcsból áll ami a legelső (input) adatot tárolja azaz legyen

gyökér.adat := **a legelső adat**,
gyökér.db := **1**,
gyökér.jobb :=**NIL,**
gyökér.bal :=**NIL** (üres) .

Az adatokat *beíró* eljárás: az új adatot a vizsgált csúcson tárolt adattal összehasonlítjuk, és ennek megfelelően a bal- vagy jobb oldali részfában folytatjuk a keresést. Ha esetleg a fa legaljára érünk, akkor növesztünk még egy új csúcsot a megfelelő oldalra.

procedure *beír*$(v, ujadat)$ % **rem:** a v csúcsba vagy valamelyik
% alatta levő részfába beírja $ujadat$ értékét
if $ujadat < v.adat$ **then**
  if $v.bal \neq NIL$ **then** beír$(v.bal, ujadat)$
  else növeszt$(v.bal)$, $(v.bal).adat := ujadat$, $(v.bal).db := 1$,
    $(v.bal).bal := NIL$, $(v.bal).jobb := NIL$; return;
if $ujadat = v.adat$ **then** $v.db := v.db + 1$;
if $ujadat > v.adat$ **then**
  if $v.jobb \neq NIL$ **then** beír$(v.jobb, ujadat)$
  else $növeszt(v.jobb)$, $(v.jobb).adat := ujadat$, $(v.jobb).db := 1$,
    $(v.jobb).bal := NIL$, $(v.jobb).jobb := NIL$; return;
end;

A beolvasás végén a tárolt adatokat még egyszerűbben olvashatjuk ki, már rendezetten: először a baloldali majd a jobboldali részfát íratjuk ki, közben a v -ben tárolt adatot is kiíratjuk.

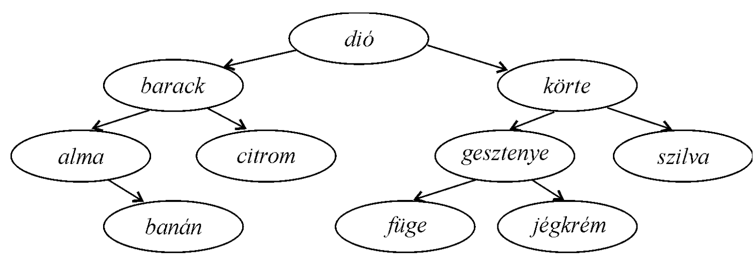
procedure *kiolvas*(v) % **rem**: a v csúcsban és alatta levő részfák-
% ban tárolt adatokat írja ki sorrendben
if $v.bal \neq NIL$ **then** kiolvas$(v.bal)$;
write($v.adat$, $v.db$**);**
if $v.jobb \neq NIL$ **then** kiolvas$(v.jobb)$;

```
end;
```

A főprogram pedig ennek megfelelően még egyszerűbb:

```
main;
  while van adat do
    input(ujadat);
    beír(gyökér, ujadat);
  end while;
  kiolvas(gyökér);
end.
```

6.28. Példa: Az alábbi ábrán egy egyszerű esetet mutatunk be. (HF: mi lehetett az input adatok sorrendje?)



Tárolás fán
6.5. ábra

Természetesen az adatok bizonyos rossz sorrendjei (pl. a fordított sorrend) esetén a fa egyes részei mélyebbre nőnek mint más részei ami a program lassulását okozhatják. Ezt elkerülendő, bizonyos algoritmusok a fa egyes nagyra nőtt részeit áthelyezik más, kisebb részeihez, vagyis a fát *kiegyensúlyozzák,* de ezek részleteire már nem térhetünk ki.

Ugye emlékszünk, hogy bináris fák szigorú nem izomorfiájával az előző alfejezetben foglalkoztunk.

6.4. Feladatok

6.1.Feladat: Mutassuk meg, hogy ha egy legfeljebb $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább n akkor a gráf összefüggő.

6.2.Feladat: Egy tetszőleges T fa gráfban a "minden csúcs fokszáma legfeljebb 3" ekvivalens -e azzal, hogy "T bináris" ?

6.3.Feladat: Mutassuk meg, hogy ha egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban n csúcs, k komponens és e él van, akkor

a) G -ben legalább $e - n + k$ kör van.

b) G erdő pontosan akkor ha $e - n + k = 0$.

c) $|E| \geq n - k$.

6.4. Feladat: a) Mutassuk meg, hogy az alkoholok, vagyis a $C_nH_{2n+1}OH$ összegképletű molekulákban nincs kör (azaz szerkezetük fa).

b) Nyílt szénláncú-e a $C_8H_{18}C_2$ összegképletű molekula?

6.5. Feladat: Rajzoljuk fel a legfeljebb 5 szénatomból álló szénhidrogén-molekulák lehetséges szénvázait!

6.6. Feladat: Mi lehetett az input adatok sorrendje a 6.28. Példában?

6.5. Hivatkozások

[*AHU*] Aho,A.V.,Hopcroft,J.E.,Ullman,J.D: *Számítógépalgoritmusok tervezése és analízise,* Műszaki Kiadó, Bp., 1982

[*GL*] Gács Péter, Lovász László: *Algoritmusok,* Tankönyvkiadó 1987

[*K*] Knuth,Donald E.: *A számítógép-programozás művészete,* Műszaki Kiadó, Budapest, 1988

[*LNN*] Lipi Gábor, Nemes Áron, Novák István: *A kínai hadseregtől az utazó ügynökig (Gráfok gépközelben)*, Novotrade, 1990

7. fejezet

Feszítőfák

ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEK, KRUSKÁL ALGORITMUSA ÉS MEGVALÓSÍTÁSA ADJACENCIA MÁTRIXSZAL. A FESZÍTŐFÁK SZÁMA. ALKALMAZÁS MAJDNEM OPTIMÁLIS HAMILTON KÖR KERESÉSÉRE.

Gáz-, villany- és egyéb vezetékek építésénél két természetes követelmény merül fel: minden fogyasztóhoz (csomóponthoz) eljusson a vezeték, és az egész hálózat a lehető legolcsóbb legyen. (Természetesen még más, biztonsági szempontok is vannak, de azok bonyolultsága miatt könyvünkben nincs módunk velük foglalkozni.) Nyilvánvalóan a gráf csúcsai a fogyasztók, és *éllel* pontosan akkor kötünk össze két fogyasztót, ha tervezhető közöttük vezeték. Minden élnek van egy (megépítési) költsége, és általában a helységek bekötésénél több lehetőségünk is van, vagyis megpróbálhatjuk a *minimális* költségű hálózat tervét megkeresni. Persze úgy, hogy mindegyik adott település be legyen kötve a hálózatba!

Megemlítjük még, hogy a 14. "Hálózati folyamok" fejezetben egy másik optimalizálási (gráfelméleti) problémát tárgyalunk.

A bevezetőben említett problémát fogalmazzuk meg a gráfelmélet nyelvén.

7.1. Definíció: *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf $T = (W, F) \subseteqq G$ részgráfját* **feszítőfá***nak (***spanning tree***) nevezzük, ha $W = V$, azaz T tartalmazza G minden csúcsát, és T fa (körmentes és összefüggő).*
Használatos még a **faváz** *elnevezés is.* $\square$

7.2. Megjegyzések: (i) Az Euler-körökkel ellentétben a feszítőfák *részgráfok*, de hangsúlyozzuk, *nem* feszített részgráfok! Gondoljuk csak meg: $T \subseteqq G$, de T és G csúcsai megegyeznek. Ha T feszített részgráf lenne, akkor az 1.23. definíció szerint G -nek az összes olyan élét tartalmaznia kellene, amik T csúcsai között is húzódnak, vagyis $T = G$ lehetne csak. Ez utóbbi általában pedig nem igaz, csak ha G maga is fa.

(ii) Lényeges észrevétel, hogy *csak összefüggő* G gráfban létezhet feszítőfa (miért? HF). Bár Tételként is kimondhatnánk, azt sem nehéz belátni, hogy *minden összefüggő* gráfban létezik feszítőfa, sőt minimális költségű is (ld.7.4.(ii) Definíció), persze ez is HF.

Tehát a hálózat már tartalmazza G mindegyik csúcspontját . Feszítőfák költségeit pedig élei költségeinek/súlyainak összegeként számíthatjuk ki, amelynek definícióját az Olvasó kényelme érdekében idemásolunk.

7.3. Definíció: *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén tetszőleges $w : E \to \mathbb{R}_+$ pozitív élfüggvényt* **súly-** vagy **költség- függvény***nek (***weight function***) nevezünk. Ekkor a G gráfot* **súlyozott élű gráf***nak nevezzük.* $\square$

7.4. Definíció: (i) *Egy $G = (V, E)$ súlyozott élű gráf tetszőleges $T \subseteqq G$, $T = (W, F)$* **részgráf -***jának* **(össz-) súlya** *vagy* **költsége**

$$w(T) := \sum_{e \in T} w(e) \ ,$$

ahol $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyozza G éleit.

(ii) *$T \subseteqq G$* **minimális költségű/súlyú** *feszítőfa, ha nincs $w(T)$ -nél kisebb súlyú feszítőfa G -ben; azaz G minden $R \subseteqq G$ feszítőfájára $w(R) \geq w(T)$.* $\square$

Az alább ismertetendő algoritmus $\mathcal{O}(n^2)$ gyorsasággal keres tetszőleges G súlyozott élű összefüggő gráfban minimális költségű feszítőfát.

7.1. Kruskal algoritmusa

A szakirodalomban nem egyértelmű az alábbi algoritmus elnevezése, néha egy (nagyon) hasonló algoritmust hívnak Kruskal algoritmusának, míg az alább ismertetettet Prim(1) algoritmusának neveznek. Természetesen még sok más algoritmus is létezik feszítőfák keresésére, például Johnsonbaugh $[JoRi,'86]$ és Rosen $[RoKe,'91]$ könyveiben is találunk néhányat.

7.5. Algoritmus (Kruskal(2), 1953)**:** *minimális költségű feszítőfa keresésére tetszőleges G súlyozott élű összefüggő gráfban.*

1) Robert Clay Prim (1921-) amerikai matematikus és informatikus
2) Joseph Bernard Kruskal, Jr. (1928-2010) amerikai matematikus és informatikus

Legyen tehát $G = (V, E)$ egy tetszőleges (nem feltétlenül egyszerű) súlyozott élű gráf a $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvénnyel. Lépésenként konstruálunk

$$T_1 \subsetneqq T_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq T_{n-1} \subseteqq G$$

részgráfokat G -ben úgy, hogy T_i mindig fa (összefüggő és körmentes) legyen:

START: T_1 legyen G minimális súlyú éle, azaz

$$T_1 := \{e_1\}$$

ahol $e_1 \in E$ és $w(e_1)$ minimális[(3)].

CIKLUS: Ha T_i már adott, akkor T_{i+1} legyen a következő: olyan e_{i+1} élét keressük meg G -nek, melyet T_i -hez csatolva összefüggő és körmentes részgráfot kapnánk és e_{i+1} az ilyen tulajdonságú élek között *minimális* súlyú. Ekkor csatoljuk hozzá az e_{i+1} élt, azaz legyen

$$T_{i+1} := T_i \cup \{e_{i+1}\} \quad . \qquad \square$$

Az algoritmust szokás **mohó** (**greedy**) algoritmusnak is nevezni, mert lokálisan mindig a legjobbat választja.Sok más diszkrét matematikai problémára is *mohó* módon megkereshetjük az optimumot, sőt külön is tanulmányozzák azokat a struktúrákat, problémákat, amikor a mohó algoritmus működik, az ilyen struktúrákat hívják **greedoids** -nak.

A mohó stratégia nem mindig ad optimumot, pl. legrövidebb utat kereső algoritmusoknál sem. Ha ugyanis először a legrövidebb élen indulunk el, akkor elképzelhető, hogy már nem is térhetünk vissza a legrövidebb útra!

7.6. Tétel: *A Kruskál algoritmussal megkonstruált T_{n-1} fa valóban egy minimális költségű feszítőfát ad.*

Bizonyítás: T_{n-1} valóban fa hiszen n csúcsa és $n-1$ éle van, a körmentességre is minden lépésben ügyeltünk. Már csak minimalitását kell belátnunk. Legyen $T := T_{n-1}$ az algoritmus által adott fa, élei $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ a konstruálás sorrendjében.

Legyen $T^* \subseteqq G$ egy (biztosan) optimális feszítőfa, a $w(T) \leq w(T^*)$ összefüggést szeretnénk belátni. Soroljuk fel T^* éleit $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ oly módon, hogy

$$f_1 = e_1 \ , \ f_2 = e_2 \ , \ldots, \ f_k = e_k \ , \ f_{k+1} \neq e_{k+1}$$

[3)] Pontosabban $T_1 := \{\{a, b\}, \{e\}\}$ ahol $e = \{a, b\}$ de az algoritmus az élekre koncentrál, és nyilvánvalóan elegendő az élek halmazát megadni, hiszen ebből a csúcsok halmaza már rekonstruálható.

legyen valamilyen $k < n-1$ indexre, és k a lehető legnagyobb ilyen tulajdonságú index legyen ($k = 0$ is lehet). Emlékeztetünk rá, hogy Kruskál algoritmusa az $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ éleket választotta, ebben a sorrendben.

Kruskál algoritmusa nem f_{k+1}-et választotta, ennek mi lehet az oka? $T^* \cup \{e_{k+1}\}$ -ben van kör, jelöljük C -vel. Mivel az

$$\{f_1, ..., f_k, e_{k+1}\} = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$$

élhalmazok azonosak, és a Kruskál algoritmus szerint a $T_{k+1} = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$ részfa körmentes, így van

$$f_j \in T^* \backslash T$$

él a C körben valamely $j \leq k$ indexre. Olyan f_j él is található, mely közvetlenül csatlakozik az $\{e_1, ..., e_{k+1}\}$ élekhez. e_{k+1} egyik végpontja $T_k = \{e_1, ..., e_k\}$ valamelyik végpontjához csatlakozik, másik végpontja C -ben csak $T^* \backslash T$ -beli élhez csatlakozhat, ez lesz f_j.

Tehát mohó algoritmusunk T_{k+1} megkonstruálásakor f_j -t is választhatta volna, de biztosan

$$w(e_{k+1}) \leq w(f_j)$$

miatt volt módjában másképpen dönteni.

Tudjuk, hogy tetszőleges gráf bármely körének valamelyik élét elhagyva a gráf összefüggősége megmarad, így a G gráf

$$\overline{T} := T^* \cup \{e_{k+1}\} \backslash \{f_j\}$$

részgráfja összefüggő. Sőt, élszáma miatt fa, ráadásul (csúcsainak száma miatt) feszítőfa is. Továbbá

$$w(\overline{T}) \leq w(T^*) \quad .$$

Vagyis a T^* fa helyett egy olyan $\overline{T}$ fát kaptunk, melynek eggyel több éle (e_{k+1}) közös T-vel. A fenti "élkicserélési" eljárást néhányszor megismételve egy olyan $\overline{\overline{T}}$ fát kapunk, melynek súlya T^*-nál nem nagyobb, és összes éle azonos T összes élével - azaz éppen T maga. Vagyis

$$w(T) = w(\overline{\overline{T}}) \leq w(T^*)$$

ami bizonyítja állításunkat. Q. E. D. $\square$

Az algoritmus kisméretű, papírra lerajzolt gráfon könnyen, szemléletesen nyomon követhető, azonban nagyméretű gráfok esetén már kevésbé, a számítógép-program megírásának sem világos, hogyan kezdenénk hozzá. Gondoljuk csak meg: minden lépésben bizonyos tulajdonságú *minimális hosszúságú élt* kell keresnünk, n csúcs esetén ez általában $\mathcal{O}(n^2)$ lépés, és $n-1$ él keresése miatt az (egész) algoritmus $\mathcal{O}(n^3)$ lépésig futna, márpedig általában az ilyen lassú algoritmusok nem igazán gyorsak.

Mint tudjuk, az adatok megfelelő tárolása sokat gyorsíthat az algoritmus futásán. Ezért röviden most bemutatjuk, hogy a (súlyozott élű) gráf adjacencia mátrixát két újabb oszloppal kibővítve hogyan lehet a már kiszámolt részeredményeket tovább felhasználni, és így a futásidőt $\mathcal{O}(n^2)$ -re csökkenteni. ("Természetesen" a szakirodalomban ennél kifinomultabb és gyorsabb algoritmusok is megtalálhatók, könyvünkben azonban nincs módunk további algoritmusokkal foglalkozni.)

7.7. Módszer: *az adatok optimális tárolására.*

Bővítsük ki a $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyozott élű gráf adjacencia mátrixát két újabb oszloppal, amelyeket (jobb híján) "+1" *-edik* és "+2" *-edik* oszlopnak nevezünk.

A +1 -edik oszlop tartalmazza az adott sorhoz tartozó csúcs legkisebb távolságát a pillanatnyilag elkészült T_i részfától, azaz a legrövidebb "bekötő" *él* hosszát - ha van ilyen, ellenkező esetben végtelen, és természetesen 0 ha a csúcsot T_i már tartalmazza.

A +2 -dik oszlopba pedig az előbbi él másik (T_i -beli) végpontját írjuk, illetve üresen hagyjuk, ha ilyen *él* nincs.

Az algoritmus indulásakor meg kell keresnünk a minimális költségű élt, vagyis a mátrix legkisebb nem 0 elemét, majd ezen $\{a_0, b_0\}$ él két végpontjának +1 -edik oszlopába 0 -át írunk, hiszen a $T_0 = \{a_0, b_0\}$ részfát alkotják. A +1 -edik oszlop többi eleme helyére a többi csúcsnak a_0 és b_0 -ba vezető rövidebbik él (ha van egyáltalán) hosszát írjuk, vagyis az a_0 és b_0 oszlopokon "végigszaladva" mindig a kisebbik elemet írjuk. A +2 -dik oszlopba ennek megfelelően a_0 -at vagy b_0 -at vagy üres jelet írunk.

A T_i fa növesztésekor pedig egyszerűen csak a csatlakozó élek közül kell a legrövidebbet kiválasztanunk, vagyis a +1 -dik oszlop legkisebb pozitív elemét kell megkeresnünk és 0 -ra állítanunk. Ha ez az a_{i+1} csúcshoz tartozott, akkor már csak az a_{i+1} -dik és a +1 -dik oszlop elemein kell "végigszaladnunk": csúcsonként (soronként) a kisebbiket kiválasztanunk majd hosszát a +1 -dik oszlopba írni, és ha az a_{i+1} jelű oszlopban van kisebb élhossz, akkor a vizsgált sor +2 -dik oszlopába a_{i+1} -et írni, egyébként pedig tartalmát változatlanul hagyni.

Az algoritmus legkésőbb $n-1$ lépés után megáll (és kevesebb lépésben akkor, ha a gráf nem összefüggő), és a +2 -dik oszlopban találjuk a feszítőfa éleit.

A leírt módszerben minden ciklus $\mathcal{O}(n)$, az egész algoritmus pedig $\mathcal{O}(n^2)$ számítási időt igényel.

A számítás menetének érzékeltetésére az alábbi példában a +1 és +2 oszlopokat minden lépés után ismételten leírjuk, a ZH -ban is ezt a módszert javasoljuk. A választott minimális súlyú élt minden ciklusban bekarikáztuk.

7.8. Példa: Legyen a gráf adjacencia mátrixa az alábbi (az üresen hagyott cellákban 0 áll):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		$\boxed{2}$					4	2	
B	2		12					2	14
C		12		12					5
D			12						6
E						18			16
F					18		20		
G	4					20		5	15
H	2	2					5		9
I		14	5	6	16		15	9	

Az $\{A, B\}$ él választása után az algoritmus a következőképpen fut (az előző mátrixhoz csatlakoztatva):

	1.		**2.**		**3.**		**4.**		**5.**	
	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2	+1	+2
A	0	B	0	B	0	B	0	B	0	B
B	0	A	0	A	0	A	0	A	0	A
C	12	B	12	B	12	B	$\boxed{5}$	I	0	I
D							6	I	$\boxed{6}$	I
E							16	I	16	I
F					20	G	20	G	20	G
G	4	A	$\boxed{4}$	A	0	A	0	A	0	A
H	$\boxed{2}$	A	0	A	0	A	0	A	0	A
I	14	B	9	H	$\boxed{9}$	H	0	H	0	H

	6.		**7.**			**8.**
	+1	+2	+1	+2	+1	+2
A	0	B	0	B	0	B
B	0	A	0	A	0	A
C	0	I	0	I	0	I
D	0	I	0	I	0	I
E	$\boxed{16}$	I	0	I	0	I
F	20	G	$\boxed{18}$	E	0	E
G	0	A	0	A	0	A
H	0	A	0	A	0	A
I	0	H	0	H	0	H

Tehát a feszítőfa élei (az első és utolsó oszlop alapján) $\{A, B\}$, $\{C, I\}$, $\{D, I\}$, $\{E, I\}$, $\{F, E\}$, $\{G, A\}$, $\{H, A\}$ és $\{I, H\}$.

Emlékeztetünk rá, hogy a feszítőfák *számát* a 4. "Gráfok mátrixai" c. Fejezetben határoztuk meg.

7.2. Utazó ügynök metrikus gráfokban

Az utazó ügynök (travelling salesman) probléma még a Hamilton körök problémájánál is "nehezebb", hiszen nem csak minimális összköltségű Hamilton kört kell keresnünk, hanem általában síkbeli (kevés élű) gráfban, márpedig, mint a 3. "Hamilton körök" c. fejezetben láttuk, Hamilton körök *létezéséhez* éppen ellenkezőleg, sok él szükségeltetik.

Az alábbi egyszerű példa éppen ezért hasznos és tanulságos: speciális gráfban ugyan és csak közelítőleg, de *gyors* algoritmust adhatunk, egy $\mathcal{NP}$ *-teljes* problémára!

7.9. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *egy súlyozott élű gráf a* $w : E \to \mathbb{R}_+$ *súlyfüggvénnyel. Az* **"utazó ügynök"** *probléma minimális összköltségű Hamilton kört keres* G *-ben, azaz egy olyan* $H \subseteqq G$ *Hamilton kört, amelynek* $w(H) := \sum_{e \in H} w(e)$ *súlyánál kisebb súlyú Hamilton kör nincs* G *-ben.* $\square$

7.10. Megjegyzés: Vagyis az ügynök a legrövidebb/legolcsóbb úton kíván végigmenni a megadott városok között a lehetséges úthálózatot felhasználva. Természetesen ez is $\mathcal{NP}$-teljes probléma, ha általános, minden gráfra működő algoritmust keresünk. Speciális gráfokra speciális súlyfüggvénnyel azonban van speciális, gyors algoritmus, *majdnem optimális* Hamilton körök megtalálására.

7.11. Definíció: A K_n *teljes gráfon értelmezett* $w : E \to \mathbb{R}_+$ *súlyfüggvény* **metrikus** *ha teljesül rá a* háromszög-egyenlőtlenség, *azaz minden* $x, y, z \in V$ *csúcspontra*

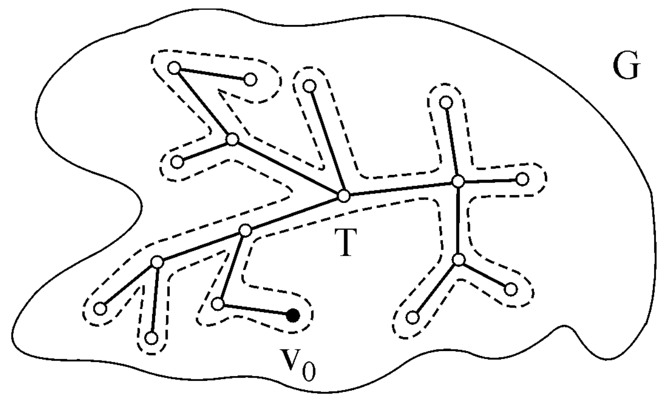
$$w(x, z) \leq w(x, y) + w(y, z) \quad . \qquad \square$$

7.12. Tétel: K_n *-ben tetszőleges metrikus súlyfüggvény esetén* $\mathcal{O}(n^2)$ *időben találunk az optimálisnál legfeljebb* kétszer *hosszabb Hamilton kört.*

7.13. Megjegyzés: K_n csúcsainak tetszőleges $\{x_1, ..., x_n\}$ permutációja nyilvánvalóan Hamilton kör; feladatunk most az $n! = \mathcal{O}\left((\frac{n}{e})^n\right)$ kör közül egy *majdnem* minimális súlyú megtalálása (ha már pontosan minimális megkeresésére nincs időnk).

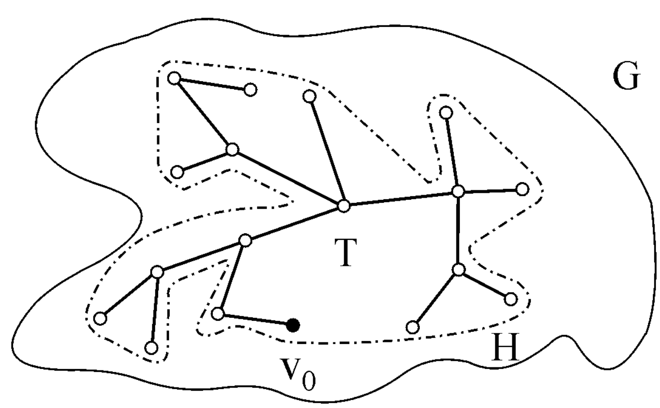
Az alább bemutatott módszernél bonyolultabb módon a kétszeres szorzótényező valamint a $\mathcal{O}(n^2)$ futásidő még lejjebb szorítható.

Bizonyítás (**Algoritmus**): (1) Legyen $T \subseteqq K_n$ egy minimális súlyú feszítőfa (az ábrán vastag vonallal, azaz összefüggő egyenes szakaszokkal jelöltük).



$T \subsetneqq K_n$ feszítőfa és az első körüljárás
7.1. ábra

(2) A síkon "járjuk körbe" a fát mindkét oldalán (szaggatott vonal). A körüljárás során a csomópontokat (1-nél magasabb fokú pontokat) 1-nél többször érintjük. **(3)** A fenti csúcsismétlődéseket a következő módon szüntetjük meg: Induljunk el egy tetszőleges v_0 csúcsból a fenti körüljárás során, azonban ha utunk során valamelyik v csúcsból egy, már érintett u csúcsra lépnénk, akkor az u csúcsot kihagyva, v -ből egyből a következő, még érintetlen y csúcsra ugrunk (pontozott vonal). Természetesen ha v után több, már érintett pont következne (pl. u, x), akkor v-ről egyből a legközelebbi, még érintetlen y csúcsra ugrunk (pontozott vonal). Ez, mint könnyen belátható, legfeljebb $\mathcal{O}(n^2)$ lépést igényel; és a kívánt szaggatott és pontozott élek mindig léteznek, mivel K_n-ben "vagyunk".



A csúcsismétlődések megszüntetése
7.2. ábra

Kérdés: az így kapott H-körnek mennyi a súlya?

(4) Legyen H_0 egy abszolút minimális súlyú Hamilton kör. H_0-ból egy (bármelyik) élét elhagyva egy utat, azaz feszítőfát kapunk, de a T feszítőfa minimális volt, így $w(T) \leq w(H_0)$.

(5) T éleit kétszer jártuk végig, ezért a szaggatott vonal hossza $w(\text{- - -}) = 2 \cdot w(T)$.

(6) Ha a szaggatott vonalat egy-egy csúcsismétlődés miatt pontozott vonallal helyettesítjük, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$w(v,x) \leq w(v,u) + w(u,x)$$

azaz $w(\text{......}) \leq w(\text{- - -})$.

Természetesen, ha több már érintett csúcsot "ugortunk át", akkor a háromszög- egyenlőtlenséget többször alkalmazzuk!

A fenti egyenlőtlenségeket összeolvasva kapjuk, hogy a kapott Hamilton kör hossza $\leq w(\text{......}) \leq w(\text{- - -}) = 2w(T) \leq 2w(H_0)$. $\square$

7.3. Hivatkozás

[K] Kruskal,J.B.: *A Reminiscence About Shortest Spanning Subtrees,* Archivum Math, 33 (1997), 13-14.

8. fejezet

Gráfok izomorfiája

Általános izomorfia, invariáns tulajdonságok. Cayley tétele számozott csúcsú fagráfok számáról. Algoritmus gyökereztetett fák izomorfiájának eldöntésére, a vödör algoritmus.

Tulajdonképpen a gráfelmélet legfontosabb fejezetéhez érkeztünk: mikor is tekintsünk két gráfot azonosnak vagy különbözőnek. Bár az 1.Fejezetben ezt a gráfok és izomorfiájuk 1.2. és 1.16. definícióiban már precízen rögzítettük, mégis elméleti és gyakorlati szempontból nem árt nagyító alá venni ezt a problémát.

Emlékeztetünk arra, hogy a matematika *mindegyik* fejezetében az *izomorf* (vagy egybevágó) alakzatoknak és struktúráknak, mint például síkidomok, testek, vektorterek, Boole- és absztrakt algebrák, gráfok, stb., a lényeges, az adott tárgyban vizsgált tulajdonságai azonosak, és csak (abban a tudományterületben) lényegtelen részletekben térnek el egymástól. Ezt az elvet hívják **Steiniz- féle izomorfia- elv**[1]nek.

8.1. Izomorfizmusok

Bár az 1. Fejezetben már definiáltuk gráfok izomorfiáját, az Olvasó kényelme érdekében most megismételjük a definíciót. Felhívjuk a figyelmet, hogy az alábbi definíció *tetszőleges* gráfokra szól, vagyis hurok- és többszörös élek is lehetnek a gráfban.

[1] lásd még az I. rész 1. Fejezet 9) lábjegyzetét.

8.1. Definíció: *A* $G = (V, E)$ *és* $H = (W, F)$ *gráfokat* **izomorfak**[2]*nak* *(***isomorphic***) nevezzük, és ezt* $G \cong H$ *-vel jelöljük, ha létezik olyan* $f : V \to W$ *bijekció a két csúcshalmaz között, amely* **éltartó** (**edge preserving**)*, vagyis tetszőleges* $x, y \in V$ *csúcsok esetén*

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in F \quad . \tag{8.1}$$

Az f **izomorf leképezést** *más szóval* **izomorfizmus***nak hívjuk.* □

8.2. Megjegyzések: **(i)** A fenti definíciót természetesen általánosan tetszőleges gráfokra értelmezzük, de a (8.1) összefüggésben az $\{x, y\}$ és az $\{f(x), f(y)\}$ élek *multiplicitásának* meg kell egyeznie. Azaz, többszörös élek esetén, ha $m : E \to \mathbb{N}$ és $n : F \to \mathbb{N}$ mutatja a két gráf éleinek multiplicitásait, akkor az

$$n\,(f(e)) = m(e)$$

összefüggésnek kell teljesülnie.

A (8.1) összefüggésben $x = y$ is lehet, vagyis hurokéleket (akár többszörös hurokélek is) figyelembe veszünk.

(ii) Adott $f : V \to W$ *izomorfizmus* (pontosabban a (8.1) összefüggés alapján) esetén természetes módon adódik egy

$$g : E \to F$$

bijekció az élek között:

$$g\,(\{x, y\}) := \{f(x), f(y)\} \quad ,$$

ráadásul e bijekció bizonyos értelemben "izomorfizmus is" G és H között: az élek páronkénti megtszéspontjai között is találhatunk egy bijekciót, ami majdnem f maga.

A szakirodalomban sokszor már a gráfok közötti izomorfizmus *definíciójában* a fenti g élfüggvény is szerepel, de éppen az előző gondolatmenetünk mutatja, hogy feleslegesen. A továbbiakban mi sem "követeljük" meg a fenti g élfüggvény létezését, hiszen f -ből már megszerkeszthető, de természetesen felhasználjuk, ha szükségünk lesz rá.

Könnyen belátható az alábbi összefüggés :

8.3. Állítás: *Két tetszőleges egyszerű gráf pontosan akkor izomorf ha komplementereik is izomorfak.* □

---

[2] izo morf = hasonló alakú, amorf = alaktalan (görög)

8.4. Megjegyzés: Természetesen lehetne vizsgálni (valós számokkal) súlyozott élű vagy irányított gráfok izomorfiáját is (f -nek az élek súlyát illetve irányítását is egyeztetnie kell a két gráfban). Sajnos könyvünk terjedelme nem engedi meg , hogy ilyen irányú általánosításokkal is fogalkozzunk, csak az élek/csúcsok *színezésé*re térünk ki: *természetes számokat* rendelünk hozzájuk

8.5. Definíció: *Egy tetszőleges* $c : V \to \mathbb{N}$ *függvényt* **csúcsszínezés***nek* (**vertex coloring/colouring**), *míg a* $d : E \to \mathbb{N}$ *függvényeket* **élszínezés***nek* (**edge coloring**) *nevezzük.* $\square$

Kémiai molekulák tanulmányozásánál az atomok neveit kódolhatjuk például a csúcsok színezésével, míg a kötések típusainak az élek színei felelnek meg. Természetesen, csúcs- vagy élszínezett gráfok közötti izomorfizmus esetén biztosítanunk kell a

$$c(f(x)) = c(x) \qquad (\forall x \in V)$$

illetve a

$$d(g(e)) = d(e) \qquad (\forall e \in E)$$

egyenlőségeket is. (Most nem a Ramsey-elmélet (10.Fejezet) szemszögéből vizsgáljuk az él- és csúcsszínezéseket!) A 8.3. "Fák izomorfiája" alfejezetben bemutatott algoritmust is egyszerűen ki lehet terjeszteni tetszőleges csúcsszínezésre is (lásd a 8.21.(ii) Megjegyzésben).

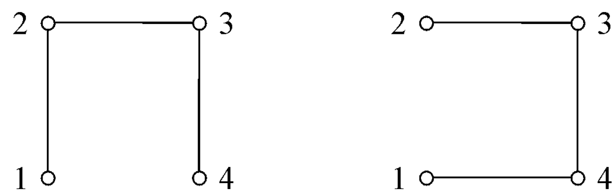
Szélsőséges esetben tanulmányozhatjuk a *számozott* csúcsú gráfokat is:

8.6. Definíció:(i) *A* $G = (V, E)$ *gráfot* **számozott** *csúcsú gráfnak nevezzük, ha adott rajta egy* injektív $\gamma : V \to \mathbb{N}$ *csúcsszámozás,* $\mathrm{Im}(\gamma) = \{1, ..., n\}$ *ahol* $n = |V|$ *, azaz minden* $x \in V$ *csúcs* $\gamma(x)$ *száma különböző.*

(ii) *Két számozott csúcsú* $G = (V, E, \gamma)$ *és* $H = (W, F, \mu)$ *gráf* **izomorf,** *ha az (egyetlen)* $f : V \to W$ *számozástartó bijekció (azaz* $\mu(f(x)) = \gamma(x)$ *ha* $x \in V$*) éltartó, azaz izomorfizmus, vagyis tetszőleges* $x, y \in V$ *csúcsok esetén teljesül:*

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in F \quad . \qquad \square$$

Felhívjuk a figyelmet a "szokásos" és a "számozott csúcsú" izomorfizmusok közötti különbségre: például az alábbi két gráf izomorf de számozott csúcsaikat tekintve nem izomorf:



Izomorf, de számozottként nem izomorf gráfok
8.1. ábra

Például tekinthetjük Cayley 6."Fák" Fejezetben bizonyított tételét (ld. 6.17. Tétel)

8.7. Tétel (Cayley)**:** *n csúcson n^{n-2} páronként nem izomorf számozott csúcsú fa gráf van.* □

A fenti eredménnyel szemben számozatlan csúcsok esetén csak gyenge becsléseink vannak az n csúcsú páronként nem izomorf (tetszőleges) fa gráfok számára.

8.8. Megjegyzés: Fontos kérdés az adott (tetszőleges) gráfok közötti izomorfizmus létezését eldöntő, vagy esetleg egy izomorfizmust megkereső *algorimus* problémája. Bár az általános, tetszőleges gráfok izomorfiája problémájának NP -teljessége ugyan nem ismert, de polinomiális algoritmust sem találtak még eddig.

A legegyszerűbb, az összes ($n!$) permutációt végigvizsgáló algoritmus triviálisan lassú, hiszen minden sorrakerülő $f : V \to W$ bijekció éltartóságának ellenőrzése $\mathcal{O}(n^2)$ idő, vagyis "algoritmusunk" $\mathcal{O}(n! \cdot n^2)$ ideig fut. A 4.Fejezetben mátrixok nyelvén is megfogalmaztuk gráfok izomorfizmusát, de azt is beláttuk, hogy azon algoritmusok is $\mathcal{O}(n!)$ lassúak.

Babai László 2015 -ben *kvázipolinomiális*[3] algoritmust tett közzé az általános gráf-izomorfia problémára.

A következő alfejezetben leírt *invariáns tulajdonságok* pedig éppenséggel nem az izomorfizmus megtalálását segítik.

Speciális gráfosztályokra azonban, azaz ha tudjuk előre, hogy az input gráfok mindegyike valamely előre adott tulajdonsággal bír, van polinomiális algoritmus. Például gyökereztetett fákra Read 1979-ben, nem gyökereztetett

---

[3] A $2^{\mathcal{O}((\log n)^c)}$ sebességű algoritmusokat ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges) nevezzük **kvázipolinomális**-nak (majdnem polinomiálisnak), amik ugyan lassabbak a **polinomiális** ($\mathcal{O}(n^c)$) de gyorsabbak az **exponenciális** ($2^{\mathcal{O}(n)}$) algoritmusoknál.

fákra Aho és munkatársai 1974-ben, síkbeli gráfokra Hopcroft és Tarjan 1972-ben, k -erősen reguláris részgráfok nélküli gráfokra Corneil 1970-ben, stb. adott polinomiális algoritmust. Egy egyszerű algoritmust fák izomorfiájának eldöntésére a 8.3. alfejezetben ismertetünk.

8.2. Invariáns tulajdonságok

Már a 8.2. Megjegyzésben is érintettük, hogy izomorf gráfoknak *ugyannyi* számú csúcsa és éle kell hogy legyen, hiszen bijekció van közöttük. Könnyen találhatunk még sok "ilyen" tulajdonságot: amelyek izomorfizmus esetén "öröklődnek", vagyis izomorf gráfok esetén vagy mindegyik vagy egyik sem rendelkezik ilyen tulajdonsággal. A "tulajdonság" precíz definícióját csak a Matematikai Logika tantárgyban adjuk meg ("tetszőleges egyváltozós formula"), jelen könyvünkben azonban megelégszünk (az eddigi) szemléletes értelmezéssel.

8.9. Definíció: *Gráfok egy Φ tulajdonságát* (**gráf-**) **invariáns**[4]*nak nevezzük, ha tetszőleges G és H izomorf gráfokra G pontosan akkor rendelkezik a Φ tulajdonsággal amikor H.* □

8.10. Állítás: *Egy Φ tulajdonság pontosan akkor gráfinvariáns ha a tagadása $\rceil\Phi$ is gráfinvariáns.* □

8.11. Állítás: *A következő tulajdonságok* például *gráfinvariánsak.*

(i) *a csúcsok száma,*

(ii) *az élek száma, multiplicitása,*

(iii) *a csúcsok fokszámai, sőt a csúcsok fokszámainak halmaza (multiplicitással),*

(iv) *az élek végpontjainak fokszámai,*

(v) *a komponensek száma,*

(vi) *a gráf összefüggősége,*

(vii) *van/nincs a gráfban k hosszúságú kör/út, általában a gráfban levő k hosszúságú körök/utak száma,*

(viii) *a gráf páros, általában a gráf t -pólusú*

(ix) *a gráfban van/nincs Euler/Hamilton kör,*

(x...) *stb.*

---

[4] változatlan (latin)

Bizonyítás: Az állítás(ok) szemléletesen "triviálisak", a (kissé hosszadalmas) precíz bizonyítástól most eltekintünk. □

Az invariáns tulajdonságok, pontosabban azok hiánya gyakorlati alkalmazásoknál van sokszor segítségünkre, a következő Állítás alapján.

8.12. Állítás: *Ha van egy* Φ i*nvariáns tulajdonság, amely két adott gráf egyike rendelkezik de a másik nem, akkor a két gráf* nem *izomorf.*

Bizonyítás: Azonnal következik a 8.9. Definícióból. □

Tehát invariáns tulajdonságok vizsgálatával aránylag könnyen kiszűrhetjük, hogy két adott gráf *nem* izomorf, *ha* szerencsénk van! Felhívjuk a figyelmet, hogy megfordítva nincs így: az invariáns tulajdonságoknak nincs (pontosabban végtelen hosszú) teljes listája, vagyis akármennyit találunk megegyezőnek mind a két gráfban, az semmit sem jelent a két gráf izomorfiájának vonatkozásában, a két gráf még vígan lehet nemizomorf!

8.3. Fák izomorfiája

Mint említettük, ha speciális gráfokra szorítkozunk, akkor található polinomiális algoritmus gráfok közötti izomorfizus megkeresésére. Most Babai Lászlónak[5] az egyik leggyakoribb gráfok, a *fák* izomorfizmusára adott egyszerű és mégis rendkívül gyors algoritmusát ismertetjük. Felhívjuk a figyelmet, hogy az alább definiált fogalmak és módszerek általánosak, a fák elmél etében széles körben használatosak. Aho-Hopcroft-Ullmann [AHU] könyvében (3.2. Fejezet) részletesen olvashatunk az algoritmus felhasználásáról és hasonló algoritmusokról.

8.13. Tétel (Babai László, 1979): *Gyökereztetett fák izomorfiája* $\mathcal{O}(n)$ *(azaz lineáris) időben eldönthető, így tetszőleges fák izomorfiája* $\mathcal{O}(n^2)$ *időben eldönthető.*

8.14. Definíció (és **Algoritmus**): *Egy tetszőleges* összefüggő $G(V, E)$ *gráf* **gyökereztetése** *(***szintekbe rendezése**, **rooting** *) az alábbi:*

Legyen $v_0 \in V$ *tetszőleges (kitüntetett) csúcs,* v_0 *neve* **gyökér** *(***root***), és* $\{v_0\}$ *a* **nulladik szint** *(***level 0***).*

v_0 *szomszédai* (a v_0 *-al összekötött csúcsok, neighbours of* v_0) *alkotják az* **1.szintet** (**level 1**).

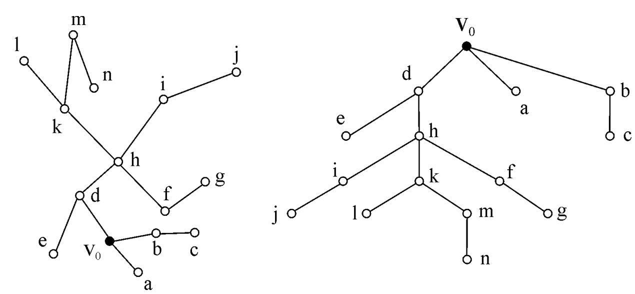
[5] korábban az ELTE TTK Algebra Tanszékének fiatal professzora (1950-ben született), jelenleg az USA -ban dolgozik

Ha az i -edik szinten levő csúcsokat már megtaláltuk, akkor az $(\mathbf{i+1})$ **-dik szintre** *kerülnek azon csúcsok, amelyek éllel csatlakoznak valamelyik, i-edik szinten levő csúcshoz, és még nem szerepelnek egyik, már definiált szinten sem. Az i-edik szintet* $\mathbf{V_i}$ *-vel jelöljük.*

A gyökereztetés addig tart, míg gráf csúcsai el nem fogynak. A legnagyobb $i \in \mathbb{N}$ *indexet, amelyik szint még nem üres, a* v_0 csúcsból *gyökereztetett gráf* **magasság***ának (***height***) nevezzük, jele* $\mathbf{ht_{v_0}}(G)$. □

Kiemeljük, hogy a fa gyökereztetése (a végeredmény) függ attól, hogy melyik csúcsot választjuk ki gyökérnek.

Például tekintsük az alábbi gráf egy gyökereztetését:



G gyökereztetése a v_0 *csúcsból indulva*
8.2. ábra

8.15. Megjegyzések: (i) Nyilvánvalóan tetszőleges gráf gyökereztetése $\mathcal{O}(n)$ azaz lineáris időben elvégezhető, és többszörös élek jelenléte lényegtelen a gyökereztetés szempontjából. A végeredmény persze függ attól, melyik csúcsot választjuk gyökérnek! Az így kapott gráfok persze izomorfak a 8.1. Definíció értelmében hiszen ugyanazt a gráfot rajzoltuk fel többféleképpen, de nem feltétlenül van közöttük a 8.18. Definícióban említett *szintenkénti* izomorfizmus.

(ii) A gyökereztetések magassága is függ a gyökérnek nevezett csúcs választásától. Általában, minden gyökereztetés esetén az i -edik és j -edik szinteken levő csúcsok közötti legrövidebb út hossza a konstrukció miatt legalább $j-i$ és legfeljebb $i+j$ (ha $i \leq j$), vagyis a gráf átmérője $ht(G)$ és $2 \cdot ht(G)$ között van. A csúcsok közötti pontos távolsággal és a gráf átmérőjével a feladatok között foglalkozunk.

8.16. Állítás: *Tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf akkor és csak akkor erdő (azaz körmentes), ha minden gyökereztetésében élek* csak *a szomszédos szintek között húzódnak.* **Bizonyítás:** HF. □

Vagyis minden fa gyökereztethető lineáris időben. Néhány további elnevezést ismertetünk gyökereztetett fák esetén.

8.17. Definíció: *Legyen* $G = (V, E)$ *tetszőleges gyökereztetett fa. Ekkor tetszőleges* $x, y \in V$ *csúcsokra* x *-nek* **fia/leszármazottja** *(***child***)* y *és* y *-nak* **apja/őse** *(***ancestor***)* x *ha* $\{x, y\} \in E$ *, vagyis* x *és* y *éllel összekötöttek (azaz szomszédos szinteken helyezkednek el)* és x *előbbi szinten (feljebb) helyezkedik el mint* y , azaz $x \in V_i$ *és* $y \in V_{i+1}$ *valamely* $i < ht_{v_0}(G)$ *indexre.*

Az x *csúcsot* **levél***nek* (**leaf**) *nevezzük, ha nincs leszármazottja.* □

A legutolsó szinten nyilvánvalóan csak levelek ülnek, de levelek nem csak a legalsó szinten lehetnek.

8.18. Algoritmus (Babai László, 1979): *Legyenek adottak* $T = (V, E)$ *és* $R = (W, F)$ azonos magasságú *gyökereztetett fák* $x_0 \in V$ *illetve* $y_0 \in W$ *gyökerekkel. Olyan* $f : V \to W$ *izomorfizmust keresünk, amelyre* $f(x_0) = y_0$ *és* f **szintenként** *képez, azaz*

$$f : V_i \to W_i \qquad (i \leq ht(T)) \ ,$$

vagyis *a* T *fa mindegyik szintjének képe éppen az* R *fa megfelelő szintje.*

8.19. Megjegyzések: Könnyen belátható (a fa magasságára való egyszerű teljes indukcióval), hogy a két fa magasságának megegyezése *szükséges* egy *szinteknénti* izomorfizmus létezéséhez.

Természetesen két fa pontosan akkor izomorf, ha létezik olyan gyökereztetésük, amelyekhez van a fenti tulajdonsággal rendelkező *szintenkénti* izomorfizmus.

Vagyis, ha adott két fa gráf, akkor rögzítsük egyikük egy (tetszőleges) gyökereztetését, majd a másiknak mind az n gyökereztetésére végigpróbálhatjuk a fent ígért (ld. alább) $\mathcal{O}(n)$ idejű algoritmust egy *szintenkénti* izomorfizmus keresésére, és így $\mathcal{O}(n^2)$ időben eldönthetjük a két fa (közönséges) izomorfiáját. Sőt, ha a két gráfunk izomorf, akkor valamelyik gyökereztetés esetén meg is találunk egy ilyen (szintenkénti) izomorfizmust, ami a 8.1.Definíció szerint *is* izomorfizmus.

Ismét hangsúlyozzuk, hogy az alábbi algoritmus csak *fa*-gráfokra működik gyorsan és biztosan ! □

A 8.18. **Algoritmus** leírása**:**

f létezésének ellenőrzését (és konstrukcióját) szintenként végezzük - a legutolsó szinttől kezdve visszafelé, a gyökérig. Természetesen ilyen f csak akkor létezhet, ha a két fa magassága azonos:

$$ht_{x_0}(T) = ht_{y_0}(R) \quad .$$

f megkereséséhez T és R csúcsaihoz (szintenként visszafelé) egy-egy $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}$ -el jelölt címkét, egész számot, és egy-egy $\mathbf{l}(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}^*$ -el jelölt "label" -t, egész számokból álló (véges) sorozatot írunk párhuzamosan minden V és W -beli x csúcshoz a következő módon:

(i) T és R összes levelére legyen $l(x) :=$ "" (üres sorozat) és $c(x) := 0$.

(ii) Ha $i \leq ht(T) - 1$ és a V_{i+1} szinten levő csúcsokra az $l(x)$ és $c(x)$ értékeket már kiszámítottuk, akkor a V_i szint csúcsaira legyen $l(x)$ és $c(x)$ a következő:

a) tetszőleges $x \in V_i$ esetén $l(x)$ legyen az x gyermekeihez írt $c(z_j)$ címkék monoton nem csökkenő

$$c(z_1) \leq ... \leq c(z_p)$$

sorozata, azaz legyen

$$l(x) := (c(z_1), ..., c(z_p))$$

b) a V_i elemeihez írt $l(x_j)$ sorozatokat soroljuk fel lexikografikus módon (mint szótárban a szavak), azaz legyen olyan sorrendben, hogy

$$l(x_1) \preceq l(x_2) \preceq ... \preceq l(x_t) \quad ,$$

és legyen $c(x_j)$ az $x_j \in V_i$ csúcs esetén a fenti lexikografikus felsorolásban $l(x_j)$ sorszáma, azaz legyen

$$\begin{cases} l(x_i) = l(x_{i+1}) & \textit{esetén} \quad c(x_i) = c(x_{i+1}) \\ l(x_i) \precnapprox l(x_{i+1}) & \textit{esetén} \quad c(x_i) < c(x_{i+1}) \end{cases}$$

A $c(x)$ és $l(x)$ címkék konstruálására egy példát az alábbi ábrán mutatunk be.

Az algoritmus minden i-edik V_i és W_i szinten a c függvény definiálása után ellenőrzi, hogy V_i és W_i csúcsaihoz írt $c(x)$ $(x \in V_i)$ és $c(y)$ $(y \in W_i)$ értékek (sorozata) azonos -e? Amennyiben eltérést talál, azonnal megáll, a két gyökeres fa (az adott gyökereztetés mellett) nem lehet izomorf szintenként. Ha pedig ezen $c(x)$ és $c(y)$ sorozatok azonosak, akkor az algoritmus továbblép az $i - 1$ -edik szintre - a fák még lehetnek izomorfak.

A két gyökereztetett fa (az adott gyökereztetés mellett) pontosan akkor izomorf szintenként, ha a gyökerekhez írt $l(x_0)$ és $l(y_0)$ sorozatok is azonosak!

Ez esetben a keresett $f : V \to W$ izomorfizmus a következő: minden $i \leq ht(T)$ index esetén ha V_i és W_i csúcsait sikerült a hozzájuk írt $l(x)$ ill. $l(y)$ értékek növő sorrendjébe tennünk, azaz ha

$$\begin{aligned} V_i &= \{x_1, ..., x_t\}, \quad l(x_1) \preceq l(x_2) \preceq ... \preceq l(x_t) \\ W_i &= \{y_1, ..., y_t\}, \quad l(y_1) \preceq l(y_2) \preceq ... \preceq l(y_t) \end{aligned} \quad ,$$

akkor legyen

$$f(x_j) := y_j \ . \quad \square$$

Az algoritmus helyességét és $\mathcal{O}(n)$ gyorsaságát nem bizonyítjuk, csak néhány megjegyzést fűzünk hozzá.

8.20. Megjegyzések: (i) A $\mathcal{O}(n)$ gyors idő eléréséhez javasoljuk a $c(x)$ és $l(x)$ értékek alábbi algoritmus szerinti sorbarendezését:

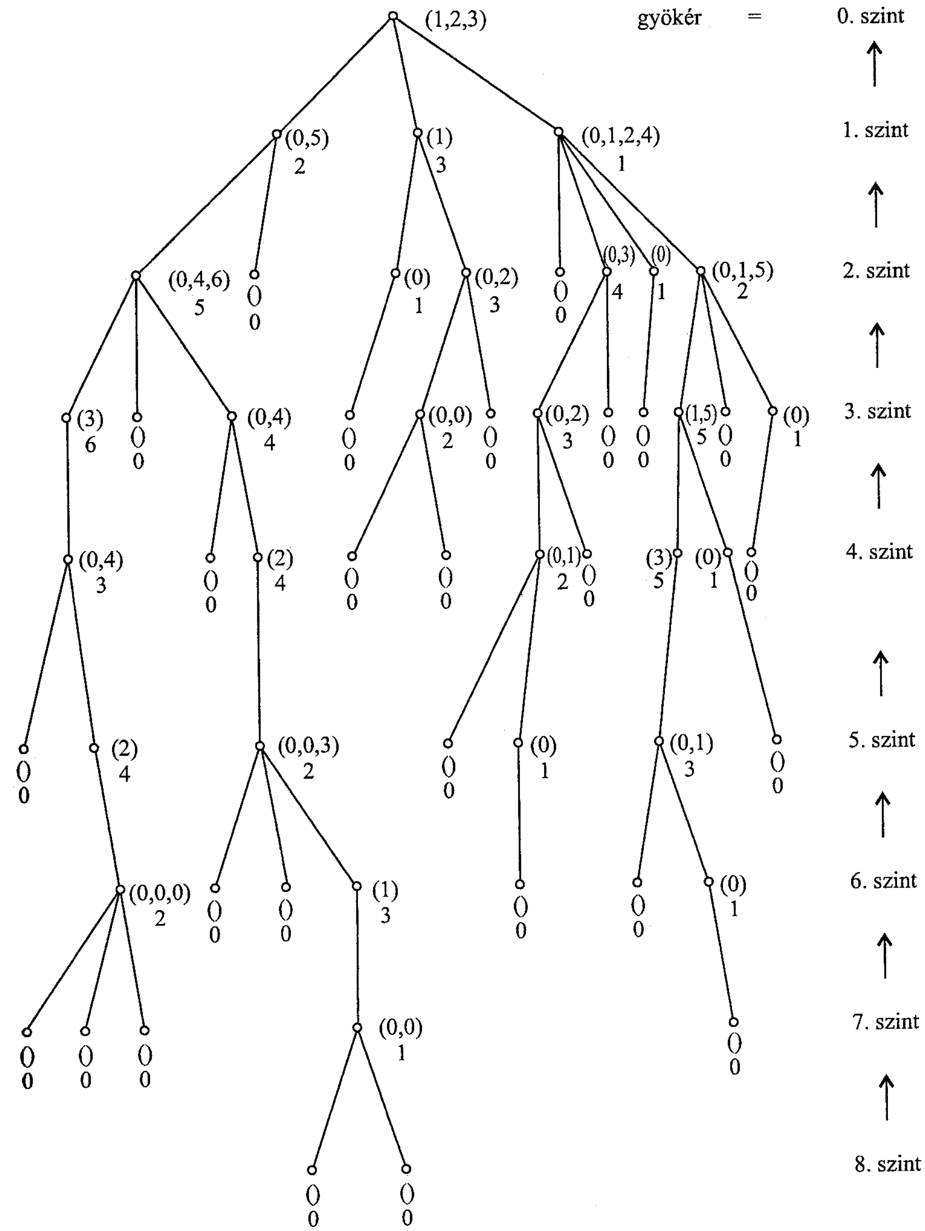
8.21. Vödör (bucket) algoritmus: *Ha* 1 *és* M *között* ($M \in \mathbb{N}$ *fix) kell* n természetes számot *sorbarendeznünk* $\mathcal{O}(n)$ *időben,* akkor M vödröt előveszünk $1, 2, 3, ..., M$ feliratokkal, az n adatot (input) a megfelelő vödörbe potyogtatjuk, majd a vödröket 1-től M -ig kiolvassuk (maradhatnak üres vödrök is!), és ez $\mathcal{O}(n)$ lépés, hiszen M fix! $\square$

8.20. (ii) A 8.18. algoritmus helyessége a következő észrevételen alapszik (teljes indukcióval bizonyítható $i \leq ht(T)$-re, visszafelé):

"Tetszőleges $x_j \in V_i$, $y_k \in W_i$ *csúcsokra* $l(x_j) = l(y_k)$ *pontosan akkor teljesül, ha az* x_j *és* y_k *csúcsok "alatti" részfák* (*azaz* x_j *illetve* y_k *gyerekeinek, gyerekeinek, gyerekeinek... halmaza mint csúcspontok*) *a* x_j *illetve* y_k *gyökerekkel izomorfak. "*

Vagyis $l(x)$ az $x \in V$ "alatti" részfát (szerkezetét) "kódolja".

(iii) Amennyiben a gráfok $x \in V$ csúcsai már eredetileg egy másik $c_0(x) \in \mathbb{N}$ címkékkel is rendelkeznek (pl. a fa- szerkezetű molekulák atomjainak típusa - ld. a 8.5. Definícióban), és csak azonos címkéjű csúcsokat feleltethet meg az izomorfizmus, akkor mindössze a fenti algoritmusban az $l(x)$ sorozat elejére írjuk a $c_0(x)$ címkét!



Csúcsok címkézése

8.3. ábra

8.4. Feladat

8.1. Feladat: Tekintsünk egy gyökereztetett fát. Határozzuk meg az i -edik és j -edik szinteken levő csúcsok közötti legrövidebb út hosszát, valamint (ez alapján) a gráf **szélességét** (**width**) (:=leghosszabb útjának hosszát) pontosan!

8.5. Megoldás

8.1. Feladat:. Legyen $a \in V_i$, $b \in V_j$ és $i \leq j$. Ha b közvetlen leszármazottja a -nak, akkor nyilván $d(a, b) = j - i$. Ha nem, akkor legyen $k < i$ a legnagyobb olyan index, amely szinten létezik a és b -nek közös őse, és ekkor

$$d(a, b) = i - k + j - k = i + j - 2k \quad .$$

A gráf szélessége (egy rögzített gyökereztetés esetén) nyilvánvalóan a levelek távolságainak maximuma:

$$d(G) = \max\{d(a, b) : a, b \in V \ \textit{levelek}\ \} \quad .$$

8.6. Hivatkozás

[AHU] Aho,A.V.,Hopcroft,J.E.,Ullman,J.D: *Számítógépalgoritmusok tervezése és analízise,* Műszaki Kiadó, Bp., 1982

9. fejezet

Síkgráfok

Gráfok síkbateríthetősége: definíció, Jordan tétele. Pontdiszjunkt utak, redukálhatóság, Kuratowsky és Seymour tételei. Euler I. és II. poliédertételei, következmények. K_5 és $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. Fullerének. Felületekre rajzolható gráfok, az Euler- karakterisztika. Térképszínezések.

9.1. Definíciók és Kuratowsky tétele

Gráfjainkat papíron (a síkon) szoktuk ábrázolni pontokkal (a gráf csúcsai) és vonalakkal (az élek). Már eddig is igyekeztünk olyan rajzokat készíteni, amikoris a vonalak csak a gráf csúcsaiban metszik egymást, ami vagy sikerült vagy nem.

A precíz definíciókat a *vonal* meghatározásával kell kezdenünk. Iskolai tapasztalataink szerint mindössze ceruzánkat kell felemelés és rángatás nélkül, folytonosan végighúzni a kezdőpontból a végpontba. Analízis órán ugyan az *ív* általában egy $f : I \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény értékkészlete volt, $I \subset \mathbb{R}$ egy véges zárt intervallum, de az *ív* csak egy speciális *görbe* (*vonal*).

A görbe precíz matematikai definícióját könyvünkben nem ismertetjük, a fenti két megközelítés mindegyike elfogadható számunkra. Mindössze csak Jordan híres tételét említjük meg (annak nehéz bizonyítás nélkül) annak szemléltetésére, hogy a görbék precíz elméletében a még szemléletesen triviálisnak tűnő állítások igazolása is nehéz feladat.

9.1. Tétel (Jordan)**:** *Tetszőleges zárt görbe a síkot két részre bontja (a görbe* külsejére *és* belsejére*).* $\square$

A síkbateríthetőség definíciója nem túl nehéz, bárki kitalálhatja.

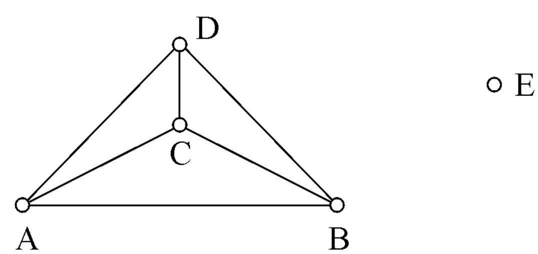
9.2. Definíció: *Egy tetszőleges* $G = (V, E)$ *gráf* **síkba teríthető/ rajzolható** *vagy* **síkbeli** (**planar**) *ha léteznek olyan* injektív $f : V \to \mathbb{R}^2$ *és* $g : E \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *függvények amelyekre* egyrészt $e = \{x, y\}$ *esetén* $g(e)$ *egy tetszőleges, az* $f(x)$ *és* $f(y)$ *pontokat összekötő ív,* másrészt *az éleknek megfelelő ívek csak a közös végpontjaikban metszik egymást.* □

Természetesen merül fel a kérdés: milyen gráfok rajzolhatók illetve nem rajzolhatók síkba? Jordan 9.1. tételével igazolható[1] az alábbi eredmény:

9.3. Állítás: *A* K_5 *és* $K_{3,3}$ *gráfok*[2] nem *rajzolhatók síkba.*

Bizonyítás: Most csak K_5 -ről mutatjuk meg, hogy nem rajzolható síkba, a $K_{3,3}$ -ra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

Jelöljük K_5 csúcsait A,B,...,E betűkkel. Tegyük fel, hogy az A, B, C, D pontokat és a közöttük futó éleket már ábrázoltuk (ebben a sorrendben) a síkban úgy, hogy az éleknek nincs a csúcsoktól különböző metszéspontja. Ekkor a Jordan - Tétel miatt az ABCD négyszög AC és BD átlói közül az egyik az ABCD négyszög belsejében, a másik pedig a négyszögön kívül fekszik. Úgy választhatjuk meg a jelöléseket, hogy AC belül míg BD kívül legyen.



K_5 nem síkbeli
9.1. ábra

Belátjuk most, hogy ha az E pont bárhol is fekszik a síkban, az EA, EB, EC, ED élek valamelyike szükségképpen metszi a már berajzolt élek valamelyikét.

[1] a bizonyítás sok (régebbi) gráfelméleti könyvben megtalálható, például [H] .

[2] A $K_{3,3}$ gráf síkba rajzolásának problémáját szokás "*három ház három kút*" problémának nevezni: három épület mindegyikébe kell három energiaforrás mindegyikétől vezetéket létesíteni anélkül, hogy a vezetékek egymást keresztezné.

Ha E az ABD háromszögön kívül fekszik, akkor az EC él a Jordan - Tétel miatt metszi az ABD háromszöget, vagyis valamelyik oldalát, azaz valamelyik élt.

Hasonlóan látható be, hogy ha E az ABC, BDC, ACD háromszögek valamelyikén *belül* fekszik, akkor a háromszögön kívül fekvő negyedik ponttal (A,B,C,D közül) nem lehet az E pontot összekötni. □

A fenti eredményt később Euler I. poliédertételéből, pontosabban annak következményeiből is be lehet bizonyítani, egy rövid számolással a 9.22. Állításban. Mivel az Euler Tétel és következményei a fenti eredményt *nem* használják fel, így a 9.22. Állítással teljes mértékben lehet helyettesíteni a fenti Tételt. Mi csak a teljesség miatt mutattuk meg a fenti bizonyítást.

Más nincs? Mármint olyan gráf, amely nem rajzolható síkba? Miért éppen ezt a két gráfot emeltük ki? Fontosságukat Kuratowsky 1930-ból származó 9.6.Tétele adja meg, előtte azonban két elnevezést (pontosabban gráfegyszerűsítési eljárást) kell megismernünk. Mindkét fogalom az adott gráfnak a síkba teríthetősége szempontjából lényegtelen részeit (másodfokú csúcsok, felesleges élek) hagyja el.

9.4. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ha $v \in V$ egy tetszőleges* másodfokú *csúcs, akkor a* **v csúcs megszüntetésé***vel vagy* **éllel való helyettesítésé***vel kapott* $\mathbf{G}' := (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ *gráf, a G* **gráf redukáltja** *a következő. Legyen a v csúcsra illeszkedő két él $\{a, v\}$ és $\{b, v\}$. Ekkor legyen*

$$V' := V \setminus \{v\} \quad \text{és} \quad E' := E \setminus \{\{a, v\}, \{b, v\}\} \cup \{\{a, b\}\} \ , \tag{9.1}$$

azaz a gráfból a v csúcs elhagyásakor a rá illeszkedő két élt helyettesítjük egyetlen éllel.

Általában, ha a $G = (V, E)$ gráfból több másodfokú csúcsot hagyunk el a fenti módon, akkor a kapott $G" = (V", E")$ gráfot is *a G* **gráf redukáltjá** **-***nak hívjuk.*

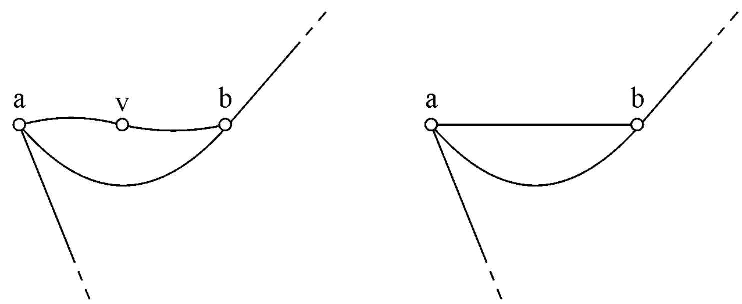
A redukció megfordítását (amikor is a G' gráfból kapjuk vissza a G gráfot), vagyis amikor egy élre "ültetünk" egy új, másodfokú csúcsot, az $\{a, b\}$ **él felosztásának** (**subdivision**) *nevezzük.*

A H gráf **topologikus részgráf** *-ja a G gráfnak, jelben*

$$H \dashv G$$

ha G -nek van egy olyan részgráfja, ami H -nak egy felosztásával izomorf, más szóval: H megkapható G -ből élek és csúcsok elhagyásával valamint másodfokú csúcsok élekkel történő helyettesítésével. □

Az alábbi ábrán szemléltetjük a gráfok redukcióját másodfokú csúcs elhagyásával.



Redukció és él felosztása
9.2. ábra

A (9.1) kifejezésben kénytelenek vagyunk dupla kapcsos zárójeleket használni, hiszen E élek *halmaza.*

Másodfokú csúcs több is lehet egy gráfban, de mindegy, hogy mely éleken, hiszen, mint említettük, a gráf síkbarajzolhatóságát egyik sem befolyásolja. Ez a gondolat fogalmazódik meg az alábi definícióban.

9.5. Definíció: *Két tetszőleges G és H gráfot* **homeomorf**[3]*nak nevezünk, ha másodfokú csúcsok megszüntetéseinek sorozatával mindkettő ugyanarra az M gráfra redukálható (véges sok lépésben).*

Másként fogalmazva: G és H homeomorf, ha létezik egy olyan M gráf, melyből éleinek ismételt felosztásainak sorozatával G és H mindkettő (különkülön) megkapható. □

Könnyen belátható, hogy a homeomorfia reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalencia reláció.

Az alábbi Tétel a síkbarajzolhatóság elméletének alapja.

---

[3] *homeo morf* = hasonló alakú (görög), elsősorban a topológiában és halmazelméletben használják hasonló (de nem teljesen azonos) felépítésű terek, felületek, stb. közötti kapcsolat leírására.

homo morf = "egybe csengő" alakú (szintén görög), jelentése szerint átmenet a hasonlóság és azonosság között. Lényegesebb különbség azonban, hogy elsősorban az (absztrakt) algebrában jelölik az azonos *típusú* struktúrák közötti kapcsolatokat.

Ne keverjük össze e két fogalom használatát!

9.6. Tétel (Kuratowsky[(4),(5)],1930)**:** *Egy tetszőleges G gráf* pontosan akkor *teríthető síkba* ha *nem tartalmaz K_5 vagy $K_{3,3}$-al homeomorf részgráfot.* $\square$

A Tétel azt mondja, hogy a gráfból élek és csúcsok elhagyásával valamint másodfokú csúcsok éllel történő helyettesítésével nem szabad kapnunk sem K_5 sem $K_{3,3}$ gráfot. Vagy fordítva fogalmazva: sem a K_5 sem a $K_{3,3}$ gráfból nem kaphatjuk meg a gráfot élek felosztásával, akár több lépésben sem.

A tétel bizonyítása megtalálható például Hajnal Péter [$HaPé,'$ 97/3] könyvének 243-246 oldalain.

Gyakorlati alkalmazásoknál azonban másodfokú csúcsok helyettesítésével nehéz eldönteni, legalábbis szemlélettel, hogy egy tetszőleges G gráf tartalmaz -e egy adott H gráffal homeomorf részgráfot. Ezt a következőképpen tudjuk elképzelni (a precíz bizonyítást most nem részletezzük).

9.7. Állítás: *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor tartalmaz egy adott $H = (W, F)$ gráffal homeomorf részgráfot, ha léteznek olyan*

$$f : W \to V \quad \textit{és} \quad g : F \to \mathcal{P}(E)$$

injektív függvények, amelyekre $g(e)$ egy, az $f(x)$ és $f(y)$ csúcsokat összekötő egyszerű út minden $e = \{x, y\} \in E$ él esetén, és a $g(e)$ $(e \in E)$ utak végpontjaik kivételével páronként pontdiszjunktak. $\square$

A fenti állítás által megfogalmazott átfogalmazás alapján már könnyen megfogalmazhatjuk Kuratowsky tételét egyszerű szemléletes módon, nem csak kisméretű feladatok papíron ceruzával való megoldásához, hanem polinomiális gyorsaságú algoritmusok készítéséhez is.

9.8. Tétel (a 9.6. Tétel változata): *Egy tetszőleges G gráf* pontosan akkor *teríthető síkba ha nem található benne*
- sem öt csúcs azokat páronként összekötő (páronként) csúcsdiszjunkt utakkal,
- sem három piros és három kék csúcs kilenc, mindegyik piros csúcsot mindegyik kék csúccsal összekötő, páronként csúcsdiszjunkt utakkal. $\square$

A 9.6. Tétel (vagy 9.8.változata) állításának fele, azaz a K_5 és $K_{3,3}$ **tiltott részgráfok** kizárása nyilvánvaló, hiszen ha már megmutattuk, hogy K_5 és $K_{3,3}$ nem rajzolhatók síkba, akkor nyilvánvalóan az őket "tartalmazó" gráfok

---

[4)] Kazimierz Kuratowsky (1896-1980) lengyel matematikus. Halmazelmélettel és topológiával foglalkozott, Banach és Ulam munkatársa volt a Lwow -i Műegyetemen.Több mint 180 dolgozatot (cikket) és 3 könyvet írt. .

[5)] a Tételt Kuratowsky-val egyidőben, de tőle függetlenül Frink és Smith is felfedezték 1930-ban, de Kuratowsky dolgozata jelent meg először nyomtatásban, ezért is nevezik e tételt általában (csak) "Kuratowsky Tételé" -nek.

sem. (A tartalmazást a homeomorfia, illetve a pontdiszjunkt utak reprezentációja jelenti.) Kuratowsky és felfedezőtársainak érdeme, hogy a síkbarajzolhatóság *elégséges* feltételét[6] megadták és bizonyították.

A másodfokú csúcsok (és az őket összekötő élek) helyettesítése egyetlen éllel szemléletes konstrukció, és segítségével a síkbarajzolhatóság feltételeit kielégítően le tudtuk írni. Azonban ez a művelet egy sokkal általánosabb konstrukció speciális esete, amivel szintén le lehet írni a síkbateríthető gráfokat, érdemes tehát vele is megismerkednünk.

9.9. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, $e = \{x, y, \} \in E$ egy tetszőleges éle. Az e* **él összehúzásá***val (vagyis x, y* **végpontjainak összeragasztásá***val) kapott gráf, G/e a következő:*

$$G/e := (V^e, E^e)$$

ahol

$$V^e := V \backslash \{x, y\} \cup \{v^e\} \tag{9.2}$$

valamely $v^e \notin V$ új csúcsra, és

$$\begin{aligned} E^e \quad : \quad &= E \backslash \{\{x, u\} : u \in V\} \backslash \{\{v, y\} : v \in V\} \\ &\cup \{\{v^e, u\} : \{u, x\} \in E \ (u \neq y) \text{vagy } \{u, y\} \in E \ (u \neq x)\} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Tetszőleges G gráf éleinek, csúcsainak elhagyásával és másodfokú csúcsainak éllel helyettesítésével kapott H gráfot a G **gráf minorjá***nak nevezzük, és*

$$H \preceq G$$

jellel jelöljük. $\square$

Gondoljuk meg: valóban az x, y csúcsokat (az $e = \{x, y\}$ élt) vontuk össze a v^e új csúcsba, és ezzel egyidejűleg minden, vagy x vagy y -ban futó élt egy-egy v^e -be futó éllel (másik végpontját változatlanul hagyva) helyettesítünk.

Az is nyilvánvaló, hogy a 9.4. Definícióban megismert, másodfokú csúcs helyettesítése éllel konstrukció speciális esete a fenti ”élek összehúzásá” -nak: a másodfokú csúcsra kapcsolódó két élt húzzuk össze.

A *részgráf* ($\leq$)*, feszített részgráf* ($\subseteq$), *topologikus részgráf* ($\dashv$) és a *minor* ($\preceq$) részstruktúra-típusok között az alábbi kapcsolat áll fenn:

---

[6] vagyis a tiltott részgráfok halmazának, $\{K_5, K_{3,3}\}$ -nak *teljességét*

9.10. Állítás: *Tetszőleges H, G gráfokra*

$$H \leq G \quad \Rightarrow \quad H \subseteq G \quad \Rightarrow \quad H \dashv G \quad \Rightarrow \quad H \preceq G \quad . \qquad \square$$

Kuratowsky tétele is könnyen átfogalmazható gráfok minorjaira:

9.11. Tétel (Kuratowsky, 1930)**:** *Egy tetszőleges gráf pontosan akkor síkba teríthető, ha sem K_5 sem $K_{3,3}$ nem minorja.* $\square$

A fenti eredmények és reprezentáció alapján először ugyan csak exponenciálisan lassú algoritmust tudunk adni gráfok síkbateríthetőségére. Először 1963-ban Tutte adott polinomiális, majd 1974-ben Hopcroft és Tarjan lineáris idejű algoritmust a síkbateríthetőség problémájára. Az algoritmus rövid leírása megtalálható Recski András [$ReAn,'89$] könyvében, a 88. és 376. oldalakon.

Az alábbiakban csak röviden említünk meg néhány, a gráfok síkbateríthetőségéhez kapcsolódó néhány egyszerűbb eredményt és problémát. Az érdeklődők Recski András [$ReAn,'89$] és Hajnal Péter [$HaPé,'97/3$] könyveiben találhatnak további részleteket.

9.12. Tétel (Wagner[7),8)] 1936, **Fáry**[9)] 1948): *Ha G egy egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbeli ábrázolása is, amikor minden élt egy* egyenes szakasszal *rajzoltunk le.* $\square$

A fenti ábrázolásnál a gráf rajza nagyon elnyúlt lehet. A "*VLSI*" (*very large scale integration*) elnevezésű probléma a gráfok minimális területű síkrészre való rajzolásának lehetőségeit, korlátait vizsgálja.

Vizsgálják még a nem síkbateríthető gráfok síkba rajzolásaikor az élek metszéspontjainak minimális számát is (**crossing number / metszési száma**). Gráfok **vastagsága** (**thickness**) a legkisebb olyan $k \in N$ természetes szám, hogy G élei lefedhetők k síkbeli gráffal (**réteg, szint, level**), ezekről például Rosen [$RoKe,'91$] könyvében olvashatunk (486.oldal).

Egy gráfot **külső síkbeli** -nek (**outerplanar**) hívunk, ha úgy teríthető síkba, hogy összes csúcsa a rajz legszélén, a külső (végtelen) részén legyen.

---

7) Klaus Wagner (1910-2000) német matematikus

8) a tételt függetlenül még **Sherman Kopald Stein** (1926-) amerikai matematikus is felfedezte 1951-ben

9) Fáry István (1922-1984) magyar származású amerikai matematikus.

9.1.1. Egyéb felületek

Felmerül a kérdés: más felületekre milyen gráfokat lehet ill. nem lehet rajzolni? (A "felület" szintén egy bonyolult topológiai fogalom, ezt sem definiáljuk most.)

Ha az $\mathcal{F}$ felületnek van egy (véges) síkbeli tartománnyal homeomorf (azaz megegyező) része, mint például a gömbnek, tórusznak ("úszógumi"), Möbius[10] szalagnak, Klein[11] -palacknak, akkor persze minden síkba rajzolt gráf az $\mathcal{F}$ felületre is rajzolható, hiszen gráfjaink végesek, és rajzunk mérete tetszőleges méretűre kicsinyíthető.

A **Möbius - szalag** nem más, mint egy (papír-) szalag, de mielőtt két végét összeragasztanánk "hengerpalásttá", egyik végét 180^o -al megcsavarjuk. A kapott felületnek nem lesz "külseje" és "belseje", egyetlen ecsetvonással befesthetjük "mindkét" oldalát. Kedvenc K_5 és $K_{3,3}$ gráfjainkat is rárajzolhatjuk, a megoldás például Recski $[ReAn,'89]$ könyvének 367. oldalán található.

Így tehát inkább azt kérdezzük, mely gráfok rajzolhatók ill. nem rajzolhatók bizonyos felületekre. Az alábbiakban csak a legismertebb felületekről sorolunk fel röviden néhány egyszerű és meglepő állítást .

9.13.Állítás: *Egy tetszőleges G gráf pontosan akkor rajzolható gömbre ha síkba rajzolható.*

Bizonyítás: Mint említettük, minden síkra rajzolható gráf egyúttal gömbre is rajzolható.

Legyen tehát a gömbre, vagyis a gumilabdára rajzolva egy gráf. Ekkor a gumilabdát kilyukaszthatjuk egy tetszőleges olyan pontján, ahol a rajz nem megy keresztül, és a lyukba belenyúlva óvatosan, szakítás és ragasztás nélkül (mint általában a topológiában szokás), kiterítjük a labdát a sík asztallapra.

Bár a fenti gondolatmenet teljes, precíz változata a *sztereografikus projekció.* Érintse a gömb a síkot egy S pontban[12] és legyen N a gömb S -el átellenes pontja (S=Déli sarok és N=Északi sarok). Úgy válasszuk meg a gömb és a sík kölcsönös helyzetét, hogy az N pont ne legyen pontja a gömbre rajzolt gráf rajzának.

Ekkor a gömb felületét, pontosabban N -től különböző pontjait a következő

---

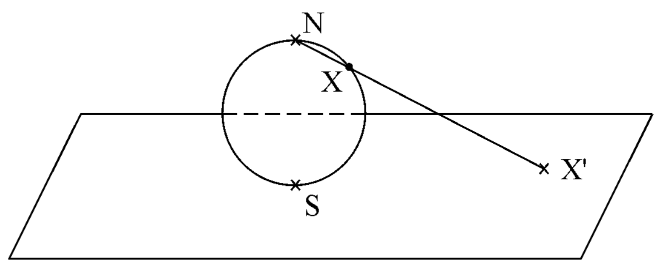
10) August Ferdinand Moebius (1790-1868) szász (német) matematikus, csillagász és fizikus. A szalagot Johann Benedict Listing (1808-1882, német) matematikussal közösen 1862-65 között írt cikkeikben említik először.

11) Felix Christian Klein (1849-1925) kimagasló német matematikus.

12) tegyük le e labdát az asztalra

módon képezzük le a síkra. Ha X a gömbfelület egy tetszőleges, N-től különböző pontja, akkor X' legyen az NX egyenes és a sík metszéspontja.

Belátható, hogy ez a leképezés folytonos, kölcsönösen egy-egy értelmű (azaz injekció) és görbék képe is görbe, vagyis a gömbre rajzolt gráf rajzának képe a gráf egy síkba rajzolását adja. □

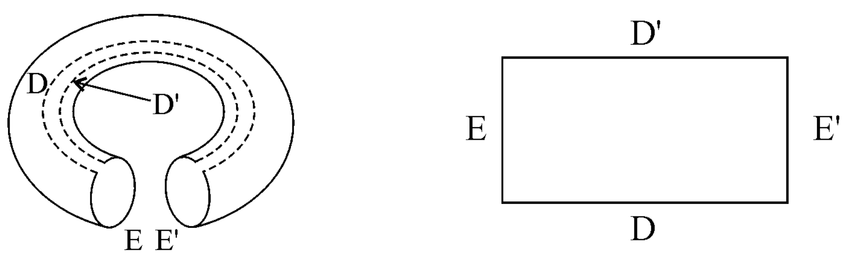


9.3. ábra: *Sztereografikus projekció*

Mint tudjuk, minden síkra rajzolható gráf felrajzolható tóruszra (úszógumi) és Möbius- szalagra is, mivel ezek a felületek is tartalmaznak a sík egy nyílt környezetével[13] homeomorf részt.

Másrészt, könnyen rajzolhatunk sok olyan gráfot e két felületre, amiket síkba nem lehetséges.

Ha például a tóruszra szeretnénk rajzolni valamit (gráfot, térképet, stb.), akkor az úszógumit (tóruszt) érdemes először keresztülvágnunk egy kör mentén, majd az így kapott csövet hosszában felvágva felületét egy téglalappá teríthetjük ki.

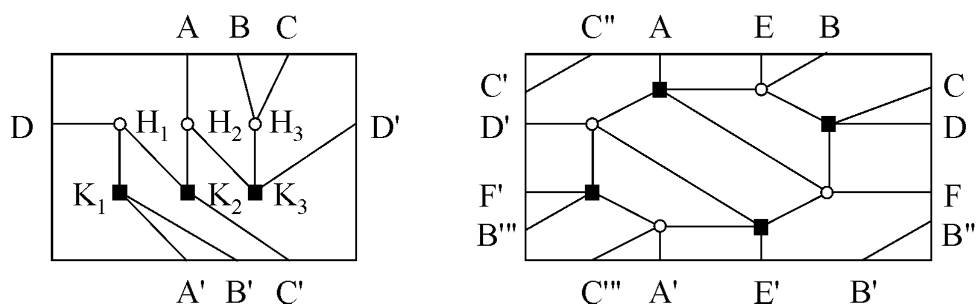


9.4. ábra: *A tórusz és a téglalap*

[13] köralakú papírlap

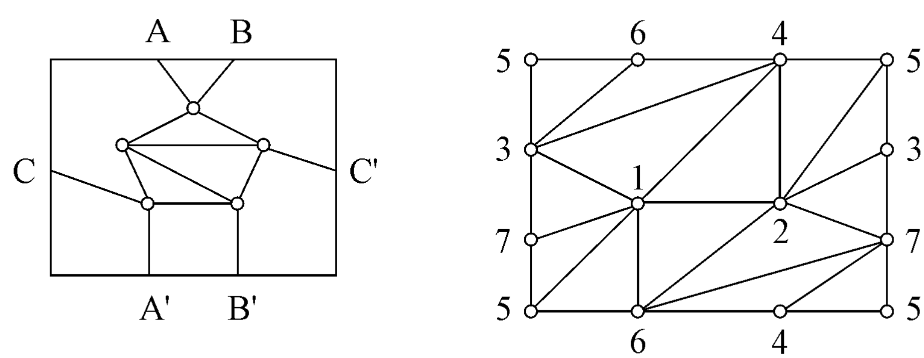
Vagy megfordítva: ábránkat egy téglalap alakú papír (vagy inkább gumi) lapra rajzoljuk, majd a lapot összehajtva egy hengert kapunk, a henger két végét összeragasztva pedig tóruszt. Eközben a téglalap párhuzamos oldalainak megfelelő pontjai egybeesnek, mind a vízszintes mind a függőleges oldalpárok esetén. Vagyis a téglalap egyik oldaláig húzott vonal a szemközti oldalon ismét felbukkan, folytatható a téglalap belsejébe. Így érhetjük el, hogy a síkbeli ábrán egymást keresztező vonalak (élek) egymást kikerüljék.

Az alábbi ábrán például a $K_{3,3}$ sőt $K_{4,4}$ gráfokat rajzoltuk fel a tóruszra, a gráfok csúcsait (a két komponenst) üres és teli körökkel jelöltük. A téglalap egyik élén átlépő és a másik párhuzamos élen folytatódó, vagyis a téglalap tórusszá ragasztásakor összekapcsolódó vonalakat azonos betűkkel jelöltük. Például a C pontban véget érő szakasz a C' pontban folytatódik a C'' pontig, majd a C''' ponton keresztül folytatódik. (Tulajdonképpen a C és C' pontokat azonosítjuk, a C'' és C''' pontokat úgyszintén, amikor a téglalapot összehajtjuk tórusszá.)



9.5. ábra: *$K_{3,3}$ és $K_{4,4}$ a tóruszon*

$K_{5,5}$ már nem rajzolható fel a tóruszra sem, de K_5 már igen, sőt K_7 is:



9.6. ábra: *K_5 és K_7 a tóruszon*

Sikerült meghatározni általában *tetszőleges* felületekre rajzolható gráfok karakterizációját, bár szinte csak a lehetőségben lehetünk biztosak:

9.14. Tétel: *Tetszőleges T topologikus tér*[14] *esetén a T -re* nem *rajzolható gráfok halmazának véges sok, a* minor ($\preceq$) *részbenrendezésre nézve minimális eleme van.* $\square$

A Tétel szerint igaz Kuratowsky tételének alábbi általánosítása tetszőleges felületre:

9.15. Tétel: *Tetszőleges T felület esetén létezik* véges sok *olyan "tiltott" gráf, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor rajzolható a T felületre ha egyik tiltott gráfot sem tartalmazza minorként.* $\square$

A 9.14. Tétel következik az alábbi (nagyon mély) összefüggésből:

9.16. Tétel (Seymour[15], Robertson[16])**:** *Gráfok tetszőleges, végtelen halmazában van két elem, melyek a $\preceq$* (minor) *részben rendezésre nézve összehasonlíthatóak.* $\square$

A tiltott részgráfok pontos listáját eddig csak az (Euklideszi) síkra és a projektív síkra (és a gömbre) ismerjük.

További érdekes topológiai felületeket és tulajdonságaikat a $[BJ]$, $[Sz]$ és $[P]$ elemi bevezető topológiai könyvekben találhatunk. A gráfokkal való kapcsolatukat $[Sz]$ elemzi részletesen.

9.2. Euler poliédertétele

Az alábbi tételt Euler eredetileg csak poliéderhálókra (síklapokkal határolt térbeli testek, poliéderek élgráfjára) mondta ki 1752-ben. A teljesség miatt ismertetjük a poliéderhálók absztrakt definícióját:

9.17. Definíció: *Egy tetszőleges síkba rajzolt egyszerű, összefüggő G gráfot* **poliéder-** *vagy* **poligonháló** *-nak mondunk, ha ábrája úgy készíthető, hogy valamely önmagát nem metsző zárt poligont (sokszöget) kisebb poligonokra darabolunk szét úgy, hogy ha két poligonnak van legalább két közös pontja, akkor van közös éle, és a közös élek (összefüggő) utat alkotnak.* $\square$

Azonban az (9.4) összefüggés *tetszőleges* összefüggő egyszerű síkgráfra igaz, ezért mi ebben az általánosabb formában mondjuk ki.

---

[14] kezdőknek: "*felület*" .

[15] **Paul D. Seymour** (1950-) angol-amerikai matematikus

[16] **George Neil Robertson** (1938-) kanadai matematikus

Ekkor azonban kicsit meg kell gondolnunk a *lap* topológiai fogalmát, aminek precíz definiálása, a *görbe* fogalmához hasonlóan, elég bonyolult lenne. Mivel Jordan 9.1. Tétele szerint minden folytonos zárt[17] görbe a síkot két részre (tartományra) osztja, melyek a körlappal (topológiailag) *homeomorfak*, azaz a tartományokat gumiból kivágva vágás és ragasztás nélkül hajlítgatással, nyújtással, deformálással körlappá lehet alakítani.

9.18. Tétel (Euler I. poliédertétele, 1752) *Legyen G egy tetszőleges* összefüggő*, síkba rajzolható gráf. Ekkor*

$$\ell + c - e = 2 \tag{9.4}$$

ahol c és e a gráf csúcsainak ill. éleinek száma, míg ℓ a G gráf síkba terítése után keletkezett lapok *száma.*

Ne feledjük, hogy a gráf síkbaterítésekor a gráfon ”kívüli” végtelen tartományt is egy lapnak kell számolnunk!

A gráf többszörös- és hurokéleket is tartalmazhat, ezek is körlappal homeomorf lapokat képeznek. A tétel azonban nem összefüggő gráfokra nem igaz, erről bárki könnyen meggyőződhet.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy összefüggő gráf tetszőleges, *körben levő* élét elhagyva a gráf összefüggő marad[18]. Minden ilyen él pontosan két lapot határol, így elhagyásakor a két lap egybefolyik, vagyis a lapok száma is pontosan 1 -gyel csökken, mint az élek száma. A csúcsok száma természetesen nem változik.

Ha a körben levő élek elhagyását a fenti módon addig ismételjük, míg gráfunk körmentes nem lesz, akkor egyetlen síkrész azaz lap marad, vagyis $\ell - 1$ -szer hagytunk el élt. Ezek szerint a megmaradt gráfnak $e - (\ell - 1)$ éle lesz, és az eredeti c csúcs. Mivel a megmaradt gráf (még mindig) összefüggő és (már) körmentes, vagyis fa, így élei és csúcsai között az

$$c - 1 = e'$$

összefüggés áll fenn. Mindkét oldalhoz $\ell - 1$ -et adva a

$$c + \ell - 2 = e$$

azaz a bizonyítandó (9.4) egyenlőséget kapjuk. □

[17] ezt is pontosan definiálnunk kellene

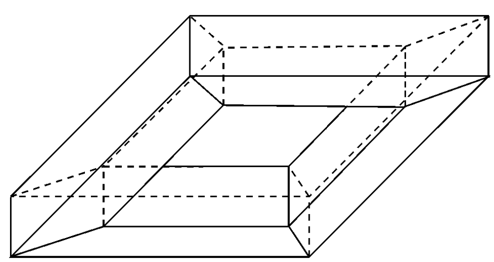
[18] lásd az 1.34. Állítást az 1. ”Gráfelméleti alapfogalmak” c. fejezetben.

9.19. Megjegyzések: A tétel (9.4) összefüggése szerint a *lapok száma (ℓ)* nem függ a gráf síkba terítésének módjától.

Euler fenti tételében a gráfnak nem kell egyszerűnek lennie, többszörös vagy hurokélek is lapokat határolnak, de a gráf összefüggősége lényeges. Ezzel szemben az alábbi következményekben (9.20-22) csak *egyszerű* gráfok jöhetnek szóba, amik már nem kötelezően összefüggőek!

Gömbre rajzolt gráfokra is teljesül a (9.4) összefüggés, a fenti bizonyítás módosítás nélkül is helyes gömbre rajzolt gráfokra is. Euler eredeti tétele is konvex, vagy általánosabban, gömbbel homeomorf (gömbbé felfújható) poliéderekre[19] szól.

Azonban *tóruszra* rajzolt gráfokra az $\ell + c - e = 0$ összefüggés igaz, ezt például a tóruszra rajzolt képkeret (más szóval a képkeretté deformált tórusz) mutatja a legjobban:



9.7. ábra: *Tórusz mint képkeret*

Mint a 3.3.ábrán (3.Fejezet) látható, a H_4 kockagráf a "képkeret" felület élgráfja, szintén a tóruszra rajzolható, csak a lufit kell "felfújnunk". (HF az éleket, lapokat és csúcsokat megszámolni!).

Sőt, tetszőleges (topológiai) felülethez egyértelműen létezik egy σ természetes szám a következő tulajdonsággal: *tetszőleges összefüggő gráfot ha a felületre rajzoltunk, akkor*

$$\ell + c - e = \sigma \ .$$

A fenti σ számot a felület **Euler-** féle **karakterisztikájá**nak nevezzük. *(Nyilván különböző Euler- karakterisztikával rendelkező felületek nem lehetnek topológiailag ekvivalensek, vagyis homeomorfak.)*

[19]) síklapokkal határolt konvex térbeli test. Egy síkidom / térbeli test **konvex,** ha bármely két pontját összekötő (egyenes szakasz) teljes egészében a síkidom/test belsejében halad.

A fentiek alapján a sík Euler karakterisztiája 2; a tóruszé, Möbius - szalagé, kétlyukú gömbbé és hengerpalástė 0; a két lyukkal "ellátott" (véges) papírlapé -1 . Még sok érdekes felületet és Euler -karakterisztikájukat találunk a $[BJ]$, $[P]$, $[Sz]$ bevezető topológiai könyvekben.

9.20. Következmény (i) *Tetszőleges* egyszerű *síkba rajzolható gráf esetén*

$$e \leq 3c - 6 \ . \tag{9.5}$$

(ii) *Tetszőleges* egyszerű *síkba rajzolható* páros *gráf esetén*

$$e \leq 2c - 4 \ . \tag{9.6}$$

(iii) *Tetszőleges* egyszerű *síkba rajzolható gráf esetén, ha g jelöli a gráf legrövidebb körének hosszát (a gráf* **derékbőségét** (**girth**)*) akkor*

$$e \leq \frac{g}{g-2}(c-2) \ . \tag{9.7}$$

Bizonyítás: A gráf komponenseire külön-külön igazoljuk a fenti becsléseket, majd az egyenlőtlenségeket (a gráf komponenseire) összeadva az egész gráf éleinek számára kapjuk meg a megfelelő becslést.

(i) az egyszerűség miatt minden lapot legalább 3 él határol, minden él két lapnál van figyelembe véve, így

$$e \geq \frac{3}{2}\ell \tag{9.8}$$

amit az (9.4) összefüggésbe beírva megkapjuk (9.5) -et.

(ii) A gráf egyszerűsége és párossága miatt minden kör legalább 4 hosszú, vagyis a (9.8) összefüggés helyett a

$$e \geq \frac{4}{2}\ell$$

becslést kell alkalmaznunk.

(iii) $g > 2$ mert a gráf egyszerű, továbbá a derékbőség (g) definíciója miatt, a fenti becslések mintájára

$$e \geq \frac{g}{2}\ell$$

amit az (9.4) összefüggésbe beírva a (9.7) becslést kapjuk. (Ld. még a $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjtemény 19.7 feladatának megoldását.) $\square$

9.21. Megjegyzések: Vagyis síkba rajzolható gráfnak nem lehet sok éle (többszörös élektől eltekintve), amit ugyan szemléletünk már eddig is sugallt, de a pontos felső becslést a fenti Állításokban számítottunk ki.

Egyik becslés sem fordítható meg, azaz a 9.2. Következmény bármelyik feltételének teljesülése esetén sem mondhatjuk hogy a gráf síkba rajzolható. Ellenpéldát mindenki egyszerűen találhat (HF).

9.22. Állítás: *K_5 és $K_{3,3}$ nem síkba rajzolható gráfok.*

Bizonyítás: A 9.20. (i) Állítás (9.5) feltételével könnyen igazolható hogy K_5 nem síkba rajzolható, hiszen K_5 esetén $e = 10$, $c = 5$ és $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. De $\mathrm{K}_{3,3}$ mutatja, hogy (i) nem elégséges feltétele a síkbarajzolhatóságnak, hiszen $\mathrm{K}_{3,3}$ esetén $e = 9$, $c = 6$ és teljesül a $9 \leq 3 \cdot 6 - 6$ egyenlőtlenség.

Azonban $\mathrm{K}_{3,3}$ páros gráf, és így a 9.20.(ii) Állítás segítségével kimutathatjuk hogy $\mathrm{K}_{3,3}$ nem síkbeli: $e = 9$, $c = 6$ és $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$. □

Euler poliédertételének rengeteg elméleti és gyakorlati következménye van, mi csak a legfontosabbakat említjük meg.

9.23. Tétel (Euler II. poliédertétele) *Legyen G egy tetszőleges véges összefüggő 3 -reguláris*[20] *síkba rajzolható hurokmentes gráf, amelynek minden éle a G gráf egy körében*[21],[22] *van, és jelölje n_i az i -oldalú lapok számát $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ esetén. Ekkor teljesül az alábbi összefüggés:*

$$\sum_{i=2}^{\infty} (6 - i) \cdot n_i = 12 \ . \tag{9.9}$$

Megjegyzés: A fenti összeg nem végtelen, hiszen a gráf véges, vagyis valamely i_0 -tól kezdve $n_i = 0$ ha $i \geq i_0$.

Bizonyítás: Euler I. poliédertételét fogjuk felhasználni.

Mivel gráfunk 3 -reguláris és nincs hurokél, ezért minden csúcs 3 laphoz tartozik, vagyis

$$c = \frac{1}{3} \sum i \cdot n_i \quad ,$$

és mivel minden él (legalább egy) körben van, vagyis *pontosan* két lap közös határa, így hasonlóan

$$e = \frac{1}{2} \sum i \cdot n_i \quad ,$$

[20] minden csúcs foka pontosan 3
[21] itt persze gráfelméleti körről van szó
[22] azaz G -ben nincs elvágó él

és természetesen

$$\ell = \sum n_i \quad .$$

A fenti egyenlőségeket az (9.4) összefüggésbe beírva éppen a bizonyítandó (9.9) összefüggést kapjuk. $\Box$

9.24. Megjegyzések: Vegyük észre, hogy érdekes módon az (9.9) összefüggés éppen a hatszögek ($i = 6$) számáról nem állít semmit, és mint az alábbi példák mutatják, a hatszögek száma valóban akármennyi is lehet, a gráf többi tulajdonságának változatlanul hagyása mellett.

Hasonlóan bizonyítható az alábbi általánosítás is:

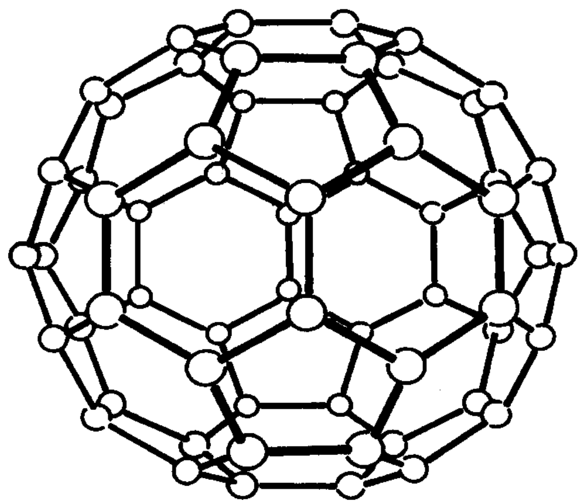
9.25. Tétel: *Legyen G egy tetszőleges véges összefüggő r -reguláris síkba rajzolható hurokmentes gráf, amelynek minden éle a G gráf egy körében van, és jelölje n_i az i -oldalú lapok számát $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ esetén. Ekkor teljesül az alábbi összefüggés*:

$$\sum_{i=2}^{\infty} (2r - (r-2)\,i) \cdot n_i = 4r \ . \quad \Box$$

9.3. Fullerének

A szén (C) harmadik tiszta (csak szénatomból álló) módosulata, a "futball-labda" molekula. Kísérleti vegyészek már 1984-ben észleltek olyan jelenségeket, melyek a szén harmadik stabil módosulatára utaltak, és elméletileg (Euler eredményei[(23)] alapján) le is írták nagy pontossággal a molekulák fizikai, kémiai tulajdonságait. Csak 1990 -ben sikerült kis mennyiségben e molekulákat laboratóriumi körülmények között előállítani, mégis szakmai cikkek egész sora foglalkozik manapság e molekulákkal. Néhány népszerűsítő cikket fejezetünk végén sorolunk fel, a molekula rajzát máris ismertetjük.

[23)] Már Euler maga is részletesen leírta az öt- és hatszögekből felépíthető, a gömböt lehetőleg minnél jobban megközelítő poliéderek tulajdonságait.



A C_{60} *fullerénmolekula*
9.8. ábra

Pontosabban, mi csak a 60 szénatomból álló molekulát rajzoltuk le, de – mint alább részletesen ki is számoljuk – szinte akárhány szénatomból álló molekulák is létezhetnek, sőt kísérletek mutatják, hogy (szinte) minden lehetőség elő is fordul. A többi molekula részletes rajzát $[CS]$ -ben találhatja meg az érdeklődő Olvasó.

Kémiai meggondolások alapján a gráf mindenképpen 3 -reguláris, összefüggő, és minden éle körben van, azaz poliéderháló. Továbbá, minden köre benzolgyűrű, vagyis 5- vagy 6- szög. Alkalmazhatjuk Euler II. poliédertételét, vagyis az 5-szögek száma mindig 12 míg a 6 -szögek száma tetszőleges. (Mint említettük, szinte minden lehetőség előfordul.)

A molekulákat *R.Buckminster Fuller* amerikai építészmérnökről nevezték el, aki az 1967 -es montreáli világkiállításra egy geodezikus, hat- és ötszögekből álló kupolát tervezett. Azonban már a XV. század közepén épült **Topkapi Palota** egyik kapuhomlokzatán is megtaláljuk. Mellesleg a szokásos focilabda is pontosan a C_{60} molekula szerkezetét mutatja.

Részlet a Topkapi Szeráj-*ból* (Forrás: KöMaL)

9.9. ábra

9.4. Térképek

A síkba (gömbre) rajzolt gráfok lapjai (körrel homeomorf tartományok) természetes módon meghatározzák a sík (gömb) egy hézagmentes egyrétű felosztását (lefedését, partícióját). A térkép precíz definíciójától is eltekintünk.

Fordítva is eljárhatunk. ha adott egy (síkbeli) térkép, akkor a térkép **duális gráfja** legyen a következő: a gráf csúcsai legyenek a térkép tartományai (az országok, vagy ízlés szerint fővárosaik), és két országhoz tartozó csúcsot pontosan akkor kössünk össze éllel, ha a két országnak létezik közös határvonala (nem csak egy csúcs).

Gráfok duálisát általában is lehet definiálni, a precíz definíciót Hajnal Péter [$HaPé,'$97/3] könyvében találhatjuk meg, mint annak a tételnek a bizonyítását, hogy egy gráf duálisa akkor és csak akkor létezik ha a gráf síkbateríthető.

Bennünket elsősorban síkbeli térképek és gráfok színezései érdekelnek, amit részletesen a következő fejezetben foglalkozunk részletesen.

9.5. Feladatok

Elsősorban a [$SzIs,'97$] Feladatgyűjtemény megfelelő fejezetét ajánljuk, most álljon itt csak két feladat.

9.1. Feladat: Igazoljuk, hogy ha egy gráfban legfeljebb 4 csúcs fokszáma legalább 3 vagy legfeljebb 5 csúcs fokszáma 3 és a többié legfeljebb 2, akkor a gráf síkbateríthető.

9.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy H_4 - a négydimenziós kockagráf és a Petersen gráf nem síkbarajzolható!

Rajzoljuk fel a fenti gráfokat a tóruszra!

9.6. Megoldások

9.2. Feladat: a) Lásd a [$SzIs,'97$] Feladatgyűjtemény 19.2 és 5. feladatainak megoldását!

b) Lásd. a 9.7. ábrát (képkeret), ez a H_4 kocka.

9.7. Hivatkozások

Gráfelmélet:

[H] Hajnal András: *Gráfelmélet,* Matematika a matematikai osztályok számára, III., Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

Fullerének:

[BB] Beck Mihály, Braun Tibor: *Forradalom a kémiában: a fullerének felfedezése,* Magyar Tudomány, 1992/12, 1415-29.

[CS] Curl,R.F.,Smalley,R.E.: *A fullerének,* Tudomány, 1991/12., 16-25.

[K] Kamarás Katalin: *A természet futball-labdái,* Természet világa, 1992/3.*, 99-101*

[N] Nagy Gyula: *Focilabda,* KöMaL, 1996/6., 268-270.

Topológia:

[BJ] Boltyanszkij,V.G., Jefremovics,V.A.: *Szemléletes topológia,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

[P] Patterson,E.M.: *Topológia,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

[Sz] Szederkényi Antal: *Topológia,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979

10. fejezet

Gráfok színezései

Csúcsszínezések: kromatikus szám, síkgráfok, öt- és négyszín-tételek. Élszínezések. Homogén részgráfok, Ramsey Tétele, a Ramsey számok és becsléseik. Erdős és Szekeres Tételei, következmények.

Gráfok különféle alkalmazásainál nem meglepő, ha az objektumokat (csúcsok) és a közöttük levő kapcsolatokat (élek) valami módon megkülönböztetni vagyunk kénytelenek, ezt a "színezés" (colouring/UK/, coloring/USA/) terminológiával jelöljük[1]. Nem véletlen, hogy a Gráfelmélet egyik legdinamikusabban fejlődő ágáról van szó, azonban könyvünk korlátolt terjedelme miatt csak két legfontosabb területébe pillantunk be: a *csúcsok* színezése esetén a felhasznált színek *minimális* mennyiségét (a gráf *kromatikus* számát), illetve *élek* színezése esetén a páronként azonos kapcsolatban álló elemek halmazának (homogén részhalmazok, baráti társaságok[2]) *méreteit* tanulmányozzuk.

Felhívjuk Olvasóink figyelmét, hogy a definiált fogalmak *végtelen* gráfokra is (kevés kivétellel) változtatás nélkül alkalmazhatók, ezt a Definíciókban külön nem mindig említjük meg. Mint várható, a végtelen gráfokra vonatkozó bizonyítások *más* eszközöket igényelnek mint véges gráfok esetén. Könyvünk szűkös terjedelme ellenére mégis néhány végtelen esetet és állítást közlünk bizonyítással, mert ez esetekben mind az állítások mind a bizonyítások tanulsággal szolgálnak számunkra.

---

[1] Bár itt is lényegében *számozásról (numbering)* van szó, de emlékeztetünk: ez a kifejezés a gráfelméletben mást jelöl.

[2] egy régi latin közmondás szerint *similis simile gaudet* (=*hasonló a hasonlónak örül*)

10.1. Csúcsszínezések

A fejezetben végig, ha mást nem mondunk, $G = (V, E)$ egy *tetszőleges* gráf.

Mint említettük, a csúcsok színezése esetén a lehető legkevesebb színnel szeretnénk gráfokat úgy kiszínezni, hogy éllel összekötött csúcsok színei különbözők legyenek. Síkbeli gráfoknál ez éppen a megfelelő térkép olyan színezését adja, amikor is egymással határos tartományok színei különbözők.

A színek legkevesebb számát a gráf és a térkép *kromatikus számá*nak nevezzük.

10.1.1. Alapfogalmak

10.1. Definíció *Egy tetszőleges* $f : V \to \mathbb{N}$ függvényt **csúcsszínezés***nek* (**vertex coloring**) *nevezünk. A színezés* **k -színezés** *ha* $f : V \to \{1, ..., k\}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *tetszőleges természetes szám*).

Egy $f : V \to \mathbb{N}$ *színezés* **jólszínezés** (**well coloring**), *ha éllel összekötött csúcsok színei különbözőek, azaz*

$$\forall x, y \in V \qquad \{x, y\} \in E \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y) \ . \qquad \square$$

Természetesen hurokélt tartalmazó gráfhoz *nem* lehet jólszínezést készíteni, többszörös élek esetén pedig az élek multiplicitása lényegtelen. Vagyis mostani alfejezetünkben feltehetjük, hogy minden gráf *egyszerű.*

Rögzített $k \in \mathbb{N}$ természetes szám és $f : V \to \{1, ..., k\}$ k *-jól*színezés esetén

$$\{f^{-1}(i) \subseteq V : i = 1, ..., k\}$$

a csúcsok egy olyan partícióját adják, hogy az egyes $f^{-1}(i)$ osztályok élt nem tartalmaznak, így a következő összefüggést kapjuk:

10.2. Állítás: *Tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén egy tetszőleges* G *gráf pontosan akkor* k *-pólusú, ha létezik* k -jól*színezése.* $\square$

10.3. Definíció *Egy tetszőleges (egyszerű)* G *gráf* **kromatikus szám***a* (**chromatic number**), $\chi(G)$ *a* legkisebb *olyan* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám amelyhez létezik a gráfnak* k *-színnel jólszínezése, azaz*

$$\chi(G) \quad := \quad \min \ \{k \in \mathbb{N} \ : \ van \ \ f : V \to \{1, ..., k\} \ \ jólszínezés \ \} \quad .$$

Ha $\chi(G) = k$, *akkor* G *-t* **k -kromatikus gráf***nak nevezzük.* $\square$

Bár idekívánkozik a magyar *színezési szám* fordítás, sajnos ezt (kicsit) más fogalom fordítására használjuk: az alábbi Definícóban szereplő *coloring number* -re.

10.4. Definíció *Egy tetszőleges (egyszerű) G gráf* **k -jólrendez***ése* ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *tetszőleges természetes szám*) *csúcsainak egy olyan*

$$\prec \subseteq V \times V$$

rendezése, *amelyre minden* $v \in V$ *csúcs* k *-nál* kevesebb*, a* $\prec$ *rendezés szerint őt* megelőző *másik csúccsal van összekötve, azaz*

$$\forall v \in V \qquad |\{x \prec v : \{x, v\} \in V\}| < k \quad .$$

A G gráf **színezési száma** (**coloring number**), $\mathbf{col}(\mathbf{G})$ *a legkisebb olyan* $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) *természetes szám, amelyre létezik G -nek k -jólrendezése.* $\Box$

A vizsgára készülő hallgatókat megnyugtatjuk, hogy $\chi(G)$ és $col(G)$ között különbség csak végtelen gráfoknál van (ott kell a *jól*rendezés is), véges gráfoknál e két mennyiség *egybeesik*.

10.5. Állítás: (i) *Tetszőleges (véges vagy végtelen) G gráf esetén*

$$\chi(G) \leq col(G)$$

(ii) *Véges G gráfok esetén*

$$\chi(G) = col(G) \quad .$$

Bizonyítás: (i) G csúcsait a $\prec$ sorbarendezés szerint színezzük indukcióval: legyen $v_1 \prec ... \prec v_n$ esetén v_1 színe tetszőleges, és v_i $(i \leq n)$ színe legyen tetszőleges, a $\prec$ rendezés szerint őt megelőző és vele éllel összekötött csúcsok színeitől különböző szín.

(ii) Most nem bizonyítjuk. $\Box$

Most csak egy általános (nem triviális!) összefüggést közlünk bizonyítás nélkül, további részletek például Hajnal Péter $[HaPé,' 97/3]$ könyvében megtalálhatók.

10.6. Definíció: *Tetszőleges G gráf esetén* $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ *jelölje G csúcsainak* maximális *fokszámát.* $\Box$

10.7. Tétel (Brooks)**:** *Tetszőleges G összefüggő gráfra, ami nem páratlan kör és nem teljes gráf, igaz a következő becslés*:

$$\chi(G) \le D(G) \ . \qquad \square$$

Ne hagyjuk magunkat becsapni: bár *néhány* típusú gráf kromatikus számát nagyon könnyű meghatározni (ld. a Feladatok c. alfejezetben vagy a $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjeményben), de *tetszőleges* gráfok kromatikus számát valójában nagyon nehéz. Sőt, már több évtizede ismert, hogy ez a probléma $\mathcal{NP}$ -teljes! Továbbá, még ha tudjuk is, hogy egy gráf k színnel jól ki is színezhető (vagyis $\chi(G) \le k$), a kromatikus szám $\chi(G)$ *pontos* értékének meghatározása még ekkor is $\mathcal{NP}$ -teljes, a részletekről $[KLS]$ -ben olvashatunk. Azonban a $\chi(G) = 2$ kérdés gyorsan (polinomiális időben) eldönthető a 11.2. Tétel alapján.

A problémakör nagyszámú és szerteágazó eredményeiből csak a síkgráfok közismert problémáját és néhány kedvenc eredményt említünk, a érdeklődő Olvasóknak Hajnal Péter nagyszerű $[HaPé,'97/3]$ könyvét és az érdekességeket összegyűjtő $[HR]$ könyvet ajánljuk. (Néhány egyszerű összefüggést a Feladatok között is megemlítünk.)

10.1.2. Síkgráfok

A térképekről és színezéseikről már az előző fejezetben írtunk, azonban a probléma igazából síkbeli gráfok kromatikus számának meghatározása. A szükséges definíciókat először megismételjük.

10.8. Definíció: *(Síkbeli)* **térkép***nek a sík egészének vagy egy korlátos tartományának*[3] *tetszőleges olyan partícióját*[4] *értjük, amelyben a partíció osztályai szintén tartományok.*

Egy tetszőleges térkép **duális gráfja** *a következő: a gráf csúcsai a térkép tartományai és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel ha azok közös határa egy* nemnulla *hosszúságú ív.*

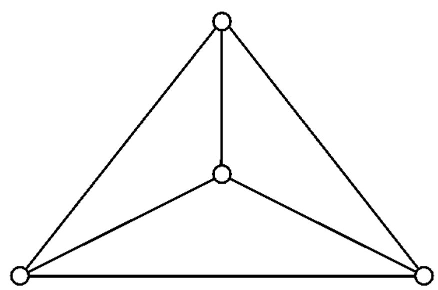
Egy tetszőleges térkép **színezése, kromatikus száma, ...** *megegyezik duális gráfjának színezésével, kromatikus számával, ...* $\square$

---

[3] topológiailag összefüggő halmaz

[4] hézagmentes egyrétű lefedés. Pontosabban: a H halmaz **partíciója** $\{B_i : i \in I\}$ ahol $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \ne j,\ i,j \in I)$ és $\bigcup_{i\in I} B_i = H$.

Nem nagyon kell ecsetelnünk síkbeli gráfok kromatikus számának jelentőségét. Síkgráfok jól színezéséhez általában 3 szín általában nem elég, hiszen a tetraéder élgráfja (K_4) is síkbarajzolható:



a K_4 gráf síkba rajzolva
10.1. ábra

Már az 1800 -as évek közepétől ismert volt, hogy *öt szín elegendő* minden síkbeli gráf jólszínezéséhez, amit többek között Heawood[5] bizonyított be először 1890 -ben, Kempe[6] 1879 -ből származó ötlete segítségével. Az ötszíntétel bizonyítását a következő tételben mutatjuk be.

Négy szín elégségességét is már annak idején is sejtették[7], aminek végére azonban csak 1976 -ban sikerült pontot tenni - ennek történetét az alábbi Tétel után meséljük el.

10.9. Tétel (**Ötszíntétel**): *Minden síkba rajzolható gráf kromatikus száma* legfeljebb *öt.*

Bizonyítás: Az állítást a gráf szögpontjainak száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás nyilvánvaló lefeljebb legfeljebb öt csúcsú gráfokra.

Tegyük fel most, hogy $G = (V, E)$ adott egyszerű síkbeli gráf, persze összefüggő, $|V| \geq 6$, valamint hogy az állítás igaz bármely n -nél kevesebb csúccsal rendelkező G' gráfra.

---

[5] Percy John Heawood (1861-1955) angol matematikus, több cikkben foglalkozott a síkra és különböző felületekre rajzolt gráfok színezési számával.

[6] Alfred Bray Kempe (1849-1922) angol ügyvéd, kedvtelésből foglalkozott matematikával, elsősorban kinematikával és matematikai logikával. Az ötszíntételre adott hibás bizonyításának ötletét használta fel később Heawood a tétel helyes bizonyításához.

[7] A négyszínsejtést először Francis Guthrie, Augustus De Morgan egyik tanítványa fogalmazta meg. De Morgan az akkori matematikusok között széles körben terjesztette a problémát, azonban senki sem tudott eredményt elérni.

Feltehető, hogy G telített, azaz G -be már nem lehet újabb élt húzni úgy, hogy még mindig síkba rajzolható maradjon. Hiszen bármely n csúcsú gráf részgráfja egy ilyen gráfnak, és élek hozzávételével a kromatikus szám nem csökken.

Ugyanígy tehető fel az is, hogy G olyan poligonháló, amelynek minden lapja háromszög. A következő segédtételre van szükségünk:

10.10. Lemma: *Ha egy poligonháló minden lapja háromszög, akkor van olyan pontja, melynek foka* legfeljebb 5 .

Bizonyítás: Mint szokásos, jelölje c, e és ℓ rendre a poligonháló (gráf) csúcsainak, éleinek és lapjainak számát.

Jelölje $c_0, ..., c_i, ...$ $(i \in \mathbb{N})$ az i -edfokú csúcsok számát, $c_i \geq 0$, és nyilvánvalóan

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i = c \quad . \tag{10.1}$$

A bal oldali összeg véges sok tagból áll hiszen G egyszerű gráf lévén minden csúcs foka legfeljebb $|V| - 1$. Az 1.20. Kézfogási Tétel alapján

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot c_i = 2 \cdot e \quad . \tag{10.2}$$

Mivel minden lap háromszög, ezért

$$2e = 3\ell \quad . \tag{10.3}$$

Euler I. (9.18.) poliédertételének mindkét oldalát 6 -tal szorozva kapjuk, hogy

$$6\ell + 6c = 6e + 12 \quad ,$$

de (10.3) szerint

$$4e = 6\ell$$

és

$$6c - 2e = 12 \quad .$$

Most c -t (10.1) -ből és $2e$ -t (10.2) -ből kifejezve kapjuk, hogy

$$6 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_i - \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot c_i = \sum_{i=0}^{\infty} (6 - i) \cdot c_i = 12 \ .$$

Az együtthatók előjelét vizsgálva az első hat tag összegére a következő becslést nyerjük

$$6 \cdot c_0 + 5 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + 2 \cdot c_4 + 1 \cdot c_5 \geq 12$$

ami nyilván azt mondja, hogy van legalább egy, legfeljebb ötödfokú csúcs G -ben. □ (Lemma)

A segédtétel szerint van olyan P csúcspontja G -nek, mely legfeljebb ötödfokú.

Két esetet különböztetünk meg:

1) van legfeljebb *negyed*fokú P_0 pont,

2) van *pontosan* ötödfokú P_0 pont.

Az első esetben legyen G' a G gráf P_0 -tól különböző csúcsai által feszített részgráfja. G' -nek $n-1$ pontja van, így az indukciós feltétel miatt csúcspontjai jól színezhetők legfeljebb 5 színnel. Mivel P_0 fokszáma legfeljebb négy, a G' gráf csúcsai közül legfeljebb négy szomszédja van, így a felhasználható 5 színből még marad legalább egy P_0 számára, ami szomszédai színétől különbözik.

A második esetben jelöljük P_0 szomszédait P_1, P_2, P_3, P_4 és P_5 -tel. A pontok sorszámozását válasszuk meg úgy, hogy a P_0P_i irányt pozitív forgás vigye a P_0P_j irányba ha $i < j$. A P_i, P_{i+1} csúcsok éllel össze vannak kötve hiszen feltevésünk szerint G lapjai háromszögek. Mivel azonban K_5 nem síkba rajzolható, létezik két nem szomszédos indexű P_i, P_j csúcs melyek nincsenek éllel összekötve, legyen ez a két csúcs például P_1 és P_3.

Legyen G^* a G gráfban a P_0, P_1, P_3 pontokat egyetlen Q ponttá összevonás után kapott gráf. Vagyis, G^* a következő gráf. Hagyjuk el G -ből a P_0, P_1, P_3 pontokat (csatlakozó éleikkel együtt) és vegyünk fel egy új (V összes elemétől különböző) Q pontot. Ekkor G^* -ban Q a $V \setminus \{P_0, P_1, P_3\}$ halmaznak pontosan azon R elemeivel legyen összekötve, amely R csúcs össze volt kötve a P_0, P_1, P_3 pontok valamelyikével.

Így az $n-2$ csúcspontú G^* gráfot kapjuk. G^* síkba rajzolható, hiszen ha a Q pontot P_0 helyére rajzoljuk és a többi pontot eredeti helyükre, akkor a P_0P_1R illetve a P_0P_3R töröttvonalak nyilván helyettesíthetők egy-egy éllel úgy, hogy ne keletkezzenek "felesleges" metszéspontok.

G^* az indukciós feltétel szerint jól kiszínezhető 5 színnel. E színezés segítségével megadjuk G egy jó színezését az alábbiak szerint. $V \setminus \{P_0, P_1, P_3\}$ csúcsainak színei maradjanak ugyanazok mint G^* -ben. P_1 és P_3 kapják meg Q színét. Így, a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pontok színezésére legfeljebb négy színt használtunk fel, vagyis P_0 -t kiszínezhetjük egy maradék, a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pontok egyikéhez sem rendelt színnel.

Belátjuk, hogy G fenti bekezdésben megadott színezése valóban jó színezés, azaz éllel összekötött csúcsok színei különbözők. Nyilván csak azokat az éleket kell megvizsgálnunk, amelyek (legalább) egyik éle a P_0, P_1, P_3 csúcsok valamelyikéhez illeszkedik. P_0 színe külöbözik mindegyik, vele összekötött (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) csúcs színétől, a konstrukció miatt. P_1 és P_3 nincs is összekötve. Már csak azt kell belátni, hogy P_1 és P_3 nincsenek összekötve velük egyező színű, P_0 -tól különböző csúccsal. Valóban, ha mondjuk P_1 -ből vezet él valamely R pontba, mely különbözik P_0 és P_3 -tól, akkor a G^* gráfban vezet él e pontba Q -ból. R színe így különbözik Q színétől G^* -ban, P_1 színe G -ben megegyezik Q színével, továbbá R színe G -ben és G^* -ben ugyanaz. Ezért R és P_1 színe különbözik G -ben.

Hasonlóan okoskodhatunk a P_3 pontra is. □

Már a múlt század közepén ismert volt, hogy a négyszíntétel bizonyításához csak véges sok gráfot kell ellenőrizni, azonban az ellenőrizendő gráfok nagy száma miatt ezt sem kézzel sem számítógéppel nem lehetett ellenőrizni. 1976 -ban azonban két amerikai matematikusnak sikerült az esetek számát tovább redukálnia, körülbelül 2000 -re, majd egy szuperszámítógép több mint 1000 órás futtatásával az eseteket mind ellenőrizni, beszámolójuk először $[AH]$ -ban jelent meg. Bár programjukban több hibát találtak, azóta mindegyiket sikerült kijavítaniuk.

Általában, matematikai bizonyításnak olyan gondolatmenetet nevezünk, ami bárki által bármikor követhető, így a számítógépes bizonyítást sok szakember elég hosszú ideig nem fogad(hat)ta el. Elemi (számítógép nélküli) bizonyítást ma sem ismerünk a négyszíntételre. Mára azonban nyugodtan mondhatjuk, hogy Appel és Haken bebizonyították a Négyszíntételt, azóta könyvben is kiadott bizonyításukat elfogadhatjuk.

10.11. Tétel (**Négyszíntétel**, Kenneth Appel-Wolfgang Haken, 1976): *Minden síkba rajzolható gráf kromatikus száma* legfeljebb *négy.* □

Adott térképek 4 és 5 színnel való tényleges kiszínezésére egy algoritmust *például* Stephens $[SR]$ cikkében találhatunk.

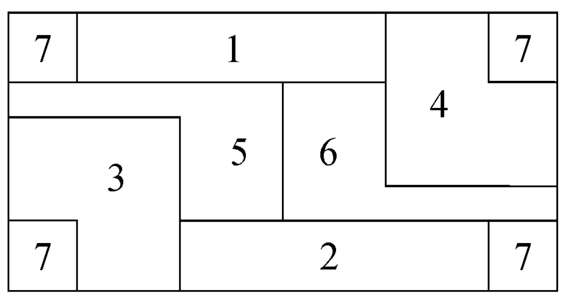
A négyszín-tétel és a Kuratowsky-tétel egy "kombinációja" a következő állítás: *"Ha egy gráf nem színezhető ki* 4 *színnel, akkor tartalmaz* K_5 *vagy* $K_{3,3}$ *részgráfot minorként."*

Ezt a tételt élesítette Hadwiger a következő sejtéssel:

Hadwiger sejtés: *Legyen G egy hurokél nélküli gráf. Ha kromatikus száma legalább m , vagyis $\chi(G) \geq m$, akkor G minorként tartalmaz egy m elemű klikket (K_m részgráfot) .* □

A sejtést a fenti általánosságában még nem sikerült igazolni, részeredményekről és a sejtés egyéb vonatkozásairól Hajnal Péter [$HaPé,'$97/3] könyvének 10.9. alfejezetében olvashatunk.

Érdekes módon az egyéb felületekre (tórusz, Moebius-szalag, perec[8] stb.) rajzolható gráfok kromatikus száma már a múlt század végén ismert volt, például minden tóruszra rajzolható gráf kromatikus száma legfeljebb 7 . Például az alábbi ábrán levő rajzot a "szokásos módon" tórusszá hajtogatva olyan térképet kapunk, ahol a 7 tartomány mindegyike mindegyikkel érintkezik, vagyis kromatikus száma 7.



Hét tartomány a tóruszon
10.2. ábra

10.1.3. Egyéb kérdések

Mint jeleztük, a szerteágazó tudományterületből most csak néhány kiragadott kedvenc témát és eredményt említünk.

Természetesen vetődik fel a kérdés: gráfok *nagy* kromatikus számának mi lehet az oka? Persze, ha tartalmaz részgráfként egy nagy teljes gráfot, K_k -t, akkor nyilván $\chi(G) \geq k$. Azonban a gráf bonyolultabb szerkezete is előidézheti a sok szín szükségességét (kb. a kör bezárul színezéskor), mint

8) **Tórusz:** (felfújt és nem lyukas, hagyományos) *úszógumi.* **Möbius-szalag:** az (egyszeresen) megcsavartan összeragasztott papírszalag. **Perec:** hivatalos nevén *tórusz két füllel* (tehát egy tóruszra két tóruszt ragasztva).

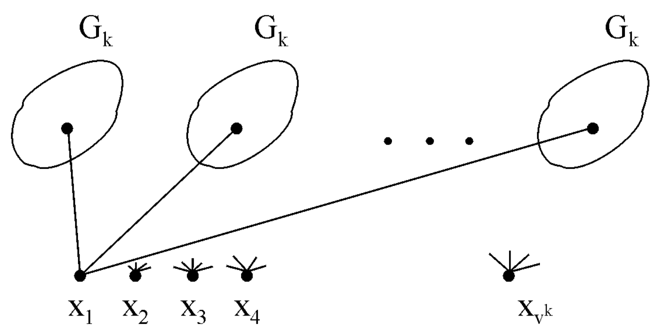
az alábbi híres Tételekben látni fogjuk. Az első Tételre több tucatnyi bizonyítás ismeretes, mi a gráfelméleti *módszerek* illusztrációjaképpen (csak) párat ismertetünk, a másik (élesebb) Tétel most nem bizonyítjuk.

10.12. Tétel: ("folklór[9]") *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ természetes számhoz létezik legalább k -kromatikus véges gráf, mely nem tartalmaz részgráfként háromszöget, azaz C_3 részgráfot.*

Bizonyítások: (I) bizonyítás: k -ra vonatkozó teljes indukcióval. G_k -val jelöljük az általunk konstruált (legalább) k -kromatikus, háromszöget nem tartalmazó gráfot.

$k = 3$ -ra bármely páratlan, legalább 5 hosszú kör megfelel. Mi a legkisebbet választjuk, azaz legyen $G_3 := C_5$.

$k+1$ -re legyen G_{k+1} a következő. Vegyük G_k -t k példányban, és vegyünk fel x^k új pontot, ahol x a G_k gráf csúcsainak száma. Az új pontok mindegyikét kössük össze éllel a G_k gráfok egy-egy csúcsával úgy, hogy a G_k gráfok csúcsainak minden lehetséges kiválasztása szerepeljen az új csúcsok szomszédhalmazai között.[10] (Lásd még a 10.4. Feladatot a Fejezet végén.)



Az indukciós G_{k+1} gráf
10.3. ábra

(II) bizonyítás: (Erdős Pál, 1959) valószínűségszámítási módszerrel[11] (vázlat). Legyen $0 < p < 1$ tetszőleges valószínűség. Tekintsük n csúcson

[9] azaz eredeti szerzője már nem ismert, csak sokféle bizonyítása

[10] Precízen: **ha** $y := x^k$ és $(f_i : i \leq y)$ jelöli az összes $f : \{1, ..., k\} \to G_k$ függvényt, továbbá a G_k gráfok k példánya $G_k^1, ..., G_k^k$ melyek csúcsai $V_j = \{v_t^j : t \leq x\}$ $(j \leq k)$ és az új pontok $p_1, ..., p_y$, **akkor** legyen p_i $(i \leq y)$ összekötve a G_k^j gráf $v_{f_i(j)}^j$ csúcsával.

[11] A *valószínűségszámítási módszer*t Erdős Pál találta fel. Lényege körülbelül a következő: ha egy véges (kombinatorikai) struktúra valamely részének valószínűsége pozitív, akkor a kérdéses rész biztosan létezik.

a p valószínűségi (egyszerű) gráfot, azaz két csúcs között p valószínűséggel húzzunk be élt. Elemi valószínűségszámítási eszközökkel (binomiális eloszlás) belátható, hogy $p = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ $(\varepsilon \approx 0.01)$ esetén

– a gráfban levő háromszögek számának várható értéke kisebb mint $\frac{1}{n}$,

– annak a valószínűsége, hogy a csúcsok valamely $n^{1/2+\varepsilon}$ -méretű részhalmazában n -nél kevesebb él van, 0 -hoz tart,

– élek elhagyásával a gráfban levő minden háromszög megszüntethető úgy, hogy a gráfban ne legyen $n^{1/2+\varepsilon}$ -méretű független (él nélküli) csúcshalmaz,

– $\chi(G)$ nagyságrendje $\sqrt{n}$.

(A bizonyítás n -ben polinom méretű gráf létezését biztosítja de szerkezetéről nem ad felvilágosítást, mint az előző, konstruktív bizonyítás. □

Erdős Pál a II. Bizonyítás módszerével többek között az alábbi összefüggést is megmutatta.

10.13. Tétel: *Tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ természetes számokhoz létezik legalább k -kromatikus véges G gráf, amely nem tartalmaz részgráfként l -nél rövidebb kört, azaz G derékbősége (girth) legalább l :*

$$g(G) \geq l\ . \quad \square$$

Erdős Pál alábbi, 1987-ból származó sejtése 1991 -ben nyert bizonyítást.

10.14. Tétel (Fleischner,H.-Stiebitz,M.)**:** *Ha a tetszőleges G gráfban van olyan Hamilton-kör, melyet a gráfból elhagyva a gráf diszjunkt háromszögekre (és esetleg diszjunkt élekre, izolált pontokra) esik szét, akkor G kromatikus száma legfeljebb* 3 . □

Az alábbi problémát N.Sauer (Alberta,Kanada) professzor kérdezte 1991 -ben egy konferencián, pár héttel később egy magyar zseniális diák, *Tardos Gábor* válaszolta meg (ld.[SN]).

10.15. Tétel (Tardos Gábor[12] és tőle függetlenül Stigliz, 1991): *Ha a tetszőleges G gráf élei diszjunkt módon lefedhetők csillaggráfok összege és egy erdő éleivel, akkor G kromatikus száma legfeljebb* 3 . □

Végül egy szórakoztató eredmény Erdős Páltól, a problémák és Tételek kifogyhatatlan Mesterétől.

10.16. Tétel (Erdős Pál,1993)**:** *Ha a G gráf élei lefedhetők n teljes n csúcsú részgráffal (azaz n darab K_n -el), nem feltétlenül diszjunkt módon,*

[12] Tardos Gábor (1964-) magyar matematikus.

akkor

$$\chi(G) \leq 1 + n\sqrt{n-1} \quad ,$$

és a becslés aszimptotikusan lehető legjobb, azaz ha a fenti módon konstruált gráfok maximális kromatikus számát $f(n)$ jelöli, akkor

$$f(n) = (1 + o(1)) \cdot n^{3/2} \quad . \qquad \square$$

10.2. Élszínezések

Az előző fejezethez ugyan logikailag közelebb állna a gráfok *élkromatikus számá*nak (azaz minimálisan hány szín kell az *élek* kiszínezéséhez úgy, hogy csúcsokban találkozó élek színei különbözők legyenek) vizsgálata, azonban jelentősége miatt a Ramsey-számokkal foglalkozunk először.

10.2.1. Ramsey-elmélet

Ha a csúcsok közötti kapcsolatokat (éleket) minősítjük ("színezzük"), akkor természetesen merül fel olyan csúcshalmaz keresésének igénye, mely csúcsok közötti minden kapcsolat ugyanolyan, vagyis a társaság (kapcsolatai) homogének. Mivel a nem-kapcsolatok (éllel össze nem kötött csúcspárok) is egy fajta kapcsolat, az általános definíciók után (sokszor) elegendő *teljes* gráfok éleinek színezésével foglalkoznunk.

10.17. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ekkor egy tetszőleges $f : E \to \mathbb{N}$ függvényt* **élszínezés***nek nevezünk. f -et* **k - színezésnek** *nevezzük, ha $f : E \to \{1, ..., k\}$ ahol $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített természetes szám.*

A $H \subseteq G$ részgráfot (f -re nézve) **homogén részgráf***nak nevezzük, ha H éleinek f szerinti színe ugyanaz, vagyis $H = (W, F)$ és létezik olyan $i_0 \leq k$ amelyre*

$$f(e) = i_0$$

minden *$e \in F$ élre. Ekkor a H gráf az* **$\mathbf{i_0}$ színben** *homogén.* $\square$

10.18. Definíció: *Legyenek $G, H_1, ..., H_k$ tetszőleges gráfok, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A*

$$G \to (H_1, ..., H_k)^2_k \quad ,$$

Erdős-féle nyíl (arrow) *reláció a következő összefüggést jelölje: A G gráf tetszőleges k -színezése esetén létezik valamely $i \leq k$ színre a H_i gráffal izomorf, az i színben homogén részgráfja G -nek.*

Ha a H_i gráfok mindegyike ugyanaz a H gráf, akkor egyszerűen csak a

$$G \to (H)^2_k \quad ,$$

szimbólumot írjuk. □

A kitevőben levő 2 az élek (csúcspárok, $[V]^2$ elemei) színezésére utal. A fenti definíció mintájára tanulmányozható csúcsok, azaz 1 elemű részhalmazok illetve többelemű részhalmazok színezése esetén fellelhető homogén részgráfok méretei is, azonban e kérdések vagy nagyon egyszerűek vagy nehezek, ezért nem foglalkozunk könyvünkben velük. Mindössze csak Ramsey eredeti tételében (10.22.Tétel) említünk egy ilyen típusú összefüggést.

Az alsó indexbe írt k -t, a színek számát nem is kell kiírnunk, ha tudjuk, például a zárójelben levő $H_1, ..., H_k$ gráfok számából.

A $\to$ (nyíl) relációk általában olyan összefüggéseket írnak le, hogy a szimbólum előtt levő mennyiségből következik a jel után levő mennyiség. Vegyük észre, hogy a G gráfnál bővebb illetve a H_i gráfok helyett részgráfjaikat írva a $\to$ reláció továbbra is érvényben marad. Hasznos a következő összefüggés is (csak a legegyszerűbb formáját írjuk le):

10.19. Állítás: *Tetszőleges G, H_1, H_2, K_1, K_2 gráfokra ha*

$$G \to (H_1, H_2)^2 \tag{10.4}$$

és

$$H_1 \to (K_1, K_2)^2 \tag{10.5}$$

akkor

$$G \to (K_1, K_2, H_2)^2 \tag{10.6}$$

Bizonyítás: Ha adott G éleinek egy f színezése három (a,b,c) színnel, akkor vonjuk össze az első két színt egy színné, azaz legyen a g színezés a következő, két színnel, a színeket x és y -al jelöljük. Tetszőleges $e \in E$ esetén legyen $g(e) := x$ ha $f(e) = a$ vagy $= b$, és legyen $g(e) := y$ ha $f(e) = c$. A (10.4) összefüggés alapján vagy x színben van a H_1 gráffal izomorf homogén részgráfja G -nek, vagy y színben van H_2 homogén. A második esetben (10.6) teljesül, az első esetben (10.5) alapján kapjuk ismét (10.6) -at. □

Bár könyvünkben csak véges gráfokkal foglalkozunk, de az alábbi eredmény önmagában is érdekes és fontos, ráadásul bizonyítása és következményei is meglepően tanulságos és hasznos lesz a továbbiakban.

Halmazelméletben a természetes számok (rendezett) halmazát ω -val szokás jelölni, vagyis K_ω jelöli a (megszámlálhatóan) végtelen csúcsú teljes gráfot, vagyis

$$K_\omega := (\mathbb{N}, [\mathbb{N}]^2) \quad .$$

10.20. Tétel (Ramsey[13], 1930):

$$K_\omega \to (K_\omega)^2_2 \quad .$$

Bizonyítás: Tehát adott a természetes számok párjainak (élek) egy színezése két színnel, a két szín legyen p és k .

Legyen $x_0 \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám. x_0 -nak végtelen sok szomszédja van K_ω -ban (az összes többi természetes szám), így a két szín közül valamelyik szín (akár mindegyik is) végtelen sokszor előfordul x_0 és szomszédai közötti él színeként, legyen ez s_0, $s_0 \in \{p,k\}$. Jelölje $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{N}$ azon szomszédait x_0 -nak tehát, melyek s_0 színű éllel vannak összekötve x_0 -al. Mint említettük, Γ_0 is végtelen.

Legyen $x_1 \in \Gamma_0$ tetszőleges. Hasonlóan definiáljuk az s_1 színt és a $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$ *végtelen* részhalmazt: x_1 -nek azon szomszédai, akik mind s_1 színű éllel vannak összekötve x_1 -el.

Indukcióval definiáljuk az összes $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... \in \mathbb{N}$ csúcsokat, az $s_0, s_1, ..., s_n, ... \in \{p,k\}$ színeket és a $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq ... \supseteq \Gamma_n \supseteq ...$, $\Gamma_n \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmazokat minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: legyen $x_{n+1} \in \Gamma_n$ tetszőleges, és az $s_{n+1} \in \{p,k\}$ szín olyan legyen, amelyre az x_{n+1} csúcs minden Γ_{n+1} -beli szomszédjával s_{n+1} színű éllel van összekötve.

Az $s_0, s_1, ..., s_n, ... \in \{p,k\}$ színsorozatban valamelyik szín végtelen sokszor szerepel, legyen ez $z \in \{p,k\}$, vagyis $z = s_{i_1}, s_{i_2}, ..., s_{i_j}, ...$ $(j \in \mathbb{N})$. Ekkor pedig $H := \{x_{i_j} : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ egy végtelen homogén részhalmaz a z színben (HF). $\square$

10.21. Következmény: *Tetszőleges* $r \in \mathbb{N}$ *természetes számra*

$$K_\omega \to (K_\omega, ..., K_\omega)^2_r \quad .$$

Bizonyítás: A 10.19.Állítás alapján, r -re vonatkozó indukcióval. $\square$

---

[13] Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) angol matematikus, elsősorban matematikai logikával foglalkozott, a King's College (Cambridge) professzora, kiváló előadó volt.

Ramsey eredetileg még többet bizonyított: a természetes számok *két*elemű részhalmazainak (K_ω élei) helyett tetszőleges k *-elemű* részhalmazok tetszőleges színezése esetén is van végtelen homogén részhalmaz.

10.22. Tétel: (Ramsey, 1930): *Tetszőleges* $k, r \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén*

$$K_\omega \to (K_\omega, ..., K_\omega)_r^k$$

azaz az $[\mathbb{N}]^k$ *halmaz tetszőleges*

$$[\mathbb{N}]^k = C_1 \cup ... \cup C_r$$

felbontása esetén van olyan $X \subseteq \mathbb{N}$ végtelen *homogén részhalmaz, vagyis amelynek minden k elemű részhalmaza ugyanolyan színű, más szóval amelyre*

$$[X]^k \subseteq C_i$$

valamely $i \leq k$ *indexre.*

Bizonyítás: A tétel a 10.20. Tételhez hasonlóan bizonyítható, a színek számára (vagyis r -re) vonatkozó indukcióval. $\square$

Már Ramsey előtt is jó pár hasonló tétel napvilágot látott, sok tétel is (többnyire) egyszerűen következik a fenti tételekből, ráadásul hasonló tételek kutatásához adott ötleteket a fenti tétel és bizonyítása. A meglehetősen gazdag és dinamikusan fejlődő területből alább csak néhány azonnali következményt, a véges elmélet legfontosabb fogalmát és összefüggését, majd mutatóba pár érdekességet gyűjtöttünk össze. Az érdeklődőknek például Graham [$Gr1$], [$Gr2$] vagy Hajnal Péter [$HaPé,'97/3$] könyveit ajánljuk. Kiemeljük, hogy mind a végtelen mind a véges Ramsey elmélet kidolgozásában a mai magyar matematikusok élen járnak, elsősorban Erdős Pál Professzor úr, de meg kell még említenünk (sorrend nélkül) Hajnal András, Simonovits Miklós és Komjáth Péter nevét.

Felhívjuk még az Olvasó figyelmét arra, hogy a következő alfejezetben véges halmazok színezésével foglalkozunk: végtelen halmazok helyett "csak" elég nagy halmazokat kell vennünk, minden más (majdnem) marad a régiben.

Előtte azonban a most bizonyított "*végtelen*" tételek néhány egyszerű következményét ismertetjük.

10.23. Következmények: (i) *Tetszőleges* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *sorozatnak van monoton részsorozata.*

(ii) (I.Schur Tétele, 1916) *Tetszőleges* $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$ *felbontás esetén létezik olyan* $i \leq r$ *és olyan* $x, y \in C_i$ *, amelyekre*

$$x + y \in C_i \quad .$$

(iii) (Rado, Folkman, Sanders) *Tetszőleges* $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$ *felbontás és* $m \in \mathbb{N}$ *esetén létezik olyan* $i \leq r$ *és olyan* m *elemű* $X \subseteq C_i$ *részhalmaz, amelyre* tetszőleges $F \subseteq X$ *nemüres részhalmazra*

$$\sum_{a \in F} a \in C_i \quad .$$

(iv) (Hindman,1974) *mint (iii), de* X *végtelen.*

(v) (van der Waerden, 1927) *Tetszőleges* $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$ *felbontás esetén létezik olyan* $i \leq r$ *amelyre* C_i *tetszőleges hosszú számtani sorozatot tartalmaz.*

Bizonyítás: **(i)** Legyen $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{p, k\}$ a következő: $f\{i, j\} := p$ pontosan akkor ha $a_i \leq a_j$, és $f\{i, j\} := k$ pontosan akkor ha $a_i > a_j$. Egy homogén részhalmaz éppen egy monoton részsorozatot ad. (f kicsit másféle definíciójával más, akár *szigorúan* monoton részsorozat létezése is vizsgálható.)

(ii) Természetesen van egy $f : \mathbb{N} \to \{1, ..., r\}$ függvényünk mely az $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$ felbontást adja: C_i éppen az f szerint i színű elemek halmaza.

Legyen ekkor $F : [\mathbb{N}]^2 \to \{1, ..., r\}$ a következő függvény:

$$F(m, n) := f(|m - n|) \quad .$$

Ha most $X \subseteq \mathbb{N}$ homogén F -re nézve az i_0 színben, akkor tetszőleges $m, n, k \in X$, $m < n < k$ számok esetén definiálhatjuk az x, y, z számokat: legyen $x := n - m$, $y := k - n$ és $z := k - m$. Ekkor nyilvánvalóan $x, y, z \in C_{i_0}$ és $x + y = z$. $\square$

10.2.2. Ramsey - számok

Ebben az alfejezetben *véges* halmazok k -elemű részhalmazainak színezésével foglalkozunk. Úgy érezzük, ha valamely méretű homogén részhalmazt szeretnénk, akkor elég nagy alaphalmaz tetszőleges színezése esetén mindenképpen lesz kívánt méretű homogén részhalmaz. Ez igaz, bár nem nyilvánvaló.

Mint említettük, a véges és végtelen tételek állításai és bizonyításai között sok hasonlóság van, bár elég sokszor a véges tételek végtelenszer nehezebbek a végtelen tételeknél - de komolyan.

10.24. Tétel (Ramsey,1930) *Tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ természetes számokhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, amelyre tetszőleges $n \geq n_0$ esetén*

$$K_n \to (K_k, K_l)^2 \quad .$$

10.25. Definíció: *A legkisebb ilyen n_0 számot* $\mathbf{R(k,l)}$ *-el jelöljük, és* **Ramsey - szám***nak hívjuk.* □

Ramsey fenti tétele ugyan nem speciális esete a 10.20. "*végtelen*" Ramsey-Tételnek, de következik belőle, ezt mutatjuk meg az I. Bizonyításban. A bizonyításban megismert trükk sok más hasonló esetben is hasznos lehet számunkra, amikor is végtelen és véges struktúrák hasonló tulajdonságait szeretnénk igazolni (ha egyikre igaz egy bizonyos tulajdonság, akkor "hátha" a másikra is igaz[(14)]).

A 10.24. Tételre megmutatjuk a "szokásos" direkt érvelést is a II. Bizonyításban, ami szintén tanulságos, indukciós módszert mutat, és az $R(k,l)$ számok nagyságrendjének (bár gyenge) becslésére is módot ad.

I. Bizonyítás (10.24.Tétel):

Emlékeztetünk rá, hogy a valós számsorozatokat $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ vagy csak egyszerűen (x_i) jellel jelöljük. Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén jelölje

$$G_n := (V_n, E_n)$$

az $1, ..., n$ természetes számokon (csúcsokon) értelmezett teljes gráfot, azaz legyen

$$V_n := \{1, ..., n\} \quad \textit{és} \quad E_n := [V_n]^2$$

Legyenek tehát $k, \ell \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített természetes számok, és tegyük fel indirekte, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz létezik olyan

$$f_n : E_n \to \{p, z\}$$

[14)] Egészen pontosan, az I. Bizonyítás gondolatmenete elérhetetlen számosságokra működik (κ **elérhetetlen** számosság, ha minden $\lambda < \kappa$ számosságra $2^{\lambda} < \kappa$), bár ismeretes, hogy 0 és $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ -től különböző elérhetetlen számosság létezése nem bizonyítható ...

élszínezés *piros* és *zöld* színekkel, amelyre nézve K_n -ben nincs sem p színű homogén K_k sem z színű homogén K_ℓ részgráf.

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített természetes szám, mondjuk legyen $n_0 := k + \ell$.

Mivel véges sok $E_{n_0} \to \{p, z\}$ típusú függvény létezik, ezért található az n_0 -nál nagyobb természetes számoknak olyan végtelen $(n_i^{(0)}) \subseteq \mathbb{N}$ sorozata, amelyekre az $f_{n_i^{(0)}}$ függvények ugyanazt a színezést adják az E_{n_0} éleken. Legyen ez a közös színezés g_0 , azaz legyen az $f_{n_i^{(0)}}$ függvények közös megszorítása az E_{n_0} halmazra:

$$f_{n_i^{(0)}}|_{E_{n_0}} = g_0 : E_{n_0} \to \{p, z\} \qquad (\forall i \in \mathbb{N}) \quad .$$

Tekintsük most az $n_1 := n_0^{(1)}$ számot. A fenti gondolatmenethez hasonlóan, mivel véges sok $E_{n_1} \to \{p, z\}$ típusú függvény létezik, ezért található az $(n_i^{(0)})$ sorozat n_1 -nél nagyobb elemei között olyan végtelen $(n_i^{(1)}) \subseteq (n_i^{(0)})$ részsorozat, amelyekre az $f_{n_i^{(1)}}$ függvények ugyanazt a színezést adják az E_{n_1} éleken. Legyen ez a közös színezés g_1 , azaz legyen

$$f_{n_i^{(1)}}|_{E_{n_1}} = g_1 : E_{n_1} \to \{p, z\} \qquad (\forall i \in \mathbb{N}) \quad .$$

A fentiekhez hasonlóan tehát definiáltunk természetes számok egy olyan növő (n_i) sorozatát és a

$$g_i : E_{n_i} \to \{p, z\}$$

élszínezéseket, amelyek egymás kiterjesztései, azaz

$$g_i|_{E_j} = g_j \qquad ha\ i < j\ .$$

Ez azt jelenti, hogy ekkor definiálható a g_i függvények uniója, azaz legyen

$$\begin{aligned} g \ &: \ [\mathbb{N}]^2 \to \{p, z\} \\ g(x, y) \ &: \ = g_i(x, y) \qquad ha\ \ i > x, y\ . \end{aligned}$$

Ha most alkalmazzuk a 10.22. "végtelen" Ramsey tételt, kapunk egy homogén K_k vagy K_ℓ részgráfot $\mathbb{N}$ mint csúcsok között, a g színezésre vonatkozóan. Legyen mondjuk egy K_k részgráfunk, p színben homogén. Legyen továbbá $m := n_t \in \mathbb{N}$ olyan, fent definiált természetes szám, hogy a K_k részgráf csúcsai mind kisebbek m -nél, azaz K_k részgráfja a G_m gráfnak.

Ez pedig ellentmondás, hiszen

$$g|_{E_m} = g_m|_{E_m} = f_m$$

és indirekt feltételezésünk szerint a $G_m = (V_m, E_m)$ gráfban nincs az f_m függvényre nézve p színben homogén K_k részgráf. $\square$

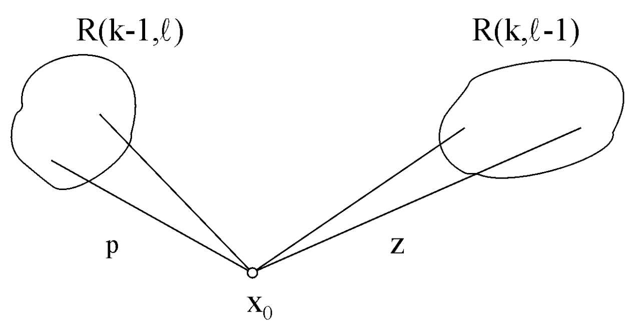
II. Bizonyítás (10.24.Tétel): Tehát adott K_n éleinek színezése két színnel, amik p és z. Vagy p színű k elemű, vagy z színű l elemű homogén csúcshalmazt kell találnunk.

Az állítást ($R(k,l)$ létezését) *szimultán* indukcióval igazoljuk k -ra és l -re vonatkozóan. $k = 2$ vagy $l = 2$ esetén $R(2,l) = l$. illetve $R(k,2) = k$. $R(k,l)$ szimmetrikus, azaz $R(k,l) = R(l,k)$.

Megmutatjuk, hogy

$$\boxed{R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)} \quad . \tag{10.7}$$

Legyen tehát $n := R(k-1,l) + R(k,l-1)$ és legyen adott az n csúcsú teljes gráf éleinek színezése p és z színnekkel. Legyen x_0 egy tetszőleges csúcsa a gráfnak. Most x_0 és a többi csúcs közötti élek színeit vizsgálva, vagy **(1)** találunk $R(k-1,l)$ -sok, p színű éllel összekötött csúcsot, vagy **(2)** $R(k,l-1)$ -sok csúcsot találunk melyek az x_0 csúccsal z színű éllel vannak összekötve.



10.4. ábra: *a $R(k,l)$ Ramsey -számok*

Az első (1) esetben az indukciós feltétel miatt vagy **(1a)** van $k-1$ méretű, p színben homogén, vagy **(1b)** van z színben l méretű homogén részhalmaz. (1b) eset OK, (1a) esetben x_0 és a homogén együtt k méretű homogén a p színben. A második (2) esetben az indukciós feltétel miatt vagy **(2a)** van k méretű, p színben homogén, vagy **(2b)** van z színben $l-1$ méretű homogén részhalmaz. (2a) eset OK, (2b) esetben x_0 és a homogén együtt l méretű homogén a z színben. $\square$

A fenti (10.7) összefüggés alapján indukcióval belátható a Ramsey-számok alábbi, felső becslése.

10.26. Tétel (Erdős Pál, Szekeres György): *Tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ természetes számokra*

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} \quad . \qquad \square$$

További módszerekkel hasonló nagyságrendű alsó becslés is igazolható:

10.27. Tétel (Erdős Pál): *Létezik olyan $0 < c < 1$ valós szám, hogy tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}$ -természetes számokra*

$$\binom{k+l-2}{k-1}^c \leq R(k,l) \quad . \qquad \square$$

A fenti becslések még nagyon távol vannak $R(k,l)$ pontos értékeitől, $R(k,k)$ értékeire is csak hasonló becsléseink vannak.

10.28. Tétel (Erdős Pál, Szekeres György): *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ természetes számra*

$$\left(\sqrt{2}\right)^k \leq R(k,k) \leq 4^k \quad . \qquad \square$$

$R(k,l)$ pontos értéke csak kevés esetben ismert. Gondoljuk csak meg: az összes színezés végigpróbálgatása hiperexponenciálisan lassú algoritmus, ami a még a "legmodernebb" GHz és THz sebességű számítógépeken is kb. $10^{32\,452}$ évig futnának! Egy-egy újabb érték felfedezéséről konferenciákon, tudományos közleményekben (cikk) értesülhetünk, mint például az $[EG]$ cikkben vagy $[HHM]$ könyvben. Néhány, általunk ismert értéket alább és a 10.5., 10.6. Feladatokban ismertetünk.

10.29. Állítás:

$$
\begin{array}{llcll}
 & & & R(3,3) & = & 6 \\
 & & & R(3,4) & = & 9 \\
 & & & R(3,5) & = & 14 \\
 & & & R(3,6) & = & 18 \\
[HHM] & & & R(3,7) & = & 23 \\
[HHM] & & & R(3,8) & = & 28 \\
[HHM] & & & R(3,9) & = & 36 \\
[EG] & 51 & \leq & R(3,12) & & \\
 & 3\cdot(k-1) & \leq & R(3,k) & & \\
 & & & R(4,4) & = & 18 \\
[HHM] & & & R(4,5) & = & 25 \\
[EG],[HHM] & 35 & \leq & R(4,6) & \leq & 53 \\
[HHM] & 43 & < & R(5,5) & \leq & 52 \\
[EG],[HHM] & 58 & \leq & R(5,6) & \leq & 94 \\
[HHM] & 102 & \leq & R(6,6) & \leq & 169
\end{array}
$$

□

Akár csak a végtelen esetben, a 10.24. Tételnek is sok, változatos következménye van, megint csak néhányat közlünk mutatóba.

10.30. Következmények (i) (Schur) *Minden $s \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $q \in \mathbb{N}$ hogy tetszőleges $f : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., s\}$ színezés esetén van $x, y, z \leq q$ amelyekre $f(x) = f(y) = f(z)$ és $x + y = z$.*

(ii) (Erdős Pál,Szekeres György) *Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ természetes számra létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ szám, hogy a sík bármely N pontja közül kiválasztható k amelyek* konvex *k -szöget alkotnak.* □

A 10.22. Tételhez hasonlóan véges halmazoknak is nem csak két- hanem többelemű részhalmazait is festegethetjük nagyméretű homogén részhalmazok reményében. (Most a legáltalánosabb alakot közöljük.)

10.31. Tétel (Ramsey,1930) *Tetszőleges $k_1, ..., k_t, s \in \mathbb{N}$ természetes számokhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, amelyre tetszőleges $n \geq n_0$ esetén*

$$[n]^s \to (k_1, ..., k_t)^s$$

azaz tetszőleges

$$f : [\{1, ..., n\}]^s \to \{1, ..., t\}$$

színezés esetén létezik olyan $i \leq t$ *szín és legalább* k_i *-elemű homogén* $X \subseteq \{1, ..., n\}$ *részhalmaz, vagyis amelynek minden* s *-elemű részhalmaza* f szerint i színű.

Bizonyítás: Hasonlóan vezethető le a 10.22. Tételből mint ahogyan a 10.24. Tételt igazoltuk a 10.20. Tétel segítségével. □

Mint már többször kiemeltük, az elmélet messze nem ér itt véget, csak ez az alfejezet.

10.2.3. Egyéb kérdések

Befejezésül csak néhány kedvenc problémát és eredményt ismertetünk. Az érdeklődő Olvasóknak például Hajnal Péter $[HaPé,' 97/3]$ és Harris-Hirst-Mossinghoff $[HMM]$ könyveit ajánlhatjuk.

Tanulmányozható gráfok **élkromatikus szám**a vagy **kromatikus index**e: a gráf éleit kell lehető legkevesebb színnel úgy kiszínezni, hogy az egy csúcsba befutó élek színei legyenek mind különbözőek. A színek minimális számát $\chi'(G)$ -vel jelöljük.

Tetszőleges rögzített G, H gráfok esetén kereshetjük a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, amelyre

$$K_n \to (G, H)^2 \tag{10.8}$$

azaz K_n éleit két színnel tetszőlegesen színezve vagy az első színben van homogén, G -vel izomorf részgráfja K_n -nek, vagy a második színben homogén, H -val izomorf. A legkisebb ilyen számot a G és H gráfok **Ramsey - szám**á**-**nak hívjuk, és $\mathbf{R(G, H)}$ -val jelöljük.

Élfelbontások

Egy másik kutatási irányt mutat az alábbi fogalom és eredmény:

10.32. Definíció: *A* $K_n = (V, E)$ *teljes gráf egy tetszőleges* $f : E \to \{1, ..., m\}$ *színezése esetén a* V *csúcshalmaz egy* $V = V_1 \cup ... \cup V_t$ *partícióját*[15] **t -dekompozíció***nak nevezzünk (*$t \in \mathbb{N}$ *tetszőleges), ha* minden $i \leq t$ *esetén a* V_i *csúcsokból álló gráf összefüggő* valamely $j \leq m$ *színű élekkel, azaz a*

$$G_{i,j} := \left(V_i, f^{-1}(j)\right)$$

[15] azaz $V = V_1 \cup ... \cup V_t,\ V_i \cap V_j = \emptyset$ és $V_i \neq \emptyset$ minden $i, j \leq t, i \neq j$ esetén.

gráfok összefüggőek. $\square$

10.33. Tétel ($[HKSSz]$)**:** *Tetszőleges $m, k \in \mathbb{N}$ természetes számokra K_k minden m -színezése esetén van m -dekompozíciója.* $\square$

Szomszédsági gráfok

Az alábbi probléma mindössze egy gyakorló feladat, azonban végtelen gráfokra egy nehéz kérdés kiindulópontja.

10.34. Definíció: *Legyen $\mathbf{K}_{\mathbb{P}} := (V_{\mathbb{P}}, E_{\mathbb{P}})$ a következő gráf: $V_{\mathbb{P}} := \mathbb{N}$ és két természetes szám $m, n \in \mathbb{N}$ legyen éllel összekötve, azaz $\{n, m\} \in E$ pontosan akkor ha m, n relatív prímek, azaz $lnko(m, n) = 1$.* $\square$

10.35. Állítás: *Tetszőleges (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) gráf potosan akkor feszített részgráfja $K_{\mathbb{P}}$ -nek, ha tetszőleges $P \in V$ csúcs nemszomszédjai által feszített részgráfjának kromatikus száma véges, azaz*

$$\chi(K_{\mathbb{P}} \backslash \Gamma(P)) < \omega_0$$

ahol

$$\Gamma(P) := \{Q \in V : \{P, Q\} \in E\} \quad . \quad \square$$

10.36. Probléma ($[Sz]$)**:** *Legyen tetszőleges κ, λ számosságok esetén $K_{\kappa,\lambda} := (V_{\kappa,\lambda}, E_{\kappa,\lambda})$ a következő gráf: $V_{\kappa,\lambda} := [\kappa]^{\lambda}$ és $\{X, Y\} \in E_{\kappa,\lambda}$ pontosan akkor ha $X \cap Y = \emptyset$.*

Adjuk meg $K_{\kappa,\lambda}$ feszített részgráfjainak jellemzését. $\square$

Szülői értekezlet

Az alábbi kérdést pár éve hallottam egy nemzetközi konferencián, megoldásáról még nincs tudomásom.

Probléma: Szülői értekezlet (után) néhány szülő szeretne néhány tanárral, és néhány tanár néhány szülővel konzultálni, mindegyik megbeszélés ugyanannyi ideig tart. Meg lehet -e szervezni a megbeszéléseket úgy, hogy senkinek se kelljen két megbeszélése között várakoznia?

A probléma precíz matematikai megfogalmazása az alábbi.

10.37. Definíció: *Tetszőleges $r, s \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén a $G = (V, E)$ kétpólusú gráfot* **B(r,s) -gráf***nak nevezzük, ha egyik pólusában levő csúcsok fokszáma r, másik pólusában levő csúcsok fokszáma s.*

Az $f : E \to \mathbb{N}$ *élszínezés* **intervallum-színezés** (**interval coloring**) *ha minden* $v \in V$ *csúcsba befutó élek színei* $\mathbb{N}$ *-nek egy-egy (összefüggő) intervallumát adják.* $\square$

10.38. Probléma (Szülői értekezlet/Parent consultations, $[JT]$): *Van-e minden* B(r,s) *típusú gráfnak intervallum-színezése ?* $\square$

10.3. Feladatok

10.1. Feladat: Határozzuk meg a következő gráfok kromatikus számait: K_n , $K_{m,n}$, C_n , P_n , H_n (kockagráfok), S_n (csillag), W_n (szélkerék), Petersen gráf, K_n -ből egy tetszőleges él elhagyva.

10.2. Feladat: Bizonyítsuk be a következő állítást:

10.39. Állítás: *Tetszőleges* G *gráfra* $\chi(G) = k$ *akkor és csak akkor ha a* G *gráf* k *-pólusú de nem* $k-1$ *-pólusú.* $\square$

10.3. Feladat: Adjunk meg egy 3-kromatikus gráfot ami nem tartalmaz részgráfként háromszöget.

10.4. Feladat: Határozzuk meg a 10.12. Tétel I. Bizonyításában szereplő G_k gráfok csúcsainak számát, rekurzív- és $\mathcal{O}-$ módon!

10.5. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges 6 tagú társaságban mindig van vagy 3 olyan ember akik kölcsönösen ismerik egymást vagy 3 olyan, akik közül egyikük sem ismeri a másik kettőt (feltételezzük, hogy az ismeretség kölcsönös).

Igaz-e a fenti állítás tetszőleges 5 tagú társaságra?

Írjuk le a fenti állításokat az Erdős -féle $\to$ reláció segítségével!

10.6. Feladat: Mutassuk meg, hogy $K_{13} \nrightarrow (3,5)$.

10.4. Megoldások

10.5. Feladat: Lásd a $[SzIs,'97]$ Feladatgyűjtemény 13.14. Feladatát.

10.6. Feladat: Ha $\{v_1, ..., v_{13}\}$ jelöli K_{13} csúcsait, akkor legyenek pirossal színezve a $\{v_i, v_{i+1}\}$ és a $\{v_i, v_{i+5}\}$ élek modulo 13 (azaz $i+1 > 13$ vagy $i+5 > 13$ esetén a v_{i+1-13} ill. a v_{i+5-13} csúcsra gondolunk).

10.5. Hivatkozások

[AH] Appel, Haken: *Every planar map is four-colorable,* Illinois J.Math. 21 (1977), 429-567

[EG] Exoo,G.: *Announcement: On the Ramsey Numbers R(4,6), R(5,6) and R(3,12),* Ars Combinatorica 35 (1993), p.85

[EP] Erdős Pál: *A variant of the Erdős-Faber-Lovász Conjecture,* The Math. Monthly 1993, pp. 692-693

[$G1$] Graham,R.L.: *Rudiments of Ramsey Theory,* Amer.Math.Soc.1981

[$G2$] Graham,R.L.: *Recent Developments in Ramsey Theory,* Proceedings of the ICM 1983, Warsawa, pp. 1555-1567

[HHM] Harris,Hirst,Mossinghoff: *Combinatorics and Graph Theory,* Springer Verlag, 2000

[$HKSSz$] Hajnal András, Komjáth Péter, Soukup Lajos, Szalkai István: *Decompositions of Edge Colored Infinite Complete Graphs,* Colloquia Math. Soc. J.Bolyai 32 (1987), pp. 277-280

[HR] Hartsfield,N.,Ringel,G.: *Pearls in Graph Theory,* Academic Press, 1990

[JT] Jensen,T.R.,Toft,B.: *Graph Coloring Problems,* Wiley Intersciences, 1995

[KLS] Khama,S.,Linial,N.,Safra,S.: *On the hardness of approximating the chromatic number,* Combinatorica, 20 (2000), 303-415.

[SN] Sauer,N.: levelek 1994

[SR] Stephens,R.: *Map Coloring, A Look at Four- and Five-color Algorithms,* Delphi Magazine, May 1999, pp. 40-47.

[Sz] Szalkai István: *An Open Problem Concerning Spanned Subgraphs of Infinite Graphs,* Coll. Math. Soc.J. Bolyai 52 (1987)

[$Sz2$] Szalkai István: *Végtelen számelméleti gráfok feszített részgráfjairól,* Haladvány Kiadvány 2019., http://math.bme.hu/~hujter/191227.pdf

11. fejezet

Kétpólusú gráfok

A PÁROS GRÁFOK JELLEMZÉSE KÖREIK HOSSZÁVAL. FÜGGETLEN ÉLHALMAZOK, PÁROSÍTÁSOK, A HÁZASÍTÁSI PROBLÉMA. KŐNIG, HALL ÉS ORE TÉTELEI. KÖVETKEZMÉNYEK. EGY STATIKAI ALKALMAZÁS.

11.1. Páros gráfok

A *kétpólusú (bipartite)* gráfokat régen *páros gráfok*nak[(1)] nevezték. E régies elnevezés használatát az alábbi Tétel magyarázza, előtte azonban idézzük fel a kétpólusú gráfok definícióját az 1. Fejezetből:

11.1. Definíció: *A tetszőleges $G = (V, E)$ gráf* **kétpólusú** (**bipartite**) *vagy* **páros,** *ha csúcsponthalmaza felbontható két nemüres részhalmazra úgy, hogy élek csak különböző részhalmazok között húzódnak, azaz $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$ és*

$$E \subseteqq \{\{a, b\} : a \in A,\ b \in B\}\ . \qquad \square$$

11.2. Tétel: *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor kétpólusú (páros), ha G minden köre páros hosszúságú, azaz G -ben nincs páratlan hosszú kör.*

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Nyilvánvaló, mert ha G kétpólusú, akkor az egyik pólusból indulva, csak a pólusok között ugrándozva "lépegethetünk" éleken

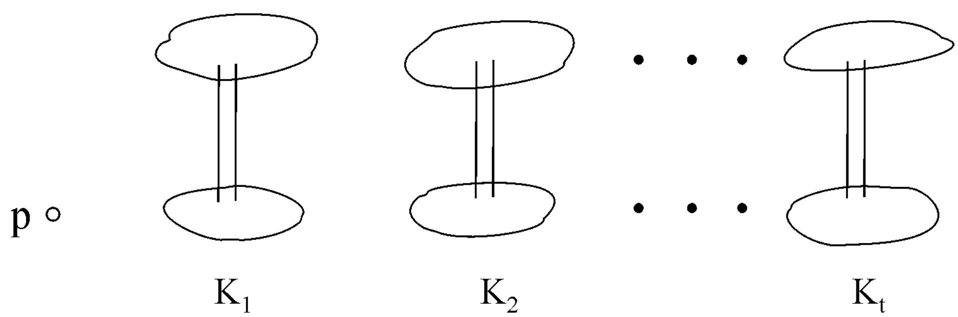
[1)] egészen pontosan: **páros körüljárású gráfok**, lásd a 11.2. Tételt.

keresztül, de ha kiindulási helyünkre akarunk visszatérni, akkor ugyanannyiszor kell "vissza" mind "oda" ugranunk, vagyis a kör csak páros hosszúságú lehet.

$\boxed{\Leftarrow}$ A csúcsok számára, $|V|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. A $|V| = 1, 2$ esetek OK (HF) .

Indukciós lépés: töröljük G egy tetszőleges $p \in V$ csúcsát a hozzá csatlakozó élekkel együtt, a maradék gráf legyen $G' := (V', E')$.

G' nem feltétlenül összefüggő, de mivel nincs (nem keletkezett benne) páratlan hosszú kör, így az indukciós feltétel szerint $K_1, ..., K_t$ komponensei mind kétpólusú gráfok:



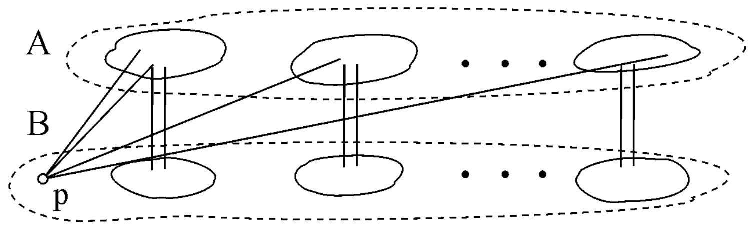
G komponensei
11.1. ábra

11.3. Lemma: *A p csúcs mindegyik K_i komponensben* $(i = 1, ..., t)$ legfeljebb csak egyik pólusban levő csúcs(okk)al lehet összekötve.

Bizonyítás: Legyen a $K_i = (V_i, E_i)$ komponens V_i csúcshalmazának két pólusa A_i, B_i , vagyis $V_i = A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_i = \emptyset$, $A_i, B_i \neq \emptyset$, $i \leq t$ rögzített.

Tegyük fel indirekt módon, hogy van K_i mindkét pólusában egy-egy becsatlakozó pont, azaz $u \in A_i$ és $v \in B_i$ amelyekre $\{p, u\}, \{p, v\} \in E_i$. Ekkor a komponens összefüggősége miatt van P út u és v között, ami a Tétel bizonyításának első felében meggondoltak miatt *páratlan hosszúságú* lehet csak mivel u és v *különböző* pólusban vannak. Ekkor azonban $P \cup \{p, u\} \cup \{p, v\}$ egy páratlan kör lenne $K_i \cup \{p\} \subseteq G$ -ben, ami ellentmondás, vagyis a Lemma állítása igaz. $\square$

Tehát a p csúcs mindegyik K_i komponensben $(i = 1, ..., t)$ legfeljebb csak egyik pólussal van összekötve. Ekkor "forgassuk" el mindegyik K_i komponenst úgy, hogy a p -vel össze nem kötött pólusaik legyenek "alul", és p -t e közös pólusba téve, pontosabban ez és a másik, p -vel esetleg összekötött megfelelő pólusokat össze úniózva (az ábrán szaggatott vonalakkal jelöltük) az eredeti G gráf két megfelelő pólusát kapjuk.



G pólusai
11.2. ábra

Ez bizonyítja az indukciós lépésünket és így a Tétel állítását is. □

Fontos a páros gráfok következő tulajdonsága (is):

A C_3 -at nem tartalmazó, n csúcsú gráfok között legtöbb éle a teljes kétpólusú $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ gráfnak van.

Ez egy szélsőérték - probléma ("legtöbb él"), a következő, 12. "Extremális gráfok" c. fejezetben foglalkozunk ilyen típusú kérdésekkel.

A páros gráfoknak azonban fontosabb szerepe a párosításokkal kapcsolatban van, ami sok (különféle) gyakorlati probléma megoldásában van segítségünkre.

11.2. Párosítások

Kétpólusú gráfok legkézenfekvőbb alkalmazása a következő: a gráf csúcsai a fiúk és a lányok, az élek (mint a *gráfelméletben* általában) a csúcsok közötti kapcsolatok halmaza. Természetesen a most leírt gráf kétpólusú, és egy maximális párosítást keresünk, amit ugye nem kell részleteznünk.

A precíz definíciókat alább azért mégis megadjuk.

11.4. Definíció: (i) *Élek egy tetszőleges $F \subseteq E$ halmaza* **független-** *vagy* **diszjunkt élrendszer,** *más néven* **párosítás** (**matching**), *ha $e_i \cap e_j = \emptyset$ minden $e_i, e_j \in F$ $(i \neq j)$ tetszőleges élek esetén, azaz a kiválasztott élek közül bármely kettőnek nincs közös végpontja.*

(ii) *$F \subseteq E$* **lefedő élrendszer** *ha $\cup F = V$, azaz az F-beli élek a gráf minden csúcsát tartalmazzák.*

(iii) *a független lefogó élrendszereket* **teljes párosítás***nak,* **perfect matching***nek, vagy* **1-faktor***nak nevezzük.* □

11.5. Definíció: *Tetszőleges* $X \subseteq V$ *csúcshalmaz esetén legyen* $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ *az* X **szomszédai***nak halmaza (* **neighbours of X***), azaz legyen*

$$N(X) := \{y \in V \mid \exists x \in X \ \{x, y\} \in E\} \ . \quad \square$$

11.6. Tétel (Philip Hall)**:** *Tetszőleges* $G(V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$ *kétpólusú gráfban, ha az egyik pólus* m *-elemű,* $|V_1| = m$*, akkor pontosan akkor létezik* m *élből álló független élrendszer, ha*

$$|N(X)| \geq |X| \qquad \forall X \subseteq V_1 \ , \tag{11.1}$$

azaz minden X *szögponthalmaznak legalább annyi szomszédja van, mint ahány eleme.* (*Ha* G *mindkét* komponense m elemű, akkor a tétel *1-faktor* -ról szól.)

A (11.1) feltételt szokás **Hall -feltétel**nek is nevezni.

Bizonyítás: A (11.1) feltétel nyilván szükséges.
Elégségessége m szerinti teljes indukcióval történik, $m = 1$ esetén nyilvánvaló.

(a) Ha minden $X \subsetneqq V_1$, $X \neq \emptyset$ részhalmazra $|N(X)| > |X|$, akkor tetszőleges $\{a, b\}$ élt választva, a maradék pontokon a

$$\mathbf{G}^{-} := ((V_1 \backslash \{a\} \cup V_2 \backslash \{b\}) \, , E)$$

gráf teljesíti a (11.1) Hall-feltételt, így az indukciós feltétel szerint van benne $n - 1$ elemű független élrendszer, amihez hozzávéve az $\{a, b\}$ élt, n elemű független élrendszert kapunk.

(b) Ha van olyan $X_0 \subsetneqq V_1$, $X_0 \neq \emptyset$ részhalmaz, amelyre $|N(X_0)| = |X_0|$, akkor a

$$G' := (X_0 \cup N(X_0) \ , \ E')$$

és a

$$G" := (V_1 \backslash X_0 \cup V_2 \backslash N(X_0) \ , \ E")$$

páros gráfok külön-külön is teljesítik a (11.1) Hall-feltételt (MIÉRT? HF), így kiválasztható belőlük $|X_0|$ illetve $n - |X_0|$ elemű független élrendszer, amik uniója megfelel a feladat követelményének. □

Előbb élekkel próbáltuk a gráf csúcspontjait "megkötni", most vizsgáljuk meg a fordítva: csúcsokkal "odaszegezni" az éleket. Mint várható, a két probléma között szoros kapcsolat van.

11.7. Definíció: *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén*

(i) $Y \subseteqq V$ **lefogó pont- / csúcsrendszer**, *ha a G gráf minden élének valamelyik végpontja Y-ba esik.*

(ii) $\mathbf{m}(G) :=$ *minimális lefogó pontrendszer elemszáma,*

és $\mathbf{M}(G) :=$ *maximális független élrendszer elemszáma.* □

Nyilván $m(G) \geq M(G)$ tetszőleges G gráf esetén.

11.8. Tétel (Kőnig Dénes)**:** *Páros gráf esetén* $m(G) = M(G)$.

11.9. Megjegyzések: **(i)** A tétel nem páros gráf esetén nem igaz, ld. pl. K_{2n+1} vagy C_{2n+1} gráfokat.

(ii) A tétel egy úgynevezett *minimax* tétel, hiszen két mennyiség minimumának ill. maximumának egyezőségét állítja. A diszkrét matematikában és a játékelméletben gyakoriak az ilyen szerkezetű tételek, mint például a 14. "Hálózati folyamok" c. Fejezetben is látni fogjuk.

(iii) A tétel bizonyítása egyszerű *algoritmus*t is ad a minimális lefogó pontrendszer és a maximális független élrendszer megkeresésére, ez utóbbi a (11.1) Hall-feltétel (azaz $|N(X)| \geqq |X| \quad \forall X \subseteqq V_1$) teljesülése esetén 1-faktor lesz. Az **alternáló utak módszeré**t széles körben alkalmazzák a gráfelméletben és az operációkutatásban, és **magyar módszer**nek (**Hungarian method**) is hívják.

A 11.8. Kőnig Tétel **Bizonyítás**a:

Legyen tehát $G = (V, E)$ egy tetszőleges páros gráf. A gráfban minden út pontjai felváltva az egyik és a másik pólusban vannak. A gráf éleit, alább leírandó módon **kövér** és **sovány élek**nek nevezzük. Egy utat **alternáló út**nak nevezünk, ha kövér és sovány élek váltogatják benne egymást, egy él kövér/sovány jelzője többször is változhat az algoritmus folyamán.

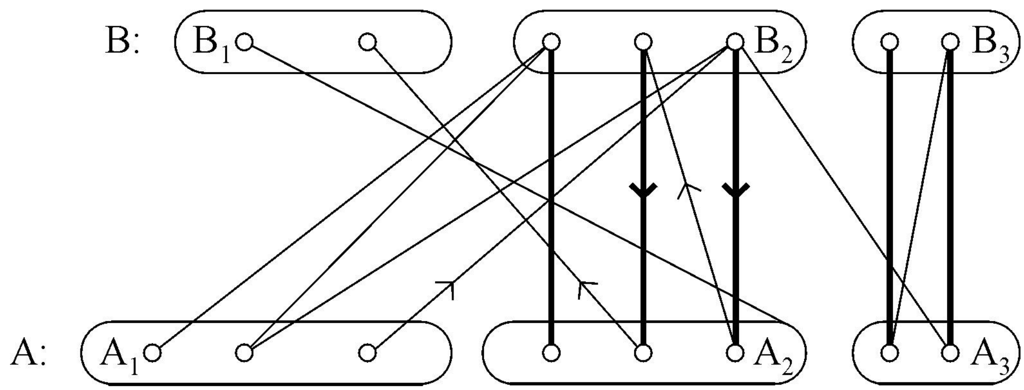
A módszer alapja a következő ötlet. Ha egy alternáló út mindkét végét sovány él zárja, akkor a kövér és sovány jelleget felcserélve (azaz mindenhol megfordítva) 1-gyel növekszik a kövér élek száma.

Sőt, ha egy gráf kövér élei függetlenek, és az alternáló út végpontjaihoz nem illeszkednek kövér élek, akkor a csere utáni kövér élek is függetlenek lesznek.

Legyenek a G páros gráf komponensei A és B. Tegyük fel, hogy már kiválasztottunk egy alternáló utat, néhány kövér (azaz független) éllel, a többi él legyen sovány. Legyen $A_1 \subset A$ és $B_1 \subset B$ azon pontok halmaza, amelyekhez nem illeszkednek kövér élek. A kövér élek végpontjai aszerint tartozzanak az $A_2 \subseteq A$, $B_2 \subseteq B$ illetve az $A_3 \subseteq A$,$B_3 \subseteq B$ halmazokba, hogy A_1-ből alternáló úttal elérhetők-e avagy nem érhetők el.

Nyilván G-ben nincs sem $A_1 - B_3$ sem $A_2 - B_3$-beli él.

Ha van G-ben $A_2 - B_1$-él, akkor van alternáló $A_1 - B_1$-út is (ld. az ábrán a nyilak):



Alternáló utak
11.3. ábra

Alkalmazva a fenti ötletet, a fenti alternáló út kövér- és soványságát megcserélve növelhetjük a kövér élek számát.

Ha nincs G-ben $A_2 - B_1$-él, akkor $B_2 \cup A_3$ nyilván lefogó ponthalmaz, és mivel $| B_2 \cup A_3|$ éppen a kövér élek száma, G-ben sem lehet sem több független él, sem kevesebb elemszámú lefogó ponthalmaz. Ez igazolja a Tétel állítását, Q.E.D. $\square$

11.10. Megjegyzések: Kőnig Dénes 11.8. és Philip Hall 11.6. Tételei valójában ekvivalensek, közvetlenül egymásból is levezethetők.

Megmutatható, hogy a fenti algoritmus $\mathcal{O}(n \cdot e)$ lépésszámú ahol n a csúcsok míg e az élek száma, ugyanis egy alternáló út $\mathcal{O}(e)$ lépés alatt megtalálható, a gráf és az adatok ügyes tárolásával.

Maximális folyamkereső algoritmusok segítségével is kereshetők maximális párosítások, amint a 14. ”Hálózati folyamok” c. fejezet végén ezt megmutatjuk.

11.11. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges páros gráf, pólusai V_1 és V_2. Tetszőleges $X \subseteq V_1$ csúcshalmaz esetén X* **szűkülése** *legyen*

$$\mathbf{s(X)} := |X| - |N(X)| \ . \quad \square$$

Világos, hogy G -ben minden független élrendszer legfeljebb $|V_1| - s(X)$ elemű: külön megbecsülve a $V_1 - X$ -ből és az X -ből kifutó éleit, kapjuk a

$$|V_1| - |X| + |N(X)| = |V_1| - |s(X)|$$

becslést.

11.12. Tétel (Ore)**:** *A* $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$ *páros gráfban a maximális független élrendszer számossága*

$$M(G) = |V_1| - \max\{s(X) : X \subseteq V_1\}$$

ami nem más, mint

$$= \min\{(|V_1| - |X| + |N(X)|) : X \subseteq V_1\} \ .$$

Bizonyítás: Ez a Tétel ekvivalens a 11.8. Kőnig Tétellel, mert minden $X \subseteq V_1$ -re $N(X)$ és $V_1 - X$ lefogják az összes élt. □

11.3. Következmények

Ebben az alfejezetben a Kőnig-Hall Tételek néhány következményét mutatjuk be, amik a Tételek erősségét mutatják.

11.13. Tétel: *Tetszőleges (esetleg többszörös élt tartalmazó)* reguláris *gráfban mindig van 1-faktor.*

Bizonyítás: Teljesül a (11.1) Hall feltétel. □

11.14. Tétel: *Tetszőleges (esetleg többszörös élt tartalmazó)* reguláris *gráf mindig felbomlik éldiszjunkt 1-faktorok úniójára.*

Bizonyítás: Reguláris gráfból 1-faktort elhagyva a maradék gráf ismét reguláris, és a csúcsok közös (regularitási) fokszámára való indukcióval bizonyíthatunk. □

11.15. Tétel: *Többszörös él nélküli* k *-adfokú reguláris páros gráfnak legalább* $k!$ *különböző 1-faktora van.*

Bizonyítás: k -ra vonatkozó teljes indukcióval. □

A különböző 1-faktorok számát pontosan is meg tudjuk határotni az alábbi módon.

11.16. Definíció *Egy tetszőleges* $A = (a_{i,j})_{i,j=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix* **permanense**

$$\mathbf{Per(A)} := \sum_{\pi \in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right)$$

ahol az $I_n := \{1, ..., n\}$ *jelöléssel*

$$\mathbf{S_n} := \{ \ \pi \mid \pi : I_n \to I_n \ \textit{bijekció} \}$$

az I_n *halmaz elemei permutációk halmaza, az* **n -edrendű szimmetrikus csoport.** □

Megjegyezzük, hogy az A mátrix jólismert *determinánsa* a

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \left(sgn(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right)$$

képlettel *is* kiszámolható, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{sgn}(\boldsymbol{\pi}) \ \ &: \ = (-1)^{\#} \\ \text{és } \# \ \ &: \ = |\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n \ , \ \pi(i) > \pi(j)\}| \end{aligned}$$

a π permutáció **előjele** (signum) vagy **paritása** ($\mathbf{par}(\boldsymbol{\pi})$) .

11.17. Tétel: *Ha A egy többszörös él nélküli k -adfokú reguláris páros gráf adjacencia mátrixa, akkor* $Per(A)$ *a gráf különböző 1-faktorainak száma.* (nem bizonyítjuk). □

Nem meglepő, hogy a kétpólusú gráfok megismert tulajdonságai segítségünkre vannak halmazrendszerek és mátrixok tulajdonságainak leírásánál, most csak egy ilyen példát mutatunk.

11.18. Definíció: *A tetszőleges* $\{A_1, ..., A_n\}$ *halmazrendszer* **gyenge reprezentáns- rendszere** $\{x_1, ..., x_n\}$, *ha minden* $1 \leq i \leq n$ *esetén* $x_i \in A_i$ (*nem kötjük ki, hogy az* x_i *elemek különbözők legyenek*). □

11.19. Tétel: *Az* $\{A_1, ..., A_n\}$ *és* $\{B_1, ..., B_n\}$ *halmazrendszereknek akkor és csak akkor létezik közös gyenge reprezentáns- rendszere,* ha *minden* $k \leq n$ *számra bármely k darab* A_i *halmaz egyesítése legalább* B_j *halmazt metsz.*

Bizonyítás: Tekintsük a következő páros gráfot:

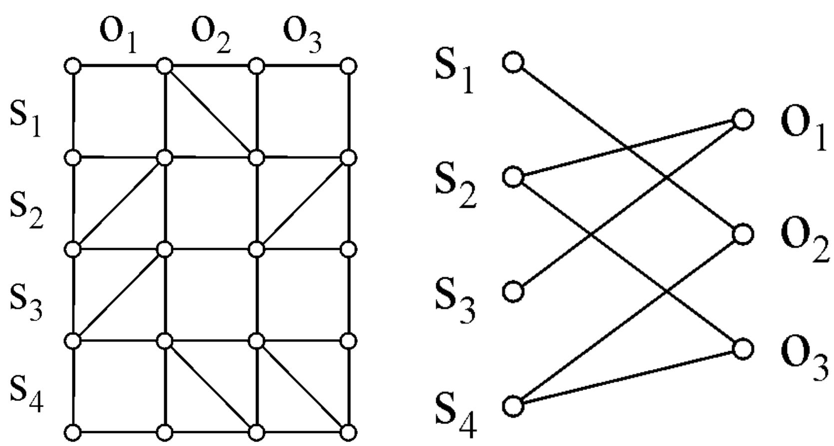
$V_1 := \{A_1, ..., A_n\}$, $\quad V_2 := \{B_1, ..., B_n\}$, $\quad V = V_1 \cup V_2$, és legyen

$$\{A_i, B_j\} \in E \Leftrightarrow A_i \cap B_j \neq \emptyset \quad (i, j \leq n) \quad \square$$

11.4. Egy statikai alkalmazás

Mint említettük, a gráfoknak (és a matroidoknak) széleskörű felhasználása van kémiában, elektronikai áramköröknél, tartószerkezetek stabilitásának vizsgálatában. Most csak egy összefüggést mutatunk be ízelítőül az utóbbi területről. Részletesebb bevezetést (mindhárom területről) például Recski András [$ReAn,'89$] és Aldous-Wilson [AW] könyveiben találhatunk.

Tekintsünk egy merev rudakból és csuklós összekötésekből téglalaprácsszerűen felépített tartószerkezetet, amelynek néhány négyzetét merev lapokkal (vagy átlós kötésekkel) kimerevítettünk, az ábra szerint:



Tartószerkezet csuklós pántokkal és gráfja
11.4. ábra

Feleltessünk meg a fenti szerkezetnek egy páros gráfot a következő módon. A gráf egyik pólusának csúcsai feleljenek meg a négyzetrács *sorainak* míg a másik pólus csúcsai az *oszlopoknak.* Két csúcsot pontosan akkor kössünk össze, ha a megfelelő négyzet (akár lappal akár átlóval) ki van merevítve. A következő eredmény könnyen igazolható:

11.20. Tétel: *A merev rudakból és csuklós összekötésekből négyzetrácsszerűen felépített tartószerkezetet pontosan akkor merev, ha a fenti módon megfeleltetett (páros) gráf* összefüggő. □

11.5. Hivatkozás

[*AW*] Aldous,J.M., Wilson.R.J.: *Graphs and Applications,* Springer Verlag, 2000

12. fejezet

Extremális gráfok

Turán Pál tétele. Extremális gráfelméleti kérdések és eredmények.

12.1. Turán Pál Tétele

A gyakorlati problémáknál nem meglepő, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén valamilyen mennyiséget akarunk minimalizálni vagy maximalizálni, vagyis az *extrém*[1] struktúrákat keressük.

Most olyan gráfokat keresünk, melyeknek legtöbb *éle* van bizonyos tulajdonság esetén, általában egy adott "tiltott" gráfot részgráfként *nem* tartalmazó gráfok közül.

A fenti probléma szabatos matematikai meghatározása a következő.

12.1. Probléma: *Legyen $G=(V,E)$ egy adott tetszőleges ("***tiltott***")* **gráf***. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén* legfeljebb hány *éle lehet egy olyan n csúcsú egyszerű gráfnak amely G -t részgráfként nem tartalmazza?* □

A következő jelölések segítségével az összegyűjtött eredményeket egyszerűbben fogalmazhatjuk meg:

12.2. Definíció: *Adott tetszőleges $G=(V,E)$ gráf és $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén $\mathbf{t}(\mathbf{n},\mathbf{G})$ jelölje a G -t részgráfként nem tartalmazó n csúcsú egyszerű gráfok éleinek maximális számát. Amennyiben a maximális élszámú n csúcsú gráf egyértelmű, azt $\mathbf{T}(\mathbf{n},\mathbf{G})$ -vel jelöljük. $t(n,G)$ -et a G* gráf

[1] szélsőséges (latin)

Turán-féle számá*nak, míg* $T(n,G)$ *-et* **általánosított Turán-gráf***nak nevezzük.* □

Az (eredeti) Turán-gráfokat az 1."Bevezetés" Fejezetben definiáltuk. Az elnevezések magyarázata Turán Pál alábbi tétele, amely az egész elmélet legelső és elindító eredménye.

12.3. Tétel: (Turán Pál$^{(2)}$, 1941) *Tetszőleges rögzített* $k \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén a* K_k *(*k *-csúcsú teljes) gráfot tiltott részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráfok között legtöbb éle egyedül a teljes* $k-1$ *-pólusú* $T_n^{m_1,\ldots,m_{k-1}}$ *ún. "Turán-gráfnak" van, vagyis*

$$n = (k-1)b + r,\ r < k-1 \tag{12.1}$$

esetén $m_i = b$ *ha* $i \le r$ *,* $m_i = b+1$ *ha* $r < i \le n$ és

$$T(n, K_k) = T_n^{m_1,\ldots,m_{k-1}} \tag{12.2}$$

ami éleinek száma

$$t(n, K_k) = t(n,k) := \frac{k-2}{2(k-1)} \cdot (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}\ . \tag{12.3}$$

Bizonyítás: $n \in \mathbb{N}$ szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

$n < k-1$ esetén az állítás igaz, hiszen ez esetben egyetlen n csúcsú egyszerű gráf sem tartalmazhat K_k részgráfot, és minden ilyen gráfnak legfeljebb $\binom{n}{2}$ éle van, másrészt $b = 0$ és $r = n$ a (12.1) kifejezésben, így $T_n^{m_1,\ldots,m_{k-1}} = K_n$ aminek persze a lehető legtöbb éle van.

Az indukciós lépés. Legyen tehát $n \ge k-1$. Ekkor az indukciós feltevés miatt $n-(k-1)$ -re igaz a Tétel állítása.

Legyen tehát $G = (E, V)$ egy adott n csúcsú egyszerű gráf, $K_k \subsetneqq G$. Megmutatjuk, hogy G éleinek száma $e := |E| \le t(n,k)$.

Addig húzzunk be esetleg új éleket a G gráfba, míg elérjük, hogy $K_{k-1} \subseteqq G$ lesz. Ekkor hagyjunk el G -ből egy teljes K_{k-1} részgráfot a hozzá vezető élekkel együtt, a kapott gráfot jelöljük $G' = (V', E')$ -el. Könnyen láthatóan

$$|V'| = n-(k-1) \quad \textit{és} \quad |E| = e' \le e-k-1 \quad .$$

[2] Turán Pál (1910-1976) magyar matematikus, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem professzora. Valószínűségszámítási módszerekkel folytatott számelméleti kutatásokat, valamint végtelen sorok, csoportelmélet és az extremális gráfelmélet terén vannak jelentős eredményei.

G' -nek egyetlen pontja sem lehetett az elhagyott K_{k-1} minden csúcsával összekötve. Így az elhagyott élek száma összesen legfeljebb

$$\# \leq (n-(k-1)) \cdot (k-2) + \binom{k-1}{2}$$

aminek és az indukciós feltétel alapján az eredeti G gráf éleinek száma (r ugyanaz a G és a G' gráfoknál):

$$\begin{aligned}
e &\leq e' + \# \leq t\,(n-(k-1),k) + \# \leq \\
&\leq \frac{k-2}{2(k-1)} \cdot \left[(n-(k-1))^2 - r^2\right] + \binom{r}{2} + (n-(k-1)) \cdot (k-2) + \binom{k-1}{2} \\
&= \frac{k-2}{2(k-1)} \cdot \left[(n-(k-1)) \cdot (n-(k-1)+2(k-1)) - r^2\right] + \binom{r}{2} + \binom{k-1}{2} \\
&= \frac{k-2}{2(k-1)} \cdot \left[n^2 - (k-1)^2 - r^2\right] + \binom{r}{2} + \binom{k-1}{2} \\
&= \frac{k-2}{2(k-1)} \cdot \left[n^2 - r^2\right] + \binom{r}{2} - \frac{(k-1)^2\,(k-2)}{2(k-1)} + \binom{k-1}{2} \qquad (12.4) \\
&= t(n,k) + 0 = t(n,k) \quad .
\end{aligned}$$

Ezzel annyit bizonyítottunk be, hogy *minden* egyszerű gráfnak, ami nem tartalmaz K_k részgráfot, legfeljebb $t(n,k)$ éle lehet.

A Tétel viszont azt is állítja, hogy *egyetlen* olyan gráf van csak amelynek van is ennyi éle: a (12.2) feltételt kielégítő

$$T(n, K_k) := T_n^{m_1,\ldots,m_{k-1}}$$

Turán- gráfnak.

Ha a G gráfnak $t(n,k)$ éle van, akkor a bizonyítás előző gondolatmenetében, pontosabban a (12.4) egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség kell, hogy legyen. Ebből az indukciós feltétel szerint az következik, hogy a redukált G' gráf is *csak* a

$$T(n-(k-1), K_k) = T_{n-(k-1)}^{m_1-1,\ldots,m_{k-1}-1}$$

Turán-gráf lehet. Továbbá, G' -nek minden pontja az elhagyott K_{k-1} részgráfnak $k-2$ pontjával kell, hogy összekötve legyen. Ebből az is belátható, hogy G' -nek különböző pólusokban levő csúcsai nem lehetnek K_{k-1} ugyanazon csúcsaival összekötve különben G -ben lenne K_k. Másképpen fogalmazva,

G' -nek különböző pólusokban levő csúcsai nem *hagyhatják ki* K_{k-1} ugyanazon csúcsát. Ez pedig azt jelenti, hogy G' minden pólusához tartozik pontosan egy pontja K_k -nak ami nincs e pólusbeli pontokkal összekötve (HF). Ez pedig azt jelenti, hogy mindegyik pólushoz hozzávehetjük a hozzá tartozó csúcsot, vagyis G valóban nem más, mint a $T_n^{m_1,\dots,m_{k-1}}$ Turán - gráf. $\square$

12.4. Megjegyzések: (i) $k = 3$ esetén speciálisan kapjuk, hogy a háromszög, azaz C_3 nélküli egyszerű gráfok közül legtöbb éle egyedül a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ páros gráfnak van, ami éleinek száma éppen $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

(ii) $t(n,k)$ közelítő értéke nagy n esetén $\frac{k-1}{k-2} \cdot \frac{n^2}{2}$, vagyis, ismét közelítőleg, a K_k részgráfot nem tartalmazó egyszerű gráfoknak $\frac{k-1}{k-2}$ -ed annyi éle van mint a maximális $\binom{n}{2}$ érték, azaz a teljes K_n gráf éleinek száma.

12.5. Következmény: *Legyen adott a síkon n tetszőleges pont, melyek távolsága páronként 1 -nél kisebb. Ekkor a pontok távolságai között van $3 \cdot \binom{\lfloor n/3 \rfloor}{2}$, melyek $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél is kisebbek.*

Megjegyezzük, hogy az állítás éles, hiszen helyezzük el az n pont mindegyik harmadát egy egyenlő szárú háromszög belsejében a csúcsai közelében! Természetesen az állítás n pont *tetszőleges* konfigurációjáról szól.

Bizonyítás: Az adott $V := \{P_1, ..., P_n\}$ pontokon definiáljuk a következő G gráfot: legyen $\{P_i, P_j\} \in E$ pontosan akkor ha a P_i és P_j pontok távolsága *nagyobb* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél. Belátható, hogy ekkor K_4 nem részgráfja G -nek, vagyis G éleinek száma legfeljebb

$$e \le t(n,4) = \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot (n^2 - r^2) + \binom{r}{2} .$$

A keresett mennyiség G komplementerének élszáma, ami ezek szerint *legalább*

$$\ge \binom{n}{2} - t(n,4) \ge 3 \cdot \binom{\lfloor n/3 \rfloor}{2}$$

amit bizonyítani kellett, Q.E.D. $\square$

12.2. Egyéb eredmények

Az alábbi alfejezetben csak röviden, bizonyítás nélkül felsorolunk néhány újabb eredményt és problémát. A tömörség érdekében az állításokat csak a

12.2.Definíció jelöléseivel írjuk fel. Az érdeklődő Olvasóknak Andrásfai Béla $[AB]$ és Hajnal Péter $[HaPé,'97/3]$ könyveit ajánlhatjuk.

12.6. Tétel: (Erdős Pál-Gallai Tibor) *Tetszőleges* $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén*

$$t(n, P_{k+1}) = \frac{nk}{2}$$

és

$$T(n, P_{k+1}) \quad = \quad K_{k+1} \text{ gráfok diszjunkt uniója} \quad . \qquad \square$$

12.7. Tétel: *Tetszőleges* $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén*

$$t(n, C_{k+1}) = \frac{(n-1)k}{2}$$

és

$$T(n, C_{k+1}) \quad = \quad K_k \text{ gráfok diszjunkt uniója} \quad . \qquad \square$$

12.8. Tétel: (i)

$$t(2n, K_{2,2}) \leq \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{4n^3 - 3n^2}\right)$$

és egyenlőség csak akkor lehetséges ha

$$n = q^2 + q + 1$$

és létezik q *-adrendű véges projektív sík.*

(ii) *Tetszőleges* $n, p, q \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén*

$$t(n, K_{p,q}) = \frac{1}{2}\sqrt[p]{q-1} \cdot n^{2-\frac{1}{p}} + o(n^{2-\frac{1}{p}})$$

ahol $o(f(n))$ *olyan függvényt (általában a maradékot) jelöli amelyre*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{o(f(n))}{f(n)} = 0 \quad . \qquad \square$$

12.9. Tétel: *Tetszőleges* $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén*

$$t(n, C_4) = \frac{1}{2} n^{3/2} + o(n\sqrt{n}) \quad \square$$

12.10. Tétel: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén, ha $n > n_0$ elég nagy:*

$$t(n, C_{2k+1}) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \quad . \quad \square$$

12.11. Tétel (Bondy, Simonovits [BS]): *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén létezik olyan $c > 0$ konstans, amelyre*

$$t(n, C_{2k}) < c \cdot n^{1+\frac{1}{k}} \quad . \quad \square$$

Probléma: $k > 3$ esetén $t(n, C_{2k})$ pontos értéke ma még nem ismert.

12.12. Tétel: *Tetszőleges G_0 rögzített egyszerű, nem üres gráf esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(n, G_0)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(G_0) - 1} \tag{12.5}$$

ahol $\chi(G_0)$ a G_0 gráf kromatikus[3] *száma.* $\square$

A tétel (pontatlanul fogalmazva) azt mondja ki, hogy $t(n, G_0)$ körülbelül a maximális élszámnak $1 - \frac{1}{\chi(G_0)-1}$ -szerese. Láthatjuk, hogy a fenti Tétel a $t(n, G_0)$ értékek aszimptotikus közelítését csak a $\chi(G_0) = 2$ azaz páros gráfok esetén nem adja meg, hiszen ez esetben (12.5) a semmitmondó $t(n, G_0) = o(n^2)$ formulát adná. Néhány speciális páros G_0 gráf esetén $t(n, G_0)$ értékét Hajnal Péter [$HaPé,'97/3$] könyvében megtaláljuk, sok kérdés azonban még most is *megoldatlan*.

12.3. Hivatkozások

[AB] Andrásfai Béla: *Gráfelmélet,* Polygon könyvtár, Polygon kiadó, Szeged, 1994.

[BS] Bondy,J.A., Simonovits,M.: *Cycles of Even Length in Graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B 16 (1974), pp. 97–105.

[3] ld. a 10. "Gráfok színezései" Fejezetet.

13. fejezet

Gráfok spektruma

Definíció és alapvető összefüggések. További eredmények.

Ha már minden gráfhoz rendeltünk egy adjacencia mátrixot, nem meglepő, hogy további lineáris algebrai segédeszközöket is kipróbálunk. A kapott eredményeket e Fejezetben közöljük. A felhasznált lineáris algebrai fogalmakat és eszközöket (sajátérték és sajátvektor, Cayley- Hamilton tétel stb.) most nem ismertetjük.

13.1. Alapfogalmak

13.1. Definíció: *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, és adjacencia mátrixa legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor a* **gráf karakterisztikus polinomja** *az A mátrix karakterisztikus polinomja:*

$$\mathbf{p_G}(\lambda) := (-\mathbf{1})^n \cdot \det(A - \lambda I) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda_1 + c_n \quad . \quad \square$$

Emlékezetünk, hogy tetszőleges $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén $\det(X)$ az alábbi módon is kiszámolható:

$$\det(X) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{sgn(\pi)} x_{1,\pi(1)} x_{2,\pi(2)} ... x_{n,\pi(n)}$$

azaz minden sorból kiválasztjuk X -nek egy-egy elemét, különböző oszlopokból, összeszorozzuk őket, majd előjelesen ($par(\pi)$ a π permutáció paritása) összeadjuk ezen szorzatokat az összes lehetséges módon (ezt jelöli a $\pi \in S_n$ szummációs index).

13.2. Állítás: *Ha G egyszerű gráf, akkor*
(i) $c_0 = 1$,
(ii) $c_1 = 1$,
(iii) $c_2 = -|E|$ *(élek számának (-1) -szerese),*
(iv) $c_3 =$ *a G –ben levő háromszögek (C_3) számának (-2) -szerese.*

Bizonyítás: Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

(i) A $\det(A - \lambda I)$ kifejezés kiértékelésében a λ^n hatványt csak az

$$(a_{1,1} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{n,n} - \lambda)$$

szorzat kifejtéséből kaphatjuk, ami láthatóan a $(-\lambda)^n$ értéket adja.

(ii)

$$c_1 = -Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad .$$

Ha G egyszerű, akkor nyilván $a_{i,i} = 0$ minden $i \leq n$ esetén.

(iii)

$$c_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{vmatrix} \quad ,$$

vagyis a főátlóra szimmetrikus 2×2 méretű főminorok determinánsainak összege. Mivel A minden eleme 0 vagy 1 és $a_{i,i} = a_{j,j} = 0$, ezért csak a $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ alakú minorok nem szingulárisak (determinánsuk nem 0), mindegyikük a gráf egy-egy élének felel meg.

(iv) Az előző ponthoz hasonlóan

$$c_3 = -\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} & a_{i,k} \\ a_{j,i} & a_{j,j} & a_{j,k} \\ a_{k,i} & a_{k,j} & a_{k,k} \end{vmatrix} \quad .$$

Ismét felhasználhatjuk, hogy A minden eleme 0 vagy 1 és $a_{i,i} = a_{j,j} = a_{k,k} = 0$, ezért csak a

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

alakú minorok nem szingulárisak és mindegyikük a gráf egy-egy háromszögének felel meg. $\square$

Tovább már nem mehetünk, mert nemszinguláris negyed- és magasabbrendű minor már sokféle lehet.

13.3. Definíció: *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf* **spektruma** (**spectra**) *az A adjacencia mátrixának sajátértékeinek halmaza (karakterisztikus polinomjának gyökei).* $\square$

Ha $\vec{u} = [u_1, ..., u_n]^T$ *sajátvektor* , definíciójából következik, hogy a hozzá tartozó λ sajátértékkel együtt kielégíti az $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, azaz a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,,j} u_j = \lambda u_i \qquad (i \le n) \tag{13.1}$$

egyenletet. Egyszerű gráf esetén a fenti egyenletrendszer

$$\sum_{v_j \text{ szomszédja } v_i \text{ -nek}} u_j = \lambda u_i \qquad (i \le n) \tag{13.2}$$

alakban is írható, felhasználva a $V = \{v_1, ..., v_n\}$ jelölést és az adjacencia mátrix definícióját.

Ebből pedig k -reguláris gráfokra azonnal adódik az alábbi Tétel.

13.4. Tétel: *Ha G egyszerű k -reguláris gráf, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor*
(i) *k sajátértéke G -nek (azaz a spektrumnak eleme)*
(ii) *ha G összefüggő, akkor a k sajátérték multiplicitása* 1 .
(iii) G bármely *λ sajátértékére* $|\lambda| \le k$.

Bizonyítás: **(i)** Az $\vec{u} = [1, ..., 1]^T$ vektor könnyen láthatóan sajátvektor.

(ii) Elég azt belátni, hogy a k -hoz tartozó bármely sajátvektor koordinátái azonosak. Ebből az is következik, hogy nincs a k -hoz tartozó sajátvektorok között két lineárisan független. Ismeretes ugyanis, hogy egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus egyenletének többszörös gyökeihez több lineárisan független sajátvektor is található. Legyen tehát a G gráf A csúcsmátrixának k sajátértékéhez tartozó sajátvektora $\vec{x} = [x_1, ..., x_n]^T$, és legyen e vektor koordinátái között x_j egy legnagyobb abszolút értékű. Tekintsük az $A\vec{x} = k\vec{x}$ sajátvektor - egyenletben a j -edik koordinátát azaz a (13.2) egyenletrendszer j -edik elemét: $\vec{a}_j\vec{x} = kx_j$, vagyis

$$\sum_{v_i \text{ szomszédja } v_j \text{ -nek}} x_i \quad = \quad k \cdot u_j \qquad .$$

A baloldali összegnek G regularitása miatt éppen k tagja van, így $|x_j|$ maximalitása miatt ezen k számú koordináta mindegyike éppen x_i . Ugyanígy látható be, hogy a j -edik csúcspont szomszédainak szomszédaihoz tartozó koordináták is x_j -vel egyenlőek, stb. Így G összefüggősége miatt az $\vec{x}$ sajátvektor mindegyik koordinátája valóban megegyezik.

(iii) Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges sajátérték és $\vec{y}$ egy λ -hoz tartozó sajátvektor. Legyen y_j az $\vec{y}$ egyik legnagyobb abszolút értékű koordinátája. A (13.2) egyenletrendszer i -edik tagja alapján

$$|\lambda| \cdot |y_j| \quad = \quad \left| \sum_{v_i \text{ szomszédja } v_j \text{ -nek}} y_i \right| \quad \leq \quad \sum_{v_i \text{ szomszédja } v_j \text{ -nek}} |y_i| \quad \leq \quad k \cdot |y_j|$$

és így $|\lambda| \leq |k|$ mivel $y_j \neq 0$. $\square$

13.5. Tétel: *Ha a tetszőleges, n csúcsú egyszerű k -reguláris gráf ($k \in \mathbb{N}$ tetszőleges)* spektruma

$$\lambda_1 = k \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \quad ,$$

akkor a gráf komplementerének sajátértékei

$$n - 1 - \lambda_1 \quad \textit{és} \quad -\lambda_i - 1 \quad (2 \leq i \leq n) \quad .$$

Bizonyítás: Egy n csúcsú egyszerű, k -reguláris gráf komplementere nyilván $(n-1-k)$ -reguláris, így $n-1-\lambda_1 = n-1-k$ valóban sajátértéke, sőt maximális abszolútértékű sajátértéke $\overline{G}$ -nek, az $\vec{1} := [1, .., 1]^T$ sajátvektorral.

Legyen G -nek az A csúcsmátrix szimmetriája miatt létező ortogonális sajátvektor - rendszere $\vec{v}_1 = \vec{1}, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$, és tartozzanak e vektorok rendre a $\lambda_1 = k \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ sajátértékekhez. Belátjuk, hogy e vektorok a komplementer $\overline{G}$ gráfnak is sajátvektorai. Ha ugyanis $\overline{A}$ jelöli a $\overline{G}$ komplementer gráf csúcsmátrixát, akkor $\overline{A} = \mathbb{I} - A - E$ ahol $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a csupa 1 -ből álló mátrix és $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix. Ekkor pedig

$$\overline{A} \cdot \vec{v}_i \quad = \quad (\mathbb{I} - A - E) \cdot \vec{v}_i \quad = \quad \mathbb{I} \cdot \vec{v}_i - A \cdot \vec{v}_i - E \cdot \vec{v}_i \quad .$$

A választott ortogonalitás miatt $\vec{1}^T \cdot \vec{v}_i = 0$, ami alapján $\mathbb{I} \cdot \vec{v}_i = 0$ a nullmátrix, valamint a feltevések miatt $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$. Ez pedig az

$$\overline{A} \cdot \vec{v}_i = (-\lambda_i - 1) \cdot \vec{v}_i$$

egyenlőséget, vagyis a bizonyítás végét jelenti. $\square$

A következő összefüggések is beláthatók, a részletek például Andrásfai Béla $[AB]$ vagy Johnsonbaugh $[JoRi,'86]$ és Rosen $[RoKe,'91]$ könyveiben találhatók meg.

13.6. Tétel: *Tetszőleges $G=(V,E)$ összefüggő (nem feltétlenül reguláris) gráf legnagyobb sajátértékének multiplicitása* 1 . $\square$

13.7. Tétel: *Ha G' tetszőleges részgráfja az egyszerű, tetszőleges G gráfnak, és legnagyobb sajátértékeik rendre λ' és λ , akkor*

$$0 \le \lambda' \le \lambda \quad . \qquad \square$$

Most pedig lássunk néhány mélyebb összefüggést gráfok és spektrumaik vonatkozásában.

13.2. További eredmények

Csak néhány kiragadott eredményt mutatunk be, az elméletnek még áttekintésére sem vállalkozhatunk.

13.8. Tétel: (Lovász László-Pelikán József[1], 1973) *Egy tetszőleges egyszerű gráf, melynek Λ maximális sajátértéke, akkor és csak akkor kétpólusú, ha $-\Lambda$ szintén a gráf egyik sajátértéke.* $\square$

13.9. Tétel: (Lovász László-Pelikán József, 1973) *Egy tetszőleges egyszerű gráf akkor és csak akkor kétpólusú ha spektruma szimmetrikus* 0 *-ra.* $\square$

13.10. Tétel: *Ha egy tetszőleges kétpólusú gráfnak* 0 *nem sajátértéke, akkor a gráfban létezik* 1 -faktor. $\square$

13.11. Tétel: (Lovász László,1979) *Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf, amely csúcsainak fokszáma d és D között van. Ekkor, ha Λ maximális sajátértéke G -nek*

$$\max(d, \sqrt{D}) \le \Lambda \le D \ .$$

13.12. Tétel: *Ha G tetszőleges egyszerű gráf melynek Λ maximális sajátértéke, akkor csúcsainak átlagos fokszáma*

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \delta(v) \le \Lambda$$

[1] elsősorban algebrával foglalkozik, jelenleg az ELTE Algebra Tanszékének professzora, a matematikai diákolimpiai csapat rendszeres kísérője.

és G kromatikus számára

$$\chi(G) \le \Lambda + 1 \quad . \qquad \square$$

13.13. Tétel: (**Barátság Tétel**: Erdős Pál, Rényi Alfréd[(2)], T.Soós Vera[(3)] 1966, függetlenül Wilf,H.S. 1971) *Egy tetszőleges egyszerű gráf akkor és csak akkor W_k szélkerék ha bármely két csúcsának pontosan egy közös szomszédja van.* $\square$

Legutolsó Tételünk (mely csak látszólag triviális) kimondásában a sajátértékek ugyan nem szerepelnek, "csak " a bizonyításában.

13.3. Feladat és megoldása

13.1. Feladat: Számítsuk ki a K_n (teljes), S_n (*n ágú* csillag) és a $K_{p,q}$ (teljes kétpólusú) gráfok karakterisztikus polinomjait!

Megoldás:

$$p_{K_n}(\lambda) = (\lambda+1)^{n-1}(n-1-\lambda) \; ,$$
$$p_{S_n}(\lambda) = \lambda^{n-1}(n-\lambda^2) \; ,$$
$$p_{K_{p,q}}(\lambda) = (\lambda+1)^{p+q-2}(\lambda^2-pq) \; .$$

$\square$

13.4. Hivatkozás

[AB] Andrásfai Béla: *Graph Theory: Flows, Matrices,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991

2) Rényi Alfréd (1921-1969) kiváló magyar matematikus. Számelméleti, valószínűségszámítási, információelméleti eredményeivel és a matematika népszerűsítésével szerzett kiemelkedő érdemeket.

3) elsősorban kombinatorikával és gráfelmélettel foglalkozik, jelenleg az MTA Matematikai Kutatóintézetében dolgozik.

14. fejezet

Hálózati folyamok

HÁLÓZATI FOLYAMOK, FORD-FULKERSON TÉTELE A JAVÍTHATÓ UTAK MÓDSZERÉVEL. EDMONDS ÉS KARP TÉTELEI. ÁLTALÁNOSÍTÁSOK. EGY ALKALMAZÁS PÁROS GRÁFOKRA.

Mint a 7.”Feszítőfák” c. Fejezet bevezetésében említettük, a gráfelmélet egyik fontos alkalmazási területe pl. közüzemi (víz-, gáz-, stb.) hálózatok tervezése és optimalizálása. Jelen fejezetben egy újabb problémát vizsgálunk. Egy gráf éleit vezetékeknek tekintjük, és úgy képzeljük, hogy az éleken keresztül egy kitüntetett csúcsból, a forrásból szeretnénk valamilyen anyagot vagy energiát (áram, olaj, stb.) eljuttatni egy másik megjelölt csúcsba, a nyelőbe. A feladat egyszerűsítése érdekében a fejezet első részében feltesszük, hogy az éleken keresztül csak egyik irányba haladhat az anyag, vagyis irányított gráfokkal foglalkozunk.

14.1. Folyamok

Kezdjük a precíz definíciókkal.

14.1. Definíció: **(i)** *Egy* **hálózat** *(***network***) áll egy $G = (V, E)$ irányított gráfból, két kitüntetett csúcsból: $a \in V$* **forrás** *(***source***) és $b \in V$* **nyelő** *(***sink***), valamint egy tetszőleges $c : E \to \mathbb{R}_+$ pozitív élfüggvényből, amit* **kapacitás***nak* (**capacity**) *hívunk.*

(ii) *Tetszőleges $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ nemnegatív élfüggvény* **folyam** *(***flow***),* *ha minden* $v \in V$, $v \neq a, b$ *csúcspontra teljesül Kirchoff I. törvénye:*

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x,v) = \sum_{(v,y)\in E} f(v,y) \ .$$

E két mennyiségre külön jelölést vezetünk be ($v = a, b$ *esetén is*):

$$f^-(v) := \sum_{(x,v)\in E} f(x,v) \quad \textit{és} \quad f^+(v) := \sum_{(v,y)\in E} f(v,y) \tag{14.1}$$

(iii) *Egy folyam* **megengedett** *(***feasible***), ha*

$$f(e) \leq c(e)$$

minden $e \in E$ *esetén (azaz nem lépjük túl az élek kapacitásait).* □

Megjegyzések: **(i)** Bár könyvünkben irányított gráfokkal nem foglalkozunk, az 1. Fejezetben említettük, hogy $G = (V, E)$ akkor *irányított gráf*, ha $V \neq \emptyset$ tetszőleges nemüres halmaz és $E \subseteq V \times V$ (Descartes - szorzat)

(ii) Kirchoff I. törvénye közismerten azt fejezi ki, a befolyó (elnyelt) anyag mennyisége megegyezik a kifolyó (termelt) anyag mennyiségével minden csomópontnál, a forrás és a nyelő kivételével.

14.2. Definíció: *Egy* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *folyam* **értéke** (**value of** f)

$$F(f) := f^+(a) - f^-(a) \quad . \qquad \square$$

Ez nem más, mint a *forrás* által termelt nettó anyag/energia.

14.3. Tétel: *A folyam értéke*

$$F(f) = f^-(b) - f^+(b)$$

vagyis a nyelő *által elnyelt nettó anyag.*

Bizonyítás: A bizonyítás lényege, hogy Kirchoff I. törvénye teljesül minden csúcsra. A hosszadalmas számolást most nem részletezzük. □

14.4. Definíció: *Egy* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *megengedett folyam* **maximális**, *ha nincs olyan* $g : E \to \mathbb{R}_+$ *megengedett folyam, amelyre* $F(g) \gneqq F(f)$ *lenne.* □

Felmerül a **kérdés:** *"Adott hálózathoz van-e maximális értékű megengedett folyam?"* Nincs kizárva ugyanis, hogy mondjuk f egyik élen sem éri el a kapacitást, f értékét ezen az élen kicsit növelve (mint pl. az alábbi, javítható utakat használó algoritmusban) a kapott megengedett folyamok $F(f)$ értékei mindig kicsit nőnek, de nincs közöttük maximális! Ezen a dilemmán még az sem segít, hogy minden f megengedett folyamra

$$0 \leq F(f) \leq \sum_{(a,y)\in E} c(a,y) - \sum_{(y,a)\in E} f(y,a) \leq \sum_{(a,y)\in E} c(a,y) - 0$$

azaz minden f (megengedett) folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint ha az a forrásból kiinduló éleken maximális kapacitással áramlik be az anyag, visszafelé pedig semmi sem folyik .

14.5. Megjegyezzük, hogy az **azonosan nulla folyam** ($f_0(e) = 0$ minden élre) értéke $F(f_0) = 0$, míg *nem* minden hálózatban lehetséges olyan *megengedett* f folyam, amelyre $F(f) = \sum_{(a,y)\in E} c(a,y)$ lenne. Ennek nem mond ellent Ford és Fulkerson alábbi tétele.

14.6. Tétel (Ford[1]-Fulkerson[2]): *Tetszőleges adott hálózatban* van *maximális folyam.*

Bizonyítás: Alkalmazni fogjuk Weierstrass[3] jólismert tételét, mely szerint *"minden folytonos $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvénynek, ha $Dom(F)$ korlátos és zárt, van maximuma és minimuma".*

Feleltessük meg ugyanis minden megengedett $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ folyamnak az

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{f}} := (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)) \in \mathbb{R}^m$$

m -dimenziós pontot, $m = |E|$, ahol $\{e_1, ..., e_m\}$ a hálózat éleinek egy tetszőleges, rögzített felsorolása. A fenti $\vec{x}_f$ pontok mindegyike a

$$K := \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \; : \; 0 \leq x_i \leq c(e_i) \; , \; 1 \leq i \leq m\}$$

m-dimenziós téglatestbe esik, amely korlátos és zárt. Pontosabban, a megengedett f folyamokhoz rendelt $\vec{x}_f$ pontok nem töltik ki teljesen a K téglatestet, hiszen minden $w \in V$ csúcsra teljesülnie kell Kirchoff (14.1)-ban felírt I. törvényének. Ezt lefordítva az $\vec{x}_f = (x_1, ..., x_m)$ pontok koordinátáira az

$$\sum_{k\in X} x_k = \sum_{\ell\in Y} x_\ell \tag{14.2}$$

[1] Lester Randolph Ford Jr. (1927-2017) amerikai matematikus
[2] Delbert Ray Fulkerson (1924-1976) amerikai matematikus
[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) német matematikus

egyenlőséget kapjuk, ahol $x_k = f(e_k)$ a w-ből kijövő $e_k = (w, v_{i_k})$ élhez rendelt folyamérték, vagyis $\{e_k : k \in X\}$ a w -ből kijövő élek halmaza, míg $x_\ell = f(e_\ell)$ a w-be bejövő $e_\ell = (v_{i_\ell}, w)$ élhez rendelt folyamérték, azaz $\{e_\ell : \ell \in X\}$ a w -be bejövő élek halmaza. A (14.2) egyenletű x_f pontok halmaza pedig egy (valahány dimenziós) hipersík $\mathbb{R}^m$ -ben. Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$F : f \mapsto F(f)$$

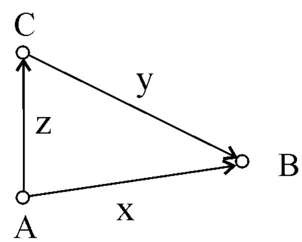
illetve az

$$\mathbf{F} : \vec{x}_f \mapsto F(f)$$

függvény *értelmezési tartománya* (a megengedett f folyamoknak megfelelő $\vec{x}_f \in \mathbb{R}^m$ pontok halmaza) pontosan $\mathbb{R}^m$ néhány hipersíkjának K-val és egymással való metszete, tehát zárt halmaz. Természetesen korlátos is, hiszen része K -nak.

F folytonos, mert az f folyam értékét ügyesen ”kicsit” $\pm$ megváltoztatva (”mennyi folyik az egyes éleken”) a folyam megengedett marad, és az $F(f)$ érték is csak ”kicsit” változik meg. (A precíz számításoktól most eltekintünk.) Weierstrass tétele alapján *van* f megengedett folyam, amire $F(f)$ maximális. $\square$

Példaképpen tekintsük az alábbi nagyon egyszerű gráfot:



Példa: a $G = (V, E, c)$ hálózat
14.1. ábra

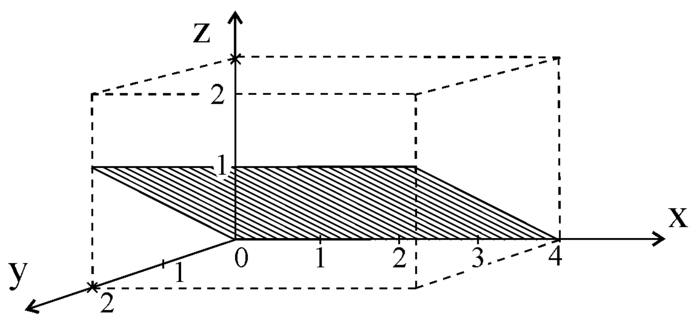
A kapacitások miatt

$$Dom(F) \subseteq K := [0, 4] \times [0, 2] \times [0, 5]$$

Ekkor csak egyetlen csúcsra, a C -re kell feltétel a tényleges $Dom(F)$ meghatározására:

$$y = z$$

vagyis $Dom(F)$ az x tengelyre illeszkedő, mindkét másik koordinátatengelylyel 45° -os szöget bezáró síknak K -ba eső darabja:



$Dom(F)$

14.2. ábra

Azonban Weierstrass tétele (és így a fenti bizonyítás) is csak a maximális folyam *létezését* igazolja, semmiféle útmutatást nem ad annak megkereséséhez. Az alábbi tétel bizonyításából azonban kiolvasható egy konstruktív *algoritmus* maximális folyamok keresésére, ehhez előbb egy definícióra van szükségünk.

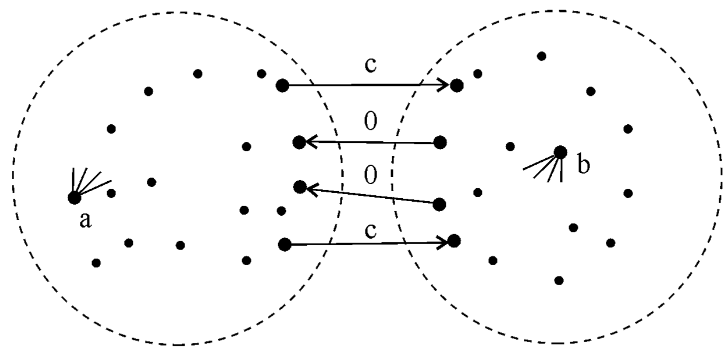
14.7. Definíció: **(i)** *A V csúcshalmaz egy $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ partícióját (felosztását)* $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ - **vágás***nak (***cut***) nevezzük, ha*

$$a \in V_1 \quad \textit{és} \quad b \in V \quad .$$

(ii) *Egy* (V_1, V_2) *vágás* **kapacitása** *(* **capacity** of (V_1, V_2)*)*

$$C(V_1, V_2) := \sum_{\substack{(x,y)\in E \\ x\in V_1\ ,\ y\in V_2}} c(x,y) \quad \square$$

Úgy képzeljük, hogy az a forrást tartalmazó V_1 "országból" kell a b nyelőt tartalmazó V_2 "országba" a hálózaton keresztül az anyagot eljuttatnunk, a kapacitás éppen a "határ" (V_1 -ből V_2 -be mutató élek) maximális áteresztőképessége, ha a visszafelé mutató éleket lezárjuk.



Vágás és kapacitása.
14.3. ábra

14.8. Tétel (Ford-Fulkerson)**:**

$$\max\{F(f) : f \textit{ megengedett folyam}\} = \min\{C(V_1, V_2) : (V_1, V_2) \textit{ vágás}\}$$

azaz a maximális folyam értéke megegyezik a legszűkebb keresztmetszetű (kapacitású) vágás kapacitásával.

A tétel úgynevezett "*minimax*" tétel , mert két összefüggő mennyiség egyikének minimumának és másikának maximumának egyezését mondja ki. A 11.8 Tételben már találkoztunk ezzel a módszerrel: bizonyos összeszámlálási problémák maximumát/minimumát ilyen trükkel számítjuk ki.

Bizonyítás: $\boxed{\leq}$ A $\max F(f) \leq \min C(V_1, V_2)$ egyenlőtlenség "nyilvánvaló": az eljuttatott anyag (nettó) legfeljebb annyi lehet, amennyi a legszűkebb keresztmetszetű vágás kapacitása, hiszen több anyag nem "fér" át. (A részletes számolástól most is eltekintünk.) Továbbá, ez a megjegyzésünk tetszőleges folyamra és vágásra igaz!

$\boxed{\geq}$ Ez már nem nyilvánvaló. (Miért?)

Hogy a fordított irányú egyenlőtlenséget belássuk (és a maximális folyamot meg is találjuk) szükségünk van egy újabb fogalomra.

14.9. Definíció: Javítható (*vagy* **javító-**) **út***nak* (**correcting path**) *nevezzük csúcspontok egy $(x_0, x_1, x_2, ..., x_k) \subset V$ sorozatát, amelynek elemei mind különbözőek, és minden $i = 0, 1, ..., k-1$ index esetén teljesül, hogy*

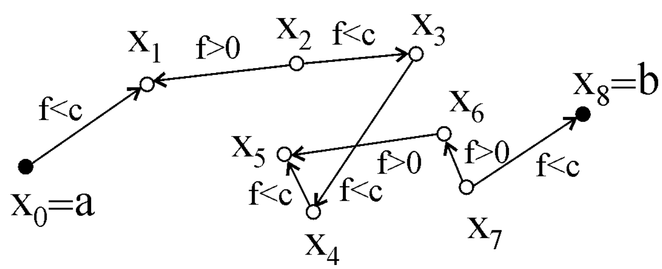
$$(x_i, x_{i+1}) \in E \quad \Rightarrow \quad f(x_i, x_{i+1}) \lneqq c(x_i, x_{i+1})$$

azaz előre mutató élek teljes kapacitása nincs kihasználva, és

$$(x_{i+1}, x_i) \in E \quad \Rightarrow \quad f(x_{i+1}, x_i) \gneqq 0 \quad ,$$

azaz visszafelé mutató éleken folyik valami, visszafelé. $\square$

Megjegyzés: mint látható, a javítható utak *nem* irányított utak: az élek oda-visszafelé is mutathatnak, mint például az alábbi ábrán:



Egy javítható út
14.4. ábra

Mindkét elnevezést fogjuk használni az alábbiakban, bár a jelentésük közötti apró eltérést nem részletezzük[4]

14.10. Állítás: *Egy megengedett folyam pontosan akkor maximális, ha nincs javítható út a -ból (forrás) b -be (nyelő).*

Bizonyítás: $\boxed{\Rightarrow}$ Ha van javító út a -ból b -be, akkor ezen út mentén javítjuk az f folyamot a következők szerint: növeljük $F(f)$ értékét. Ha ez sikerül, akkor ugyanis $F(f)$ nem lehetett maximális.

Legyen először is $i = 0, 1, ..., k-1$ esetén

$$\varepsilon_i := \begin{cases} c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}) & \textit{ha az } (x_i, x_{i+1}) \in E \textit{ él előre mutat} \\ f(x_{i+1}, x_i) & \textit{ha az } (x_{i+1}, x_i) \in E \textit{ él visszafelé mutat} \end{cases}$$

Előre- ill. hátrafelé mutató éleknél legfeljebb ennyivel lehet módosítani, pontosabban *növelni* a folyam (nettó) értékét. Legyen továbbá

$$\varepsilon := \min_{i=0,\ldots,k-1} \varepsilon_i$$

---

[4] (és a vizsgán sem kérjük)

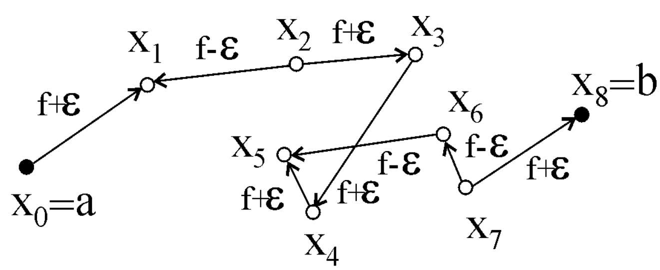
Ekkora értékkel ugyanis biztosan tudjuk növelni f folyamunk értékét, vagyis definiálhatjuk a $g : E \to \mathbb{R}_+$ folyamot: legyen $e \in E$ esetén

$$g(e) := \begin{cases} f(e) + \varepsilon & \textit{előre mutató éleknél} \\ f(e) - \varepsilon & \textit{visszafelé mutató éleknél} \\ f(e) & \textit{ha az } e \textit{ él nem szerepel a javító útban} \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy g valóban *folyam* és *megengedett* is:

1) $0 \leq g(e) \leq c(e)$ a gráf *minden* $e \in E$ élére, hiszen ε a legkisebb volt, amivel módosítva $f(e)$ - et a javítható út élein, sem az él kapacitását, sem a 0 -át nem lépjük túl illetve alul.

2) Kirchoff I. törvénye is teljesül minden $v \in V$ csúcsra, hiszen
- ha v nem szerepelt a javító útban, akkor semmi sem változott a v -hez csatlakozó éleken
- ha $v = x_i$ a javító útban és $1 \leq i \leq k-1$ (azaz v nem forrás és nem nyelő), azaz $v \neq a$ és $v \neq b$, akkor négy eset van aszerint, hogy v -be hány előre- és vissza mutató él csatlakozik (azon élek, melyek nem szerepelnek a javító útban, nem változtak):



A javító út módosításai
14.5. ábra

Láthatjuk mind a négy esetben, hogy a befolyó és kifolyó anyag különbsége változatlan maradt, vagyis g valóban megengedett folyam, ha f is az volt.

Könnyen látható, hogy $F(g) = F(f) + \varepsilon$, vagyis találtunk egy $F(f)$ -nél nagyobb értékű folyamot, hiszen $\varepsilon \gneqq 0$.

Ezzel bebizonyítottuk a 14.10.Állítás $\boxed{\Rightarrow}$ felét.

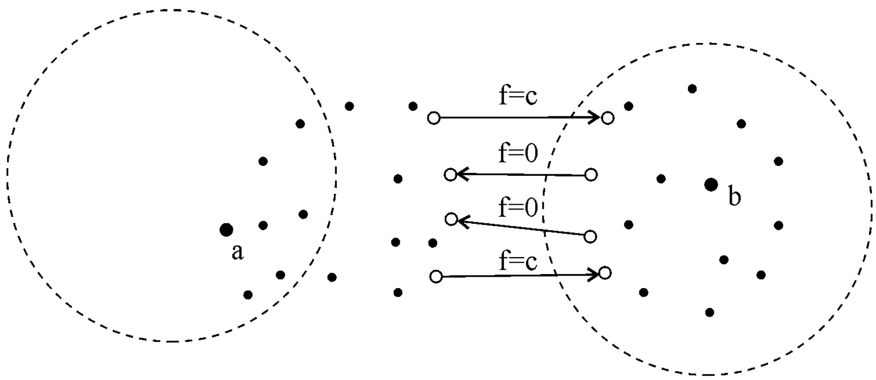
$\boxed{\Leftarrow}$ Ha nincs javító út a -ból b -be, akkor definiáljuk a (V_1, V_2) vágást:

$$\begin{aligned} V_1 \ &: \ = \{v \in V : \textit{a-ból } v \textit{ -be vezet javító út}\} \\ V_2 \ &: \ = V \backslash V_1 \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan ekkor, a javítható utak definíciója alapján, a V_1 és V_2 közötti $(x, y) \in E$ élekre

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x,y) & ha \quad x \in V_1 \;\; \textit{és}\; y \in V_2 \\ 0 & ha \quad y \in V_1 \;\; \textit{és}\; x \in V_2 \end{cases}$$

azaz V_1 -ből V_2 -be vezető éleken teljes gőzzel folyik előre, míg visszafelé semmi.



A telített folyam
14.6. ábra

Ekkor $F(f) = C(V_1, V_2)$, a folyam értéke megegyezik a vágás kapacitásával mert a határon teljes gőzzel megy minden V_1-ből V_2-be, és visszafelé semmi, a számolás részleteit most nem részletezzük. Ez pedig csak akkor lehet, ha f maximális, a Ford-Fulkerson tétel $\boxed{\leq}$ része alapján.

Ezzel befejeztük a 14.10.Állítás bizonyítását. $\square$

A javító utak módszerével, mint a fenti bizonyításban láttuk, **algoritmust** is adhatunk maximális megengedett folyamok keresésére.

14.11. Algoritmus: *Maximális folyam keresése javító utak segítségével.*

START: legyen $f(e) := 0$ **rem** azonosan 0 folyam
CIKLUS: **if** van javító út a -ból b -be **then** javítsuk egyiket
else STOP **rem** a folyam maximális.

Ez teljes egészében bebizonyítaná Ford és Fulkerson algoritmusát, amenynyiben biztosan tudnánk, hogy az algoritmus véges sok lépés után megáll.

14.12. Megjegyzések: *Az algoritmus végessége:*

(a) Amennyiben az élek kapacitásai egész számok, vagyis $c : E \to \mathbb{N}$, akkor az algoritmus során a folyam $f(e)$ értékei is egész számok, ε is egész szám, vagyis $\varepsilon \geq 1$. De ekkor

$$F(f) \leq f^{+}(a) = \sum_{(a,y)\in E} c(a,y)$$

(ld.(14.1)) miatt az algoritmus legfeljebb ennyi, $f^{+}(a) \in \mathbb{N}$ lépés után megáll.

(b) Ha a kapacitások racionális számok, vagyis $c : E \to \mathbb{Q}$, akkor a szereplő racionális számokat közös nevezőre hozva csak a számlálókkal kell foglalkoznunk, amit a fenti (a) esetben tárgyaltunk.

(c) Ha $c : E \to \mathbb{R}_{+}$, akkor vannak példák, amikor a fenti algoritmus végtelen sokáig fut, ha a több javítható út közül szerencsétlenül választ ki egyet! Azonban az alábbi ötlet (és Tétel) segítségünkre van:

14.13. Tétel (Edmonds[5]-Karp[6]): *Ha a fenti* 14.11. *Algoritmusban mindig a legrövidebb (legkevesebb pontból álló) javító utat javítjuk, akkor az algoritmus véges sok lépés után megáll.* □

Ezzel teljes egészében bebizonyítottuk Ford és Fulkerson tételét. ■

Most röviden megemlítjük a probléma néhány egyszerű általánosítását. Felhívjuk a figyelmet azonban, hogy a különféle hálózatoknak és szállítási optimalizálási problémáknak mind elméleti, mind gyakorlati szempontból rengeteg általánosítása és komoly elmélete van, ma is a kutatás tárgyát képezik. Most csak Andrásfai Béla [A] , Busacker-Saaty [BS], Ahuja-Magnanti-Orlin [AMO] és Lipi- Nemes - Novák [LNN] könyveit említjük meg példaképpen.

14.14. Általánosítások

(a) Ha több forrás $a_1, ..., a_t$ és/vagy több nyelő $b_1, ..., b_r$ van adva, akkor *valamelyik* a_1-ből keresünk valamelyik b_i-be javítható utat, és a (V_1, V_2) vágásokra az $a_1, ..., a_t \in V_1$ és $b_1, ..., b_r \in V_2$ tartalmazókat követeljük meg, a többi rész értelemszerűen (kismértékben) változik.

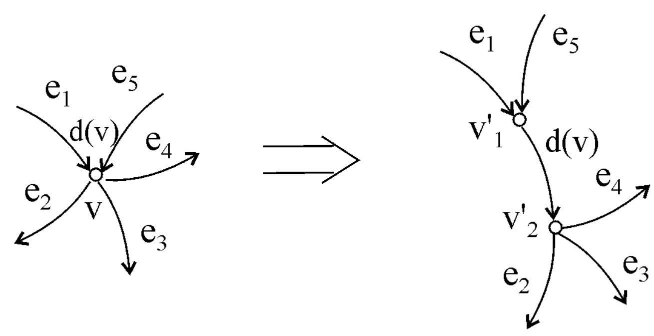
(b) Irányítatlan gráfok esetén a gráf éleit megduplázzuk: az $\{x, y\}$ él helyett mind az (x, y) és (y, x) éleket vesszük, mindkettőt az eredeti $c(x, y)$ kapacitással. A többi részletet az Olvasó meggondolhatja.

---

5) Jack R. Edmonds (1934-) amerikai születésű kanadai matematikus

6) Richard Manning Karp (1935-) amerikai matematikus

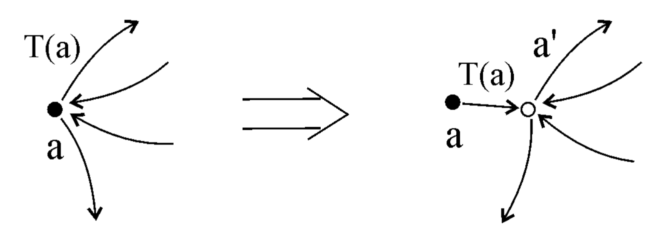
(c) Ha a pontoknál is elő van írva ún. ”*pontkapacitás*” $d(v)$, $v \in V$, akkor a pontokat megkettőzzük: v_1', v_2' , a közöttük húzott *új* irányított élhez a $d(v)$ kapacitást rendeljük, a bemenő élek v_1'-be, a kimenő élek v_2' -be csatlakoznak.



Csúcs kettőzése
14.7. ábra

(d) Ha a forrás(ok)nak maximális T_a teljesítményük van (előírva), akkor felvesszük egy új a' csúcsot, őt nevezzük ki forrásnak míg az eredeti a csúcs forrás-jellegét megszüntetjük, az (a', a) él kapacitása legyen T_a , és az a -hoz csatlakozó eredeti élek változatlanok maradjanak.

Hasonlóan járunk el, ha a nyelőnek van előírva maximális T_b teljesítménye/raktározási kapacitása.



Forrás és nyelő kapacitása
14.8. ábra

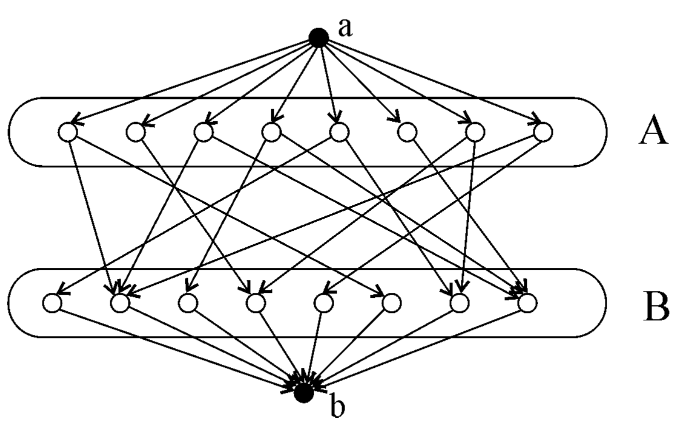
(e) s.t.b. ... .

14.2. Alkalmazások

Szemléltetésképpen egy egyszerű alkalmazást mutatunk, ami elsősorban arra hívja fel a figyelmet, hogy a gráfelmélet különböző területei között mélyebb kapcsolat van, mint első látásra gondolnánk.

14.15. Alkalmazás: *Maximális párosítás keresése max. folyamkereső algoritmus felhasználásával.*

Legyen $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ adott páros gráf. Egészítsük ki a gráfot $a, b, \notin V$ új csúcsokkal: a forrás, b nyelő, valamint a -ból húzzunk A minden csúcsába, B minden csúcsából pedig b -be új éleket. Irányítsuk az így kapott gráf éleit a következőképpen: a -ból A -ba, A-ból B-be és B -ből b-be, és legyen minden él kapacitása 1.



Maximális párosítás keresése

14.9. ábra

Ekkor igazolható, hogy minden maximális folyam esetén az éleken vagy 0 vagy 1 mennyiség halad át, továbbá A és B közötti azon élek halmaza, melyeken 1 a folyam értéke, egy maximális párosítást ad A és B között. $\square$

További alkalmazásokat és általánosításokat talál az Olvasó Lipi-Nemes-Novák $[LNN]$ (minimális költségű szállítás) vagy az alábbi Hivatkozások részben felsorolt könyvekben.

14.3. Hivatkozások

[A] Andrásfai Béla: *Graph Theory: Flows, Matrices,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991

[AMO] Ahuja,R.K., Magnanti,T.L., Orlin,J.B.: *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications,* Prentice Hall, New-Jersey, 1993.

[BS] Busacker,R.G., Saaty,T.L.: *Véges gráfok és hálózatok,* Műszaki Kiadó, Budapest, 1969

[LNN] Lipi Gábor, Nemes Áron, Novák István: *A kínai hadseregtől az utazó ügynökig (Gráfok gépközelben),* Novotrade, 1990

[T] Tóth Irén: *Operációkutatás (Matematika üzemgazdászoknak),* Tankönyvkiadó

15. fejezet

Matroidok

ELEMI DEFINÍCIÓK ÉS ÖSSSZEFÜGGÉSEK. KÖRÖK ÉS BÁZISOK SZÁMA.

Mint a 6."Fák" Fejezetben említettük, gráfok körmentessége és vektorok lineáris függetlensége között nagyfokú hasonlóság fedezhető fel. Jelen fejezetben e közös tulajdonság lényegét (axiómáit) mutatjuk be, ezen axiómákat kielégítő struktúrákat pedig *matroidok*nak[1] nevezzük.

Sőt, több más struktúrát is bemutatunk, melyek szintén matroidok. E struktúrákban megfeledkezünk a szokásos műveletekről (vektorterek) és az elemek közötti összefüggésekről (gráfok) vagy már nem is voltak műveletek, relációk (halmazrendszerek). Mindössze az alaphalmaz bizonyos, *függetlennek* nevezett részhalmazait, vagyis a *függetlenséget* önmagában vizsgáljuk! E közös általánosítás előnye az, hogy ha ezen axiómákból vezetünk le tételeket, akkor e tételekben felfedezett tulajdonságok, összefüggések *mindegyik* struktúrában egyszerre lesznek bizonyítottan igazak.

Sajnos az elmélet alapjait, néhány példát és eredményt csak röviden tudunk most könyvünkben bemutatni, az érdeklődő Olvasónak például Recski András [$ReAn,'89$] vagy Oxley [O] könyveit ajánlhatjuk.

15.1. Alapvető definíciók és tulajdonságok

15.1. Definíció (függetlenségi axiómák)**:** *Legyen S egy tetszőleges nem-*

[1] A lineáris függetlenség axiomatikus vizsgálata céljából Whitney vezette be a matroid ("mátrixokhoz hasonló struktúrák") fogalmát 1935 -ben.

Hassler Whitney (1907-1989) amerikai matematikus, elsősorban topológiával és gráfok színezéseivel foglalkozott.

üres de véges halmaz, és legyen $F \subseteq P(S)$ egy rendszere S részhalmazainak. Az $\mathcal{M} = (S, F)$ struktúrát **matroid***nak nevezzük, ha*

(I1) $\emptyset \in F$,

(I2) *ha $Y \in F$ és $X \subseteq Y$ akkor $X \in F$* (F **leszálló**[2])

(I3) *tetszőleges $X \subseteq S$ halmazra X maximális (F -ben tovább nem bővíthető) F -hez tartozó részhalmazai egyenlő méretűek.* □

15.2. Megjegyzések: (o) az (I3) pontban szereplő $Y \subseteq X$ részhalmaz **F -ben tovább nem bővíthető** tulajdonság azt jelenti, hogy *nincs* olyan $Z \in F$ amelyre $Y \subsetneq Z \subseteq X$ teljesülne.

(i) A matroidok *nem* algebrai (más szóval elsőrendű) struktúrák (mint a vektorterek sem a + és · műveletekkel), erre a kérdésre sem térhetünk ki most részletesen.

(ii) Ha felidézzük a lineáris algebrában a független vektorhalmazokról tanult egyszerű állításokat akkor észrevehetjük, hogy a fenti axiómák éppen ezeket a tulajdonságokat összegezik (a vektortér + és · műveletei nélkül), a 15.3. Állításban bemutatott változataikkal együtt. S a vektortér alaphalmaza, elemei a vektorok (pontosabban csak véges sok adott vektor), és

$$F = \{X \subseteq S : X \text{ független}\} \quad . \tag{15.1}$$

Ezért is hívják a fenti (I1)-(I3) axiómákat **függetlenségi (independence) axiómák** -nak és F elemeit **független részhalmazok**-nak.

(iii) A matroidok axiómarendszere sem egységes, előfordulhat, hogy más könyvben nem pontosan a fenti (I1)-(I3) axiómákkal találkozunk. Azonban a különböző axiómarendszerek egyenértékűsége általában egyszerűen bizonyítható, legtöbb könyvben ezt meg is mutatják. Az S alaphalmaz végességét sem lényeges feltennünk, a (véges) halmazrendszerekkel és hipergráfokkal való kapcsolat könyebb tanulmányozása végett szoktuk csak feltenni. Nem árt tudnunk, hogy a matroidok speciális hipergráfok (halmazrendszerek). Az alábbiakban csak röviden felsorolunk néhány, az (I1)-(I3) axiómákkal ekvivalens tulajdonságot.

15.3. Állítás: (i) *Az alábbi tulajdonság ekvivalens* (I1) *-el:*

(I1') F nemüres

(ii) *Az alábbi tulajdonságok mindegyike ekvivalens* (I3) *-al:*

(I3') (**Kiegészítési tulajdonság**) *Ha $X, Y \in F$ és $|X| < |Y|$ akkor van olyan $s \in Y \setminus X$ amelyre $X \cup \{s\} \in F$.*

---

[2] az $X \supseteq Y \Rightarrow X \in F$ feltétel esetén F -et **felszálló** -nak neveznénk

(I3") *Ha* $X, Y \in F$ *és* $|Y| = |X| + 1$ *akkor van olyan* $s \in Y \backslash X$ *amelyre* $X \cup \{s\} \in F$. $\square$

Néhány általános elnevezés következik az alábbiakban.

15.4. Definíció: *S a matroid* **alaphalmaz***a, F elemeit* **független részhalmazok***nak nevezzük. A* 15.1.(I3) *axiómában az $X \subseteq S$ halmaz F -beli részhalmazainak megkövetelt közös méretét az X* **halmaz rangjá***nak* (**rank**) *nevezzük, és* $\mathbf{r(X)}$ *-el jelöljük. Az S alaphalmaz rangja az $\mathcal{M}$* **matroid rangja,** *azaz* $\mathbf{r}(\mathcal{M}) := r(S)$. $\square$

És most lássuk a beígért példákat matroidokra.

15.5. Példák (i) Legyen S egy tetszőleges vektortér tetszőleges véges részhalmaza, és legyen $F \subseteq P(P(S))$ a (15.1) egyenlőséget kielégítő halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{M} = (S, F)$ -et **koordinátázható (matric) matroid** -nak nevezzük[3].

(ii) Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Legyen a matroid alaphalmaza a gráf éleinek halmaza: $S := E$, és a *körmentes* élhalmazokat nevezzük független részhalmazoknak. Gráfokból a fenti módon származtatott matroidokat **grafikus (graphic) matroidok** -nak nevezzük.

(iii) Tetszőleges $m, k \in N$ természetes számok esetén $\mathbf{U_{m,k}}$ jelölje a következő struktúrát, amit **uniform matroid** -nak nevezünk. S egy tetszőleges m -elemű halmaz, és $X \subseteq S$ legyen pontosan akkor független ha $|X| \leq k$.

$k = m$ esetén az alaphalmaz minden részhalmaza *független*, ezt az $U_{m,m}$ matroidot **szabad (free) matroid** -nak nevezzük.

Az S halmaz mindhárom fenti esetben végtelen is lehet.

(iv) Legyen S tetszőleges nemüres halmaz és legyen $\{S_1, ..., S_t\}$ tetszőleges partíciója S -nek, továbbá legyenek $g_1, ..., g_t$ tetszőleges pozitív természetes számok. Definiáljuk az $X \subseteq S$ részhalmazt pontosan akkor függetlennek ha $|X \cap S_i| \leq g_i$ minden $i \leq t$ esetén. Az így kapott matroidokat nevezzük **partíció matroidok**-nak.

(v) Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges egyszerű gráf. Legyen $S := V$ és $X \subseteq S$ legyen független pontosan akkor ha van G -nek olyan párosítása (matching) ami tartalmazza X -et. Az így kapott matroidot **párosítási** (**matching**) matroidnak nevezzük.

Bizonyíthatóan persze vannak még más matroidok is, nehéz kérdés a különféle matroidok és kapcsolataik jellemzése, osztályozása, valamint a véges

[3] Valószínűleg a *matrix, matric* szavakból ered a *matroid* elnevezés.

(páronként nem izomorf) matroidok feltérképezése, egyelőre csak Acketa $[A]$ atlaszát ajánlhatjuk.

Ami bennünket érdekel: hogyan lehet lineáris algebrai és gráfelméleti fogalmakat az általános matroidokra átvinni.

15.6. Állítás: *Tetszőleges $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ matroid rangfüggvénye független halmazokon a halmaz számosságát adja, azaz*

$$r(X) = |X| \quad \textit{minden } X \in \mathcal{F} \ \textit{részhalmazra.} \qquad \square$$

A rangfüggvény lényeges (alap-) tulajdonságait (axiómáit) foglalja össze az alábbi Tétel:

15.7. Tétel: *Tetszőleges $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ matroid esetén egy tetszőleges*

$$r : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{N}$$

halmazfüggvény pontosan akkor *rangfüggvénye $\mathcal{M}$ -nek, ha*

(r1) $r(\emptyset) = 0$,
(r2) $r(Y) \leq r(X)$ *ha* $Y \subseteq X$ (r **monoton növő**)
(r3) $r(X) \leq |X|$ (r **szubkardiális**[4])
(r4) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ (r **szubmoduláris**) $\square$

15.8. Definíció: *Az $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ matroid minimális összefüggő részhalmazait* **kör** *-nek* (**circuit, cycle**) *nevezzük,* azaz *$C \subset S$ kör ha $C \notin \mathcal{F}$ de bármely valódi részhalmaza $D \subsetneqq C$ -re már $D \in \mathcal{F}$.*

S maximális független részhalmazait $\mathcal{M}$ **bázisainak** (**base**) *hívjuk,* azaz *$B \subset S$ bázis ha $B \in \mathcal{F}$ de bármely $D \supsetneqq B$ esetén már $D \notin \mathcal{F}$.*

Egy $x \in S$ elem **hurok** (**loop**) *ha önmagában összefüggő,* azaz $\{x\} \notin \mathcal{F}$ *, azaz ha $\{x\}$ egyelemű kör.*

Az $u_1, ..., u_r \in S$ tetszőleges elemeket **párhuzamosok***nak* (**parallel**) *hívjuk, ha egyikük sem hurok de bármely kettő párhuzamos, azaz $\{u_i, u_j\} \notin \mathcal{F}$ tetszőleges $i \neq j$ indexekre .* $\square$

Néha a köröket **szimplexek-**nek is hívjuk.

Könnyen belátható az alábbi öszefüggés:

15.9. Állítás: *Tetszőleges $C \subseteq S$ kör esetén*

$$r(C) = |C| - 1 \quad . \qquad \square$$

---

[4] azaz "*számosság alatti*" (latin)

Koordinátázható matroidokban a *bázis* és *párhuzamos* jelzők pontosan megfelelnek a vektorterekben megismert fogalmaknak. Egyedül a $\underline{\mathbf{0}}$ -t (zérusvektort) hívjuk most *hurok* -nak, míg a *körök* (szimplexek) a minimális összefüggő vektorhalmazokat jelölik, amiket az I. "Kombinatorika" rész 7. "Extremális halmazrendszerek" c. Fejezetében vizsgáltunk.

Grafikus matroidok körei éppen a gráfelméleti *egyszerű* körök, míg bázisok a feszítőfák (amennyiben az eredeti gráf összefüggő volt), és éppen a párhuzamos élek (matroid-nyelven) párhuzamos elemek, a hurok-elemek pedig pontosan a hurokélek.

Az $U_{m,k}$ *uniform* matroidok bázisai a k -elemű, körei a $k+1$ -elemű részhalmazok. Hurokélei csak az $U_{m,0}$ matroidnak van, aminek *minden* eleme összefüggő azaz hurok. Párhuzamos elemei csak az $U_{m,1}$ matroidnak vannak, amelynek *bármely két* eleme párhuzamos.

Indoklás nélkül felsoroljuk a matroidok bázisainak néhány tulajdonságát, a bizonyítás például [Re $An,'$ 87] könyvében található meg.

15.10. Tétel: *Legyen* $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ *egy tetszőleges matroid. Ekkor*
(i) $\mathcal{M}$ *-ben* van *bázis.*
(ii) $\mathcal{M}$ *bázisai azonos méretűek (elemszámúak).*
(iii) *Ha* $X, Y \subseteq S$ *tetszőleges bázisok,* $x \in X$ *tetszőleges, akkor*

$$X \backslash \{x\} \cup \{y\}$$

is bázis valamely $y \in Y$ *elemre* (**kicserélési** *tulajdonság).* $\square$

HF: Gondoljuk át a fenti állítások jelentését koordinátázható, grafikus és uniform matroidokban!

15.2. Alkalmazások

A matroidok széleskörű gyakorlati alkalmazásait még felsorolni sem tudjuk. Csak elektronikai (áramkörök) és statikai alkalmazásaikat említjük meg, a részleteket Recski András nagyszerű $[ReAn,' 89]$ könyvében találhatjuk meg.

A fejezet hátrelevő részében csak az I."Kombinatorika" rész 7."Extremális halmazrendszerek" c. Fejezetében vizsgált probléma (adott vektorhalmazban található szimplexek száma) matroidokra vonatkozó néhány általánosítását említjük, a részletek Dósa György, Claude LaFlamme és Szalkai István $[DHLSz]$ cikkében találhatók meg.

15.11. Probléma: *Adott* $m \in \mathbb{N}$ *méretű és* $n \in \mathbb{N}$ *rangú matroidokban legkevesebb és legfeljebb hány kör és bázis lehetséges ?* $\square$

Megemlítjük, hogy a $[DHLSz]$ cikk eredményei nem csak a keresett mennyiségek minimális és maximális számát adják meg, hanem a szélsőséges struktúrák szerkezetét is feltárják.

A maximumról:

15.12. Tétel ($[DHLSz]$)**:** *Adott* $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n + 1$ *esetén*

(i) *egyedül csak az* $U_{m,n}$ *uniform matroidban található a lehető legtöbb* kör*, nevezetesen* $\binom{n+1}{m}$.

$m = n + 1$ *esetén minden* m *-méretű és* n *-rangú matroidnak pontosan* 1 (*egy*) köre *van.*

(ii) *egyedül csak az* $U_{m,n}$ *uniform matroidban található a lehető legtöbb* bázis*, nevezetesen* $\binom{n}{m}$. $\square$

A minimumról:

Körök:

15.13. Tétel ($[DHLSz]$)**:** **(i)** *Ha a matroidban hurkokat is megengedünk, akkor tetszőleges* $m, n \in \mathbb{N}$ *esetén egyértelműen létezik egy olyan* m *elemű és* n *rangú* $\mathcal{M}_0$ *matroid melynek egyetlen* bázisa *van (a lehető legkevesebb).*

(ii) *Ha a matroidban hurkokat nem engedünk meg de párhuzamos éleket igen, és a matroidban minden kör legfeljebb kételemű, akkor* $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ *csak a következő esetben tartalmazhat minimális számú* kört*.*

Legyen $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq S$ *egy tetszőleges bázisa* $\mathcal{M}$ *-nek, és* $\vartheta_i \in \mathbb{N}$ *jelölje az* a_i *elemmel párhuzamos elemek számát. Ekkor a feltétel:*

$$|\vartheta_i - \vartheta_j| \leq 1 \qquad (\forall i \neq j) \quad . \quad \square$$

15.14. Következmény: *Adott* $m, n \in \mathbb{N}$ *természetes számok,*

$$m = an + b \quad (0 \leq b \lneqq n)$$

esetén az m *méretű és* n *rangú matroidokban* a körök minimális száma

$$b \cdot \binom{a+1}{2} + (n-b) \cdot \binom{a}{2}$$

és speciálisan, $m = an \quad (azaz\ b = 0)$ *esetén* a körök minimális száma

$$n \cdot \binom{a}{2} \quad . \qquad \square$$

15.15. Tétel: (i) $m < 2n$ *esetén* $\mathcal{M}$ *pontosan akkor tartalmazhat lehető legkevesebb kört, ha (összes) körei (páronként) diszjunktak.*

(ii) $m \geq 2n$ *esetén* $\mathcal{M}$ *pontosan akkor tartalmazhat lehető legkevesebb kört, ha csak* két*elemű körei (párhuzamos elemek) vannak, és az elemek párhuzamosság szerinti ekvivalencia osztályainak méretei között az eltérés legfeljebb* 1 . $\square$

15.16. Megjegyzés: Az (i) pontban említett feltételnek több (nem izomorf) matroid tesz eleget, míg a (ii) pontban leírt matroid (izomorfizmustól eltekintve) egyértelmű.

Bázisok:

15.17. Tétel: *Tetszőleges* m *méretű és* n *rangú matroid pontosan akkor tartalmaz minimális számú bázist, ha van egy olyan* $\{a_1, ..., a_n\}$ *bázisa, amelyre* $\mathcal{M}$ *összes további eleme párhuzamos* a_1 *-el.*

Így a bázisok minimális száma

$$m - n + 1$$

és az extremális tulajdonságú $\mathcal{M}$ *matroid* egyértelmű. $\square$

15.18. Probléma (megoldatlan)**:** *Adjuk meg a körök és bázisok minimális számát azon matroidokban, amelyekben nincsenek sem hurok- sem párhuzamos elemek!*

Jellemezzük az ilyen matroidok szerkezetét! $\square$

15.19. Sejtés (G.Oxley, 1996)**:** *Ha* $\mathcal{M}$ *legkisebb köre* k *méretű, és* $\mathcal{M}$ *rangja* $n = k+1$, *akkor minimális számú köre egyedül az* $U_{k,n-3}$ *uniform matroidnak van, nevezetesen*

$$1 + 3 \cdot \binom{m-3}{k-1} + 3 \cdot \binom{m-3}{k-2} + 3 \cdot \binom{m-3}{k-3} \quad . \qquad \square$$

15.3. Feladatok

15.1. Feladat: Legyen S és $x, y \in S$ tetszőlegesek, és tartalmazza $\mathcal{F}$ az S alaphalmaznak azon $T \subset S$ részhalmazait, amelyekre $|T \cap \{x, y\}| < 2$. Mutassuk meg, hogy ekkor $(S, \mathcal{F})$ matroid.

15.2. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $U_{n,k}$ matroidok $k = 0, 1, n-1, n$ esetén grafikusak.

15.3. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ matroid tetszőleges $x \in S$ elemét pontosan akkor tartalmazza $\mathcal{M}$ mindegyik bázisa, ha x egyetlen körben sem található. Továbbá, az állítás pontosan akkor teljesül, ha x nem hurok.

15.4. Feladat: Határozzuk meg a 15.5. Példában felsorolt matroidokban egy tetszőleges X részhalmaz rangját, a matroidok köreit és bázisait.

15.5. Feladat: "Fordítsuk le" a 15.11.-17. Tételek állításait vektorterekre, gráfokra és halmazrendszerekre (uniform matroidokra).

15.4. Hivatkozások

[A] Acketa,D.: *The Catalogue of All Nonisomorphic Matroids on at Most 8 Elements,* Novi Sad Institute of Math., Yugoslavija, 1983

[$DHLSz$] Dósa György, Claude LaFlamme, Szalkai István: *The Maximum and Minimum Number of Circuits and Bases of Matroids,* Pure Math. & Applications (PUMA), 15 (2004) pp. 383-392.

Publ.of Univ. Miskolc, Series D., közlésre benyújtva

[O] Oxley,J.G.: *Matroid Theory,* Oxford Univ. Press, New York, 1992

III. rész

Függelék

Az $\binom{x}{n}$ polinomok

Definíció:

$$\binom{x}{n} := \frac{\mathbf{x(x-1)(x-2)...(x-(n-1))}}{\mathbf{n!}} \quad . \qquad \square$$

Ekkor:

$$\binom{x}{0} = \mathbf{1}$$

$$\binom{x}{1} = x$$

$$\binom{x}{2} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$$

$$\binom{x}{3} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{6}} - \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}} \approx 0,16x^{\mathbf{3}} - 0,5x^{\mathbf{2}} + 0,3x$$

$$\binom{x}{4} = \frac{\mathbf{x^4}}{\mathbf{24}} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{24}}x^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}} \approx 0,0416x^{\mathbf{4}} - 0,25x^{\mathbf{3}} + 0,4583x^{\mathbf{2}} - 0,75x$$

$$\binom{x}{5} = \frac{\mathbf{x^5}}{\mathbf{120}} - \frac{\mathbf{x^4}}{\mathbf{12}} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}x^{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}x^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{5}} \approx 0,008\dot{3}x^{\mathbf{5}} - 0,08\dot{3}x^{\mathbf{4}} + 0,291\dot{6}x^{\mathbf{3}} +$$
$$+0,4166x^{\mathbf{2}} + 0,2x$$

$$\binom{x}{6} = \frac{\mathbf{x^6}}{\mathbf{720}} - \frac{\mathbf{x^5}}{\mathbf{48}} + \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{144}}x^{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}x^{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{137}}{\mathbf{360}}x^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}} \approx$$
$$\approx 0,0014x^{\mathbf{6}} - 0,0208x^{\mathbf{5}} + 0,118x^{\mathbf{4}} - 0,3125x^{\mathbf{3}} + 0,3805x^{\mathbf{2}} - 0,1\dot{6}x$$

$$\binom{x}{7} = \frac{\mathbf{x^7}}{\mathbf{5040}} - \frac{\mathbf{x^6}}{\mathbf{240}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{144}}x^{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{48}}x^{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{90}}x^{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}x^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{7}} \approx$$
$$\approx 1,984 \cdot 10^{\mathbf{-4}}x^{\mathbf{7}} - 4,166 \cdot 10^{\mathbf{-3}}x^{\mathbf{6}} + 0,0347x^{\mathbf{5}} - 0,1458x^{\mathbf{4}} + 0,3\dot{2}x^{\mathbf{3}} -$$
$$-0,35x^{\mathbf{2}} + 0,1428x$$

$$\binom{x}{8} = \frac{\mathbf{x^8}}{\mathbf{40320}} - \frac{\mathbf{x^7}}{\mathbf{1440}} + \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{2880}}x^{\mathbf{6}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{144}}x^{\mathbf{5}} + \frac{\mathbf{967}}{\mathbf{5760}}x^{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{469}}{\mathbf{1440}}x^{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{363}}{\mathbf{1120}}x^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{8}} \approx$$

$$\approx\ 2,48\cdot 10^{-\mathbf{5}}x^{\mathbf{8}}-6,944\cdot 10^{-\mathbf{4}}x^{\mathbf{7}}+0,008x^{\mathbf{6}}-0,0486x^{\mathbf{5}}+$$
$$+0,1678x^{\mathbf{4}}-0,3256x^{\mathbf{3}}+0,3241x^{\mathbf{2}}-0,125x$$

$$\binom{x}{9}\ =\ \frac{\mathbf{x^9}}{\mathbf{362880}}-\frac{\mathbf{x^8}}{\mathbf{10080}}+\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8640}}x^{\mathbf{7}}-\frac{\mathbf{x^6}}{\mathbf{80}}+\frac{\mathbf{1069}}{\mathbf{17280}}x^{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{89}}{\mathbf{480}}x^{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{29531}}{\mathbf{90720}}x^{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{9}}\ \approx$$
$$\approx\ 2,76\cdot 10^{-\mathbf{6}}x^{\mathbf{9}}-9,92\cdot 10^{-\mathbf{5}}x^{\mathbf{8}}+0,001x^{\mathbf{7}}-0,0125x^{\mathbf{6}}+$$
$$+0,062x^{\mathbf{5}}-0,185x^{\mathbf{4}}+0,325x^{\mathbf{3}}-0,302x^{\mathbf{2}}+0,1x$$

$$\binom{x}{10}\ =\ \frac{\mathbf{x^{10}}}{\mathbf{3628800}}-\frac{\mathbf{x^9}}{\mathbf{80640}}+\frac{\mathbf{29x^8}}{\mathbf{120960}}-\frac{\mathbf{x^7}}{\mathbf{384}}+\frac{\mathbf{3013}}{\mathbf{172800}}x^{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{256}}x^{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{4523}}{\mathbf{22680}}x^{\mathbf{4}}-$$
$$-\frac{\mathbf{1303}}{\mathbf{4032}}x^{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{7129}}{\mathbf{25200}}x^{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}}$$

Az x^n polinomok koordinátái az $\left\{\binom{x}{k} : k \leq n\right\}$ bázisban

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
$\binom{x}{0}$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\binom{x}{1}$		1	1	1	1	1	1	1
$\binom{x}{2}$			2	6	14	30	62	126
$\binom{x}{3}$				6	36	150	540	1 806
$\binom{x}{4}$					24	240	1 560	8 400
$\binom{x}{5}$						120	1 800	16 800
$\binom{x}{6}$							720	15 120
$\binom{x}{7}$								5 040

A táblázat üres helyein 0 áll.

A $P_k(n) := \sum_{i=1}^{n} i^k$ polinomok

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \;\; = \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \tfrac{n^3}{3} + \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{6} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \tfrac{n^4}{4} + \tfrac{n^3}{2} + \tfrac{n^2}{4} = \tfrac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \tfrac{n^5}{5} + \tfrac{n^4}{2} + \tfrac{n^3}{3} - \tfrac{n}{30} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \tfrac{n^6}{6} + \tfrac{n^5}{2} + \tfrac{n^4}{12} - \tfrac{n^2}{12} = \tfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \tfrac{n^7}{7} + \tfrac{n^6}{2} + \tfrac{n^5}{2} - \tfrac{n^3}{6} + \tfrac{n}{42} = \tfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \tfrac{n^8}{8} + \tfrac{n^7}{2} + \tfrac{7n^6}{12} - \tfrac{7n^4}{24} + \tfrac{n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \tfrac{n^9}{9} + \tfrac{n^8}{2} + \tfrac{2n^7}{3} - \tfrac{7n^5}{15} + \tfrac{2n^3}{9} - \tfrac{n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \tfrac{n^{10}}{10} + \tfrac{n^9}{2} + \tfrac{3n^8}{4} - \tfrac{7n^6}{10} + \tfrac{n^4}{2} - \tfrac{3n^2}{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{11} = \frac{n^{12}}{12} + \frac{n^{11}}{2} + \frac{11n^{10}}{12} - \frac{11n^8}{8} + \frac{11n^6}{6} - \frac{11n^4}{8} + \frac{5n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{12} = \frac{n^{13}}{13} + \frac{n^{12}}{2} + n^{11} - \frac{11n^9}{6} + \frac{22n^7}{7} - \frac{33n^5}{10} + \frac{5n^3}{3} - \frac{691n}{2730}$$

Parciális törtekre bontás

Használatos még az *elemi-* vagy *résztörtek* elnevezés is. A *parciális* szó latin eredetű, jelentése "részleges, nem egész" .

1.1. Cél: *Az*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x^1 + b_0}$$

alakú függvények (ún. **racionális törtfüggvények** *= két polinom hányadosa) legegyszerűbb nevezőjű törtek összegére történő bontása.*

Felhasználása: integrálszámítás (primitív függvények keresése); függvények sorbafejtése (hatványsorok); Laplace transzformációnál (állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek); a generátorfüggvény módszernél; s.í.t. ...

0. LÉPÉS: *Legyen a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma!*

Ha ez nem teljesül (azaz a számláló legalább akkora fokszámú, mint a nevező), akkor (polinomosztással) a számlálót elosztjuk a nevezővel, azaz meghatározzuk azon $r(x)$ és $s(x)$ polinomokat, amelyekre

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$$

és $r(x)$ fokszáma kisebb mint $q(x)$ fokszáma. Ekkor $f(x)$ a következő alakban írható[5]:

$$f(x) = \frac{r(x)}{q(x)} + s(x) \ .$$

[5] Megjegyezzük, hogy oszthatóság, szorzattá bontás, felbonthatatlanság, stb. tekintetében a polinomok teljesen ugyanúgy viselkednek, mint az egész számok ($\mathbb{Z}$).

A továbbiakban feltesszük, hogy a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma (azaz csak az $\frac{r(x)}{q(x)}$ alakú taggal foglalkozunk) !

I. LÉPÉS: *A nevezőt a lehető legjobban szorzattá bontjuk, és az azonos szorzótényezőket összegyűjtjük.*

Felhívjuk a figyelmet: most kell eldöntenünk, hogy az alábbiakban (mindvégig) valós vagy komplex számokkal kívánunk számolni ! A valós és a komplex számok közötti különbséget az Algebra Alaptételének két változata világítja meg:

Algebra Alaptétele: 1) (valós) változat: *Tetszőleges valós együtthatójú polinom (lényegében egyértelmű módon*[6]*) felbontható* legfeljebb másodfokú *valós együtthatójú polinomok szorzatára.* □

2) (komplex) változat: *Tetszőleges komplex együtthatójú polinom (lényegében egyértelmű módon) felbontható* elsőfokú *komplex együtthatójú polinomok szorzatára.* □

A fenti tételből következik, hogy a nevező szorzótényezői az alábbi típusúak lehetnek:

1) (valós) esetben: négy típus, mint: $(x-u)$, $(x-v)^n$, (ax^2+bx+c), $(dx^2+ex+f)^m$ ("elsőfokú", "elsőfokú hatványa", "másodfokú" és "másodfokú hatványa").

2) (komplex) esetben: csak a fenti első két típus lehetséges.

Módszerek a szorzótényezők meghatározására:

— a nevező $x=\gamma$ gyökeinek meghatározása[7] (gyökképlettel[8] vagy *intervallum felezéses* módszerrel), majd az $(x-\gamma)$ gyöktényezők kiemelése polinomosztással[9] .

---

[6] sorrendtől és konstans szorzóktól eltekintve egyértelmű

[7] ez csak az első két típusú szorzótényezők megkeresésére használható

[8] másodfokú egyenletre a tanult gyökképlet (már 4000 évvel ezelőtt Mezopotámiában is ismerték), harmad- és negyedfokú egyenletekre Girolamo Cardano (1501-1576), Nicolo Tartaglia (1500-1557) és Ludovico Ferrari (1522-1565) olasz tudósok képletei adnak megoldást, míg ötöd- és magasabbfokú egyenletekre Niels Henrik Abel (1802-1829) norvég és Paolo Ruffini (1765-1822) olasz matematikusok bizonyították, hogy *nincs* általános gyökképlet.

[9] a maradék nélküli polinomosztás elvégezhetőségét Étienne Bézout (1730-1783) francia matematikus következő eredménye biztosítja: **Tétel:** *Ha a* $\gamma \in \mathbb{C}$ *szám gyöke a* $p(x)$ *polinomnak, akkor az* $(x-\gamma)$ *polinom* (gyöktényező) *osztója a* $p(x)$ *polinomnak, azaz* $p(x) = (x-\gamma)\cdot q(x)$ *valamely* $q(x)$ *polinomra.* □ E tételnek speciális esete (ha

— próbálkozás módszere: keressük azon $r(x)$ és $s(x)$ polinomok együtthatóit amelyekre $q(x) = r(x)s(x)$. Ehhez alkalmazhatjuk a behelyettesítés módszerét, vagy az egyenlő együtthatók (más néven az együtthatók összehasonlítása) módszerét.

II. LÉPÉS: *Parciális törtekre bontás.*

1) valós esetben:
Ha

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-u_1)\cdot ...(x-v_1)^{n_1}\cdot ...(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdot ...(d_1x^2+e_1x+f_1)^{m_1}\cdot ...}$$

alakú, akkor a keresett parciális törtek nevezői pontosan a nevező szorzótényezői, míg számlálói a nevezőknél alacsonyabb fokszámú polinomok, azaz

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & \frac{A_1}{x-u_1} + ... + \frac{B_{1,1}}{(x-v_1)} + \frac{B_{1,2}}{(x-v_1)^2} + ... + \frac{B_{1,n_1}}{(x-v_1)^{n_1}} + ... \\ & + \frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + ... \\ & + \frac{E_{1,1}x+F_{1,1}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)} + \frac{E_{1,2}x+F_{1,2}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)^2} + ... + \frac{E_{1,m_1}x+F_{1,m_1}}{(d_1x^2+e_1x+f_1)^{m_1}} \\ & + ... \end{aligned}$$

ahol a számlálókban szereplő A_t , $B_{i,j}$, C_r , D_r , $E_{k,l}$, $F_{k,l} \in \mathbb{R}$ $(t \le T$, $j \le n_i$, $i \le I$, $r \le R$, $l \le m_k$, $k \le K)$ valós számokat kell meghatároznunk.

2) komplex esetben: csak az első két típus lehetséges, a nagybetűk komplex számokat jelölnek.

TÉTEL: A fenti nagybetűkkel jelölt számok léteznek és egyértelműek.
$\square$

MÓDSZEREK *a számlálók(ban szereplő) valós/komplex számok meghatározására:*

Közös nevezőre hozás után csak az egyenlet két oldalán szereplő két tört számlálóinak egyezését kell biztosítanunk.

$p(x)$ másodfokú) a középiskolában tanult "a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja ..." állítás.

– *behelyettesítés módszere:* x helyére megfelelő számú tetszőleges (jól megválasztott) valós vagy komplex számokat helyettesítve a nagybetűkre, mint ismeretlenekre lineáris egyenletrendszert kapunk.

– *egyenlő együtthatók* (*együtthatók összehasonlítása*) módszere: A két számláló egy-egy polinom. Az algebra alaptételének (egyik) következménye: "Két polinom akkor és csak akkor egyezik meg, ha összes (megfelelő) együtthatóik megegyeznek". Vagyis az egyenlet két oldalán szereplő polinomokban a megfelelő együtthatókat megkeresve és páronként "egyenlővé téve" ismét lineáris egyenletrendszert kapunk a nagybetűkre, mint ismeretlenekre.

Ajánlott irodalom:

Gróf József: *Matematika II.* Veszprémi Egyetemi Jegyzet, 1.4. fejezet (19-32. oldalak)

Obádovics Gyula: *Matematika* (kézikönyv), Műszaki Kiadó 1980, II.rész, V.fejezet 4.rész (664-669. oldalak)

Általános irodalom

[*AnBé*,'94] Andrásfai Béla: *Gráfelmélet,* Polygon könyvtár, Szeged, 1994

[*HaPé*,'97/1] Hajnal Péter: *Elemi kombinatorika feladatok*, Polygon Kiadó, Szeged, 1997

[*HaPé*,'97/2] —— ——: *Összeszámlálási problémák*, Polygon Kiadó, Szeged, 1997

[*HaPé*,'97/3] —— ——: *Gráfelmélet*, Polygon Kiadó, Szeged, 1997

[*JoRi*,'86] Johnsonbaugh, Richard: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publ. Co., New York, 1986

[*LoLá*,'79] Lovász László: *Combinatorial Problems and Exercises*, Akadémiai Kiadó, Budapest és North/Holland, Amsterdam, 1979

Magyarul: *Kombinatorikai feladatok és problémák,* Typotext Kiadó, Budapest, 1999

[*ReAn*,'89] Recski András: *Matroid Theory and Applications* ,Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989

[*RoKe*,'91] Rosen, Kenneth: *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw- Hill, Inc., New York, 1991

[*SzIs*,'99] —— —— : *Az algoritmuselmélet alapjai*, Bolyai füzetek, Veszprém, 1999

[*SzIs*,'01] —— —— : *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai,* Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2001

[*ToIo*,'78] Tomescu, Ioan: *Kombinatorika és alkalmazásai*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978

[*ViNJ*,'87] Vilenkin,N.J.: *Kombinatorika,* Műszaki Kiadó, Budapest, 1987

Név- és tárgymutató

Tárgymutató

(BAi) tulajdonságok, 7
(V, E, m), 164
(a, b), xiii
(x_i), 297
$(x_i)_{i=1}^{\infty}$, 297
$A{=}B$, 5
A^{+1}, 13
A^{-1}, 13
A^T, 206
A^*, xii
$A^{\mathbb{N}}$, xii
A^k, xii
B_n, 152
$C(V_1, V_2)$, 333
C_n, 169
$C_n^{k\,(ism)}$, 30
C_n^k, 30
$D(G)$, 283
D_n, 67
$F(f)$, 330
G/e, 266
$GF(2)$, 214
$G \cong H$, 170
$G \to (H)_k^2$, 293
$G \to (H_1, ..., H_k)_k^2$, 293
$G \overset{\sim}{=} H$, 250
$H \dashv G$, 263
$H \leq G$, 172
$H \preceq G$, 266
$H \subseteq G$, 172
H_0, 198
H_n, 198
I_n, 314
$K_{\kappa,\lambda}$, 303
K_ω, 294
$K_{m,n}$, 168
K_n, 167
$M(G)$, 311
$N(X)$, 310
$P(n)$, 149
$P(n, k)$, 149
$P_{\leq k}(A)$, xiii
$P_k(A)$, xii
$P_k(n)$, 357
P_n, 26, 168
$P_n^{k_1,...,k_s\,(ism)}$, 27
$Per(A)$, 314
$R(G, H)$, 302
$R(k, l)$, 297
$S(m, n)$, 76
$S(n)$, 152
$S(n, k)$, 152
S_k^n, 152
S_n, 169, 314
$Sp(A)$, 204
$Tr(A)$, 204
$V(n)$, 152
$V(n, k)$, 152
V_i, 255
$V_n^{k\,(ism)}$, 30

V_n^k, 30
W_n, 169
$[A]^{\leq k}$, xiii, 163
$[A]^k$, xii, 163
$[A]_{i,j}$, 204
$[a,b]$, xiii
$[n]^s \to (k_1, ..., k_t)^s$, 301
$[x]$, xiii, 132
$\#A$, xii
$\Box$, xiii
Δ, 139
Δ -rendszer, 137
$\Delta_n^{(i)}$, 99
$\Phi(n)$, 22
Π_n^k, 156
$\left(\frac{a}{p}\right)$, 33
$\binom{n}{k}$, 33
$\binom{x}{n}$, 353
$\chi(G)$, 282
$\chi'(G)$, 302
$\delta(v)$, 171
$\det(A)$, 314
$\gamma(x)$, 251
$\in$, 4
$\lfloor x \rfloor$, xiii
$\mathbb{I}$, 206, 326
$\mathbb{Q}[p]$, 57
$\mathbb{R}_+$, xii
$\mathbf{K}_{\mathbb{P}}$, 303
$\mathbf{K}_{\mathbf{m_1},\ldots,\mathbf{m_k}}$, 168
$\mathbf{T}(\mathbf{n},\mathbf{G})$, 317
$\mathbf{T}_n^{\mathbf{m_1},\ldots,\mathbf{m_k}}$, 168
$\mathbf{t}(\mathbf{n},\mathbf{G})$, 317
$\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, 11
$\mathcal{NP}$ -complete problem, 179
$\mathcal{NP}$ -teljes
  probléma, 179
$\mathcal{O}(g)$, 178
$\mathcal{P}(A)$, xii
$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$, 8
$\mathcal{S}^{Hom}_{d_1,\ldots,d_k,b_n}$, 87
$\mathcal{S}^{Inh}_{d_1,\ldots,d_k,b_n}$, 87
$\mathcal{X}$, 8
$\mathcal{X} \leq \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$, 8
$\mu_f(A)$, 70
$\overline{E}$, 170
$\overline{G}$, 170
σ -algebra, 69
φ -függvény
  Euler -féle, 74
$\zeta(s)$, 127
$\{x,y\} \in E$, 164
${}^A B$, xii
$c(x)$, 257
$col(G)$, 283
$d(G)$, 178
$d(x,y)$, 177
$d_w(x,y)$, 177
$f \sim g$, 151
$f^+(v)$, 330
$f^-(v)$, 330
f_0, 331
$g(G)$, 178
$ht_{\mathbf{v_0}}(G)$, 255
k -adrendű
  rekurzív összefüggés, 81
k -színezés, 292
$l(x)$, 257
$l(x_1) \preceq l(x_2)$, 257
$lkkt(a,b)$, 8
$lnko(a,b)$, 8
$m(G)$, 311
$o(f(n))$, 321
$p_G(\lambda)$, 323

$p_k(x)$, 154
$par(\pi)$, 314, 323
$r(X)$, 345
$r(\mathcal{M})$, 345
$s(X)$, 312
$sgn(\pi)$, 314
$simp(H)$, 143
$t(n, k)$, 318
$type(A)$, 7
$w(T)$, 240
$x, y \in e$, 164
$\hat{}$, 221
m(e), 164
Ötszíntétel, 285
összefüggés
  rekurzív, 80
összefüggő
  gráf, 175
összefűzés
  sorozatoké, 221
összehúzás
  élé, 266
összekötött
  csúcsok, úttal, 173
összekötött, csúcsok (éllel), 163
összeragasztás
  csúcsoké, 266
összeszámlálás, 20
  alapmódszerei, 20
üres halmaz, 5
ív, 261
ív, gráfé, 163
állítás, 22
állandó együtthatójú
  lineáris rekurzió, 85
általános
  megoldás, rekurzióé, 87
általánosított
  binomiális együttható, 45
általánosított Turán-gráf, 318
átmérő
  gráfé, 178
átszámozás
  sorozaté, 110
él
  -diszjunkt (utak), 174
  -ismétlődés, 174
  összehúzása, 266
  éllel összekötött csúcsok, 163
  csúcsra illeszkedik, 163
  diszjunkt -rendszer, 309
  egyszerű, 164
  elvágó, 177
  független -rendszer, 309
  felosztása, 263
  hiper, 165
  irányított, 166
  kapacitása, 329
  lefedő -rendszer, 309
  multiplicitása, 164
  súlya / költsége, 240
  súlyozott, 167
  színezése, 166, 292
  többszörös, 164
él, gráfé, 163
élgráf, poliéderé, 167
élkromatikus szám, gráfé, 302
éllista
  gráfé, 204
élrendszer
  diszjunkt, 309
  független, 309
  lefedő, 309
élszínezés, 251, 292
éltartó
  (csúcs)függvény, 170

éltartó függvény/leképezés, 250
érték
  folyam -e, 330
úszógumi, 268
út
  -gráf, 168
  -tal összekötött csúcsok, 173
  összsúlya, 174
  alternáló, 311
  egyszerű, 174
  Euler-, 185
  gráfban, 173
  Hamilton-, 192
  hossza, 174
  javít(hat)ó, 334
ős
  csúcsé, gyökereztetett fában, 256
0 -mértékű
  halmaz, 72
1 -faktor, 310

Abel, Niels H., 360
Ackermann, Wilhelm, 97
  -függvény, 97
additív
  halmazfüggvény, 70, 71
adjacent
  vertices, 204
adjacent, vertices, 163
alapfogalom, 4
alaphalmaz, 7
  matroidé, 345
aldetermináns
  mátrixé, 212
algebra, 69
  Boole -, 7
  csap-, 9
  esemény-, 9
  halmaz-, 8
  halmazoké, 69
  kapcsoló -, 9
  szín-, 9
Algebra Alaptétele, 360
algebrai
  struktúra, 7, 163
  számok, 57
  testbővítés, 57
algorithm
  greedy, 241
algoritmus
  Dijkstra-, 220
  exponenciális, 252
  gráf komponenseire, 211
  kvázipolinomiális, 252
  mohó, 241
  Newton gyökvonási -, 98
  polinomiális, 252
  rendezés fán, 234
  tintacsöppentős, 211
  vödör -, 258
alkán, 229, 232
alkohol
  molekula, 237
alternáló út, 311
alternáló utak
  módszere, 311
amorf, 250
ancestor
  of a vertex, 256
apa
  csúcsé, gyökereztetett fában, 256
Appel, Kenneth, 288
arbitrary
  graph, 165
arc, of a graph, 163
aszimptotikus

egyenlőség, függvényeké, 151
aszimptotikusan
egyenlő, függvények, xiii
axióma
Boole-algebra -ái, 7
függetlenségi, 343, 344
axiómarendszer
ekvivalens -ek, 10
Zermelo - Fraenkel féle, 5
axioms
of independence, 344
azonosság
- formula, 10

B(r,s) - gráf, 303
bázis
matroidé, 346
Bézout, Étienne, 360
bővíthető
részhalmaz, tovább nem -, 344
BA (Boole-algebra), 7
Babai László, 252, 254
algoritmusa, 254, 256
tétele, 139
Barátság Tétel, 328
base
of a matroid, 346
behelyettesítés módszere, 362
bejárás
Euler-, 185
Hamilton-, 192
Bell, Eric T., 153
-számok, 153, 154
Bell-számok, 126
bicenter
of a tree, 232
big
oh, 178
bijekció
-k módszere, 21
művelettartó, 11
bináris
fagráf, 233
Binet, Jacques, 120
Binet, Jacques Ph.M., 82
-formula, 82
binom, 43
binomális
sor, 45
binomiális
együttható, 33
polinom, 54
tétel, 43
binomiális együttható
általánosított, 45
bipartite
graph, 167
bipartite graph, 307
Bolyai János, 44
binomális sora, 45
Boole algebra
generátorrendszere, 15
izomorf -ák, 11
Boole, Georg, 7
-algebra, 7
Boole-értékű logika
logika, Boole-értékű, 8
Boole-algebra
végesen generált -, 15
Brown, Alexander C., 229
Bruijn, Nicholaas G. de, 134

címke
csúcsé, 257
standard (kockagráfban), 198
Cantor, Georg F., 3

tétele, 3
capacity
of a cut, 333
of an edge, 329
Cardano, Girolamo, 360
cardinality
of sets, 5
Catalan, Eugéne, 120
-számok, 123
Cayley tétele, 230
Cayley, Arthur, 230
center
of a tree, 232
CH (Continuum Hypothesis), 3
child
of a vertex, in a rooted tree, 256
chromatic number
of a graph, 282
circle
-graph, 169
-matrix of a graph, 216
in a graph, 173
lenght of, 174
weight of, 174
circuit
of a matroid, 346
CNF (konjuktív normálforma), 17
cofactor
of a matrix, 212
Cohen, Paul J., 3
coloring
interval -, 304
of vertices, 282
coloring / colouring
of edges / vertices of graphs, 281
coloring/colouring number
of a graph, 283
colouring
of edges, 251
of vertices, 251
combination, 30
generalized, 30
complement
-graph, 170
of a set, 5
complete
bipartite graph, 168
graph, 167
multipartite graph, 168
compliment, 5
component
of a graph, 176
conjuction, 17
correcting path, 334
crossing number of a graph, 267
csúcs
-diszjunkt (utak), 174
-ismétlődés, 174
-ok összeragasztása, 266
élre illeszkedik, 163
őse, 256
apja, 256
címkéje, 257
elvágó, 177, 193
elvágó, erősen, 193
fia, 256
fokszáma, 170
gyökér-, 254
helyettesítése éllel, 263
izolált, 171
jólszínezése, 282
k - színezése, 282
kapacitása, 339
label of a -, 257
lefogó -rendszer, 311
leszármazottja, 256

levél -, 256
levél-, 230
megszüntetése, 263
standard címkéje, 198
színezése, 166, 282
számozása, 166
számozott, 251
szomszédai, 254
csúcs, gráfé, 163
csúcshalmaz
szűkülése, 312
szomszédai, 310
csúcsok
összekötöttek, úttal, 173
éllel összekötöttek, 163
súlyozott távolsága, 177
szomszédosak, 163
távolsága, 177
csúcsszínezés, 251
csapalgebra, 9
csillag
-gráf, 169
csoport
szimmetrikus, 314
cubic graphs, 198
cut, 333
-matrix of a graph, 216
capacity of a -, 333
cycle
of a matroid, 346

De Morgan, Augustus, 9, 285
-azonosságok, 9
degree
of a vertex, 170
dekompozíció, 302
derékbőség
gráfé, 178, 274
derangements, 67
Descartes, René, xii
-hatvány, xii
descendant
of a vertex, 256
determináns, mátrixé, 314
diameter
of graph, 178
differencia
szimmetrikus, halmazoké, 139
véges, 99
digraph, 166
Dijkstra
algoritmusa, 220
Dijkstra, Edsgre W., 220
Dirac Gábor, 194
directed
edge, 166
graph, 166
Dirichlet, Lejeune, P.G., 127
-sor, 127
disjunction, 17
distance
of vertices, 177
weighted (of vertices), 177
diszjunkció, 7
diszjunkt
élrendszer, 309
utak, 174
diszkrét, ix
matematika, ix
DNF (diszjunktív normálforma), 17
dodekaéder-játék, 191
duális
formula -a, 10
duális gráf
gráfé, 278
térképé, 278, 284

Dualitás Elve, 10

edge
  capacity of an -, 329
  directed, 166
  edge-connected vertices, 163
  hiper, 165
  incident on a vertex, 213
  incident on vertex, 163
  multiple, 164
  multiplicity, 164
  simple, 164
  subdivision of, 263
edge preserving
  mapping, 170
edge preserving mapping, 250
edge, of a graph, 163
edge-colouring, 251
Edmonds, Jack R., 338
egész értékű
  lineáris programozás, 132
egész rész (entier), 132
egész rész, valós számé
  alsó-, xiii
  felső-, xiii
együttható
  binomiális, 33
  polinomiális, 29
  trinomiális, 34
együtthatók összehasonlítása, 362
egyenlő
  aszimptotikusan, függvények, xiii
egyenlő együtthatók módszere, 362
egyenlőség
  függvények aszimptotikus -e, 151
  halmazok -e, 5
egyenlőtlenség
  háromszög-, 25, 246
  háromszög-, általánosított, 24
egyenlet
  implicit, 79
  karakterisztikus, 90
egységelem, 7
egyszerű
  él, 164
  út, 168, 174
  gráf, 165
  kör, 169, 174
ekvivalencia reláció, 176
ekvivalens
  axiómarendszerek, 10
  vektorok, 143
elérhetetlen
  számosság, 297
elcserélt levelek, 66, 102
elem
  egység-, 7
  halmaz -e, 3, 4
  null-, 7
elemi törtek, 359
elkerül
  egymást -ő sorozatok, 105
elv
  dualitás -e, 10
  izomorfia- , Steinitz féle, 11
elvágó
  él, 177
  csúcs, 177
  erősen- , (pont, csúcs), 193
  pont, csúcs, 193
  pontrendszer, 193
empty
  set, 5
entier, 132
erdő, 225
Erdős

-féle nyíl reláció, 293
Erdős Pál, 134, 196, 295, 300
eseményalgebra, 9
Euklideszi
algoritmus, 93
Euler, 74
-út, 185
-bejárás, 185
-kör, 185
-karakterisztika, 273
poliédertétele, I., 272
poliédertétele, II., 275
Euler, Leonhard, 110, 150
-féle konstans, 39
eventually periodic, sequence, 104
explicit
összefüggés, 82
exponenciális algoritmus, 252
extrém, 317
extremális, 131

független
élrendszer, 309
halmazok
minőségileg, 13
metszőrendszer, 140
részhalmazok, 343–345
függetlenségi axiómák
matroidban, 344
függvény
-ek aszimptotikus egyenlősége, xiii
éltartó, 170, 250
izomorfizmus, 250
művelettartó, 11
pozitív definit, 178
racionális tört-, 359
súly- / költség-, 240
szimmetrikus, 178
Fáry István, 267
Fáry István tétele, 267
fa
bináris, 233
kiegyensúlyozása, 236
magassága, gyökereztetéskor, 255
szintjei, gyökereztetéssel, 255
fa, -gráf, 225
Fa-mátrix tétel, 213
fagráf
közepe, 232
kétközepe, 232
faktor, 1-, 310
faktoriális, 26
Farkas-kecske-révész-káposzta probléma, 162
faváz
gráfé, 239
felület, 268
Euler - karakterisztikája, 273
felfűzés-módszer, 187
feloldás
rekurzív összefüggés, 82
felosztás
halmaz -a, 152
szám -a, 149
felszálló
halmazrendszer, 344
Ferrari, Ludovico, 360
feszítőfa, 239
minimális súlyú / költségű, 240
fiú
csúcs -a, gyökereztetett fában, 256
Fibonacci, Leonardo Pisano, 81
-sorozat, 81
tulajdonságai, 102
Fisher
tétele, 138

Fisher, Sir Ronald Aylmer, 138
fixpont
    függvényé, 67
Fleury algoritmusa, 189
flow, 329
    feasible, 330
    value of a -, 330
fokszám
    csúcsé, 170
folklór - tétel, 290
folyam, 329
    értéke, 330
    azonosan nulla, 331
    maximális, 330
    megengedett, 330
Ford, Lester Randolph Jr, 331
Ford-Fulkerson tétel, 331
forest, 225
formula, 22
    azonosság, 10
    duálisa, 10
formula tagadása, 253
forrás, 329
forszolás, 3
Fraenkel, Adolf, 5
Frankl Péter
    tétele, 139
free
    matroid, 345
Frege, Gottlob, 23
Frink, 265
Fulkerson, Delbert Ray, 331
Fuller, Buckminster R., 277
fullerén
    molekula, 276
function
    edge preserving, 250
    isomorphic, 250
    weight-, 240

Gödel, Kurt, 10
    nemteljességi tétele, 12
    tétele, teljességi, 10
görbe, 261
    belseje, 261
    külseje, 261
Gallai Tibor, 135
Galois, Évariste, 214
generátorfüggvény, 109
    trigonometrikus, 127
generátorrendszer
    Boole-algebra -e, 15
generátum
    Boole-algebrában, 15
    részhalmaz -a, 15
generalized
    combination, 30
    permutation, 27
    variation, 30
Gentzen, Gerhard, 23
geometria
    véges, 134
girth
    of a graph, 274
    of graph, 178
gráf, 163, 167
    -ok Ramsey száma, 302
    összefüggő, 175
    íve, 163
    átmérő, 178
    éle, 163
        -nek színezése, 281
    élkromatikus száma, 302
    éllistával, 204
    élszínezett, 166
    út, 168

útja, 173
B(r,s) -, 303
csúcsa, 163
csúcsai
 -nak színezése, 281
csúcsszínezett, 166
csúcsszámozott, 166
csillag, 169
derékbőség, 178
derékbősége, 274
duális, 278
egyszerű, 165
egyszerű út, 168
egyszerű kör, 169
erdő, 225
fa, 225
feszítőfája, 239
gyökereztetése, 254
hiper, 165
homeomorf -ok, 264
homogén részgráfja, 292
hurok(él), 163
irányított, 166, 330
izomorf, 170
izomorfak, 250
izomorfizmus, 170
k - jólrendezése, 283
k - kromatikus, 282
kör, 169
köre, 173
körmentes, 225
külső síkbeli, 267
kétpólusú, 167, 307
karakterisztikus polinomja, 323
Kempe, 169
klikkjei, 289
kocka-, 198
komplementere, 170
komponensei, 176
kromatikus indexe, 302
kromatikus száma, 282
metszési száma, 267
minorja, 266
multi, 165
mutatókkal, 204
nyakkendő, 193
páros, 167, 307
páros körüljárású, 307
pólusai, 168
Petersen, 169
pointerekkel, 204
poliéder- /poligon- / (-háló-), 271
pontja, 163
pszeudo, 165
részgráfja, 172
részgráfja, feszített, 172
rétegei, 267
redukáltja, 263
reguláris, 171
síkba teríthető / síkbeli, 262
síkbeli, külső, 267
súlyozott élű, 167, 240
spektruma, 325
színezési száma, 283
számozott csúcsú, 251
szélessége, 260
szélkerék, 169
szaturált, 194
szintekbe rendezése, 254
szintjei, 267
többpólusú, 168
többszörösen összefüggő, 177
többszörösen élösszefüggő, 177
többszörösen csúcsösszefüggő, 177
térkép duális -ja, 284
tagja, 176

telített, 194
teljes, 167
teljes kétpólusú/páros, 168
teljes többpólusú, 168
tetszőleges, 165
tiltott, 317
Turán -féle száma, 318
Turán-, 168
Turán- , általánosított, 318
végtelen, 166
vastagsága, 267
gráfelmélet, x, 161
grafikus
matroid, 345
graph, 163
arbitrary, 165
arc, 163
bipartite, 167, 307
chromatic number of -, 282
circle, 169
coloring / colouring
of vertices / edges, 281
coloring/colouring number of -, 283
complement, 170
complete, 167
complete bipartite, 168
complete multipartite, 168
component of, 176
crossing number of -, 267
cubic, 198
diameter of, 178
directed, 166
edge, 163
forest, 225
girth of, 178
girth of a -, 274
Hamiltonian, 192
hiper, 165
infinite, 166
isomorphic, 170, 250
isomorphism, 170
levels of -, 267
loop, 163
multi, 165
multipartite, 168
node, 163
outerplanar, 267
path, 168
planar, 262
planar, outer-, 267
pole, 168
pseudo, 165
regular, 171
root of a -, 254
rooting of a -, 254
semi - Hamiltonian, 192
simple, 165
simple circle, 169
simple path, 168
spectra of -, 325
star, 169
subgraph, 172
subgraph, spanned, 172
tree, 225
Turán-, 168
vertex, 163
width of a -, 260
windmill, 169
graphic
matroid, 345
Gray - kód, 199
hossza, 199
greedoid, 241
greedy
algorithm, 241
ground set, 5

Guthrie, Francois, 285
gyökér
    -csúcs, gráfban, 254
gyökereztetés
    gráf -e, 254
gyökereztetett fa
    bináris, 231
    szigorú izomorfia, 231
gyökvonás
    Newton algoritmusa, 98

hálózat, 329
három ház három kút, 262
háromértékű logika, 8
háromszög - egyenlőtlenség, 246
háromszög-egyenlőtlenség, 25, 178
    általánosított, 24
Hadwiger sejtés, 289
Hajnal András, 295
Hajnal Péter, xi
Haken, Wolfgang, 288
Hall - feltétel, 310
halmaz, 3, 4
    -algebra, 8
    -művelet, 6
    -ok egyenlősége, 5
    -ok lánca, 133
    -ok szimmetrikus differenciája, 139
    üres -, 5
    0 -mértékű, 72
    alap-, 7
    eleme, 4
    elemei, 3
    független -ok
        minőségileg, 13
    felosztása, 152
    hatvány -a, xii
    mérhető, 70
    partíciója, 152, 284
    részben rendezett, 73
halmazalgebra, 69
halmazfüggvény, 70
    additív, 70
    monoton, 71
    monoton növő, 346
    rangfüggvény, 346
    szubkardinális, 346
    szubmoduláris, 346
    végesen additív, 71
halmazok
    mennyiségileg függetlenek„ 72
halmazrendszer, 165
    felszálló, 344
    leszálló, 344
    reprezentáns-rendszere, gyenge, 314
Hamilton
    -út, 192
    -kör, 192
    -vonal, 192
    bejárás, 192
Hamilton, Sir William Rowan, 191
Hamiltonian
    graph, 192
    semi-, graph, 192
Handshaking Theorem, 171
Hanoi tornyai, 83
Hardy, Godfrey H., 151
harmonikus
    számok, 39
harmonikus sor, 127
hatcheck problem, the, 66
hatványhalmaz, xii
Heawood, Percy J., 285
Hegyvári Norbert, 127
height
    of a rooted tree, 255

hexán, 232
HF, xiii
Hiasszedin, 43
hiper
    él, 165
    edge, 165
    gráf, 165
    graph, 165
hiperharmonikus sor, 127
homeomorf, 264
    gráfok, 264
    topológiailag, 272
homogén
    lineáris rekurzió, 85
    részgráf, 292
homogén, i színben
    részgráf, 292
homomorf, 264
hossz
    úté, 174
    köré, 174
Hujter Mihály, xi, 138, 214, 217
hull
    Skolem, 176
Hungarian method, 311
hurok
    matroidban, 346
hurok(él), gráfé, 163

idempotencia, 9
idempotens
    művelet, 9
illeszkedik
    él, csúcsra, 163
    csúcs, élre, 163
ILP (Integer Linear Programing), 132
implicit
    összefüggés, 82
    egyenlet, 79
incident
    edge, on vertex, 163
    vertex on edge, 163
    vertices, 213
Inclusion and exclusion
    principle of, 63
independence
    axioms (in matroids), 344
indukciós lépés, 22, 24
infinite
    graph, 166
inhomogén
    lineáris rekurzió, 85
intersection
    of sets, 5
interval coloring, 304
intervallum színezés, 304
invariáns, 253
    gráftulajdonság, 253
involúció
    - művelet, 9
irányított
    él, 166
    gráf, 166
irányított gráf, 330
ismétlés
    -es
        kombináció, 30
        variáció, 30
    nélküli
        kombináció, 30
        variáció, 30
ismétlődés
    él-, 174
    csúcs-, 174
isolated
    vertex, 171

isomorph
- graph, 170

isomorphic
- graphs, 250

isomorphism
- between graphs, 250
- of graph, 170
- strict-, of trees, 231

iteráció, 80
iterációs
- módszer, 83

izo morf, 11
izolált, 171
- csúcs, 171

izomer
- molekulák, 142

izomorf, 250
- Boole-algebrák, 11
- gráfok, 170, 250
- struktúrák, 249
- számozott csúcsú gráfok, 251

izomorfia
- -elv, Steinitz féle, 11
- Steiniz-féle elv, 249
- szigorú, fáké, 231

izomorfizmus, 11
- gráfok között, 250
- gráfoké, 170
- szintenkénti, 256

jólszínezés
- csúcsé, 282

javít(hat)ó út, 334
Joó István, 69
Jordan
- tétele, 261

k - jólrendezés
- gráfé, 283

k - kromatikus
- gráf, 282

k - színezés
- csúcsé, 282

k.é.p.
- dimenziója, 94
- magasabbrendű, 94

költség
- élé, 240
- részgráfé, 240

költségfüggvény, 240
Königsberg, 184
Königsbergi hidak, 184
Könisbergi hidak, 161
kör
- -gráf, 169
- összsúlya, 174
- egyszerű, 174
- Euler-, 185
- gráfban, 173
- Hamilton-, 192
- hossza, 174
- matroidban, 346

körmátrix
- gráfé, 204, 216

közép
- fáé, 232

külső síkbeli gráf, 267
Kínai postás probléma, 185
képkeret, 273
kétközép
- fáé, 232

kétpólusú
- gráf, 167

kétpólusú gráf, 307
Kézfogási Tétel, 171
kód

Gray-, 199
Kőnig Dénes, 161
tétele, 311
Kalinyingrád, 184
kannibál-hittérítő probléma, 162
kapacitás, 329
él -a, 329
csúcsé, 339
vágásé, 333
kapcsolódó algebra, 9
karakterisztikus
egyenlet, 90
karakterisztikus polinom, gráfé, 323
Karnaugh-Weitch
módszer, 199
Karp, Richard Manning, 338
Kekulé, August, 229
Kempe
gráf, 169
Kempe, Alfred B., 169, 285
kezdőlépés, 22, 23
kezdeti érték
probléma, 94
kezdeti érték probléma, 80
dimenziója, 94
magasabbrendű, 94
KH (Kontinuum-hipotézis), 3
Khajjám, Omar, 43
kicserélési
tulajdonság, 347
kiegészítési
tulajdonság, 344
kiegyensúlyozás
fáé, 236
Kirchoff I. törvénye, 330
klasszikus módszer, 88
Klein -palack, 268
Klein, Felix Ch., 268
klikk
gráfé, 289
Ko, Chao, 138
kocka
gráf, n-dimenziós, 198
kockagráf, 198
kombináció, 29, 30
ismétlés nélküli, 30
ismétléses, 30
visszatevés nélküli, 30
visszatevéses, 30
kombinatorika, ix
alapelvei, 19
alapmódszerei, 20
kombinatorikai robbanás, 68
Komjáth Péter, 295
komplementer
-gráf, 170
halmazé, 7
komponens
gráfé, 176
konjukció, 7
konkatenáció
sorozatoké, 221
konstans
elem, struktúrában, 7
konvex
síkidom/test, 273
konvolúció
Vandermonde-, 50
koordinátázható
matroid, 345
kromatikus index, gráfé, 302
kromatikus szám
gráfé, 282
térképé, 284
Kruskal, Joseph B., 240
Kuratowsky

tétele, 265
Kuratowsky tétele, 267
Kuratowsky, Kazimierz, 265
kvázipolinomiális algoritmus, 252
kvaterniók, 43

lánc
halmazok -a, 133
lépés
indukciós-, 22, 24
kezdő-, 22, 23
label
of a vertex, 257
LaFlamme, Claude, 143, 347
Lamé, Gabriel, 93
lap
poliéderé, 272
Laplace
transzformáció, 109
Laplace, Pierre, 110
Le probleme des recontres, 67
leaf - vertex, 256
leaf, vertex, 230
lefedő
élrendszer, 309
lefogó
csúcsrendszer, 311
pontrendszer, 311
Legendre
-szimbólum, 33
leképezés
éltartó, 250
izomorfizmus, 250
Lemma, 187
length
of a circle, 174
of a path, 174
Leonardo Pisano, 81
leszálló
halmazrendszer, 344
leszámlálás, ix
leszármazott
csúcsé, gyökereztetett fában, 256
levél
-csúcs, 256
-csúcs, gráfé, 230
levels of a graph, 267
lexikografikus
felsorolás, 257
lezárás
Skolem-, 176
liget, 225
lineáris
programozás, egész értékű, 132
rekurzió, 85
Listing, Johann B., 268
Littlewood, John E., 151
logika
Boole-értékű, 8
háromértékű, 8
kétértékű, 8
logikai
műveletek, 8
logikai szitaformula, 64, 73
loop
of a matroid, 346
loop, of a graph, 163
Lovász László, 78
Lubell
tétele, 134
Lubell, David, 133
Lucas
-számok/ -sorozat, 102
Lucas, Edouard F., 98
Lucas, Francois E.A., 93

Möbius szalag, 268, 289
Möbius, August F., 268
mátrix, 206
  él-, gráfé, 213
  adjacencia- , gráfé, 204, 205
  aldetermináns, 212
  csúcs- , gráfé, 204, 205
  determinánsa, 314
  fokszám- , gráfé, 212
  illeszkedési-, gráfé, 213
  incidencia-, gráfé, 213
  kör- , gráfé, 204, 216
  nyoma (Spur, Trace), 204
  permanense, 314
  redukált él-/illeszkedési-/incidencia-, 215
  sor- oszlop cseréi, 206
  szomszédsági- , gráfé, 204, 205
  transzponáltja, 206
  vágat- , gráfé, 204, 216
mérhető, halmaz
  halmaz, 70
mérték, 70
módszer
  összeszámlálás alap -ei, 20
  behelyettesítés, 362
  bijekciók -e, 21
  egyenlő együtthatók -e / együtthatók összehasonlítása, 362
  merítőkanál, 33
  próbálkozás -e, 361
  teljes indukció -e, 22
  valószínűségszámítási, 290
művelet, 7
  -tartó függvény, 11
  halmazok között, 6
  idempotens, 9
  involúció -, 9
  logikai -ek, 8
magasabbrendű
  k.é.p., 94
  kezdeti érték probléma, 94
  rekurzív összefüggés, 94
    állandó együtthatójú, 95
  rekurzió, 94
    állandó együtthatójú, 95
  számtani sorozat, 98, 99
    rendje, 98, 99
magasság
  gyökereztetett fa -a, 255
magyar módszer, 311
mapping
  edge preserving, 170, 250
  isomorphic, 250
matching, 309
  matroid, 345
  perfect, 310
matematika, 3
  diszkrét, ix
  véges, ix
matematikus, 20
matric
  matroid, 345
matrix
  adjacency, of a graph, 204, 205
  circle-, of a graph, 216
  cofactor of a -, 212
  cut-, of a graph, 216
  degree- , of a graph, 212
  incidence-, of a graph, 213
  reduced incidence-, of a graph, 215
matroid, 343, 344
  alaphalmaza, 345
  bázis, 346
  base, 346
  circuit of -, 346

- cycle of -, 346
- free, 345
- grafikus, 345
- graphic, 345
- hurok, 346
- körei, 346
- koordinátázható, 345
- loop of a -, 346
- matching, 345
- matric, 345
- párhuzamos elemek, 346
- párosítási, 345
- parallel elements of -, 346
- partíció-, 345
- partition, 345
- rangfüggvénye, 346
- rangja, 345
- rank of a -, 345
- szabad, 345
- szimplexei, 346
- uniform, 345

Maurolico, Francesco, 23
maximális
- folyam, 330
- részhalmaz, 344

maxterm, 17
McLaurin, Colin, 110
mechanizmus
- minimális, 142
- reakció-, 142

megengedett folyam, 330
megoldás
- általános, rekurzióé, 87
- partikuláris, rekurzióé, 88

megszámlálás, ix
mennyiségileg független
- halmazok, 72

merítőkanál-módszer, 33
Mersenne
- -prím, 98
- -szám, 98

Mersenne, Marin, 107
- -számok, 107

metrika, 178
metrikus
- súlyfüggvény, 246

metszési szám, gráfé, 267
metszőrendszer, 140
- független, 140

minőségileg független halmazok, 13
minimális
- mechanizmus, 142
- reakció, 141

minimax
- tétel, 334

minimax tétel, 311
minor
- gráfé, 266

mintavétel
- visszatevés nélküli, 30
- visszatevéses, 30

minterm, 17
mohó
- algoritmus, 241

Moivre, Abraham, 110
molekula
- alkán, 229, 232
- alkohol, 237
- fullerén, 276
- hexán, 232
- izomer -ák, 142
- paraffin, 229, 232
- szénhidrogén, 172

monoton
- halmazfüggvény, 71

monoton növő

  halmazfüggvény, 346
Montmort, Pierre Raymond de, 67
Morgan, Augustus De, 9
multigráf, 165
multigraph, 165
multipartite
  graph, 168
multiple
  edge, 164
multiplicitás
  él -, 164
multiplicity
  edge, 164

n alatt k, 33
n over k, 33
$n!$, 26
Négyszíntétel, 288
négyzetmentes szám, 8
nagy
  ordó, 178
Naudé, Philippe, 150
neighbour
  -s of a vertex, 254
neighbours
  of a vertex-set, 310
neighbours, vertices, 163
network, 329
Newton
  binomális sora, 45
  binomiális tétele, 43
  gyökvonási algoritmusa, 98
Newton tétele
  deriváltakról, 44
Newton, Isaac, 43
node, of a graph, 163
normálforma
  diszjunktív, 17
  konjuktív, 17
nulla
  folyam, azonosan -, 331
nullelem, 7
nyíl reláció, Erdős féle, 293
nyakkendő gráf, 193
nyelő, 329

oh
  big, 178
ordó
  nagy, 178
Ore, Oystein, 195
outerplanar graph, 267
Oxley, G., 349

párhuzamos
  elemek, matroidban, 346
páros
  gráf, 167
páros gráf, 307
páros körüljárású gráf, 307
párosítás, 309
  teljes, 310
párosítási
  matroid, 345
Pénzváltási probléma, 123
pólus, gráfé, 168
Pólya György, 28, 153
Pósa Lajos, 196
PA (Peano - Axiómarendszer), 23
Padovai
  sorozat, 102
paraffinok, 229, 232
parallel
  elements of a matroid, 346
parciális, 359
  törtek, 359

paritás
    permutásióé, 323
partíció, 302
    halmaz -a, 152
    halmazé, 284
    matroid, 345
    szám -a, 149
partikuláris
    megoldás, rekurzióé, 88
partitio, 149
partition
    matroid, 345
Pascal
    háromszög, 49
Pascal, Blaise, 23, 43, 49
path
    -graph, 168
    correcting, 334
    in a graph, 173
    lenght of, 174
    weight of, 174
Peano, Giuseppe, 23
Pelikán József, 327
perec, 289
perfect
    matching, 310
periodic
    sequence, eventually, 104
permanens, mátrixé, 314
permutáció, 26
    előjele, 314
    ismétlés nélküli, 26
    ismétléses, 27
    paritása, 323
    paritása (párossága), 314
permutation, 27
    generalized, 27
Perrin
    -sorozat, 102
Petersen
    gráf, 169
Petersen, Julius P.Ch., 169
planar graph, 262
planar graph, outer-, 267
Platóni testek, 167
pointerek
    gráfokhoz, 204
pole, of a graph, 168
poliéder, 167, 273
    élgráfja, 167
poliéder - gráf, 271
poliéder - lap, 272
poligon, 271
poligonháló - gráf, 271
polinom, 43
    binomiális, 54
    karakterisztikus, gráfé, 323
    trigonometrikus, 127
Polinomiális
    tétel, 45
polinomiális
    együttható, 29
polinomiális algoritmus, 252
pont
    elvágó, 193
    elvágó, erősen, 193
pont, gráfé, 163
pontkapacitás, 339
power set, 5
pozitív definit
    függvény, 178
Prüfer - kód, 230
Prüfer, Ernst P.H., 230
prímszám
    Mersenne-, 98
próbálkozás módszere, 361

Prim, Robert Clay, 240
probléma, 179
    kezdeti érték, 80
    pénzváltási, 123
    utazó ügynök, 246
problem
    traveling salesman, 246
projekció
    sztereografikus, 268
pseudograph, 165
pszeudográf, 165

Q.E.D. (Quod erat demonstrandum), xiii

Rédei László, 197
Rényi Alfréd, 328
részben rendezett
    halmaz, 73
részgráf, 172
    feszített, 172
    súlya / költsége, 240
    tiltott, 265
    topologikus, 263
részhalmaz
    független, 344, 345
    maximális, 344
    rangja, 345
    tovább nem bővíthető, 344
részstruktúra, 8
résztörtek, 359
réteg, gráfé, 267
Róka Sándor, 140
    tétele, 139, 140
racionális
    törtfüggvény, 359
Radó Tibor, 138
Rado, Richard, 138
Ramanujan, Srinivasa, 151
Ramsey
    -szám, gráfoké, 302
    -számok, 297
    tétele, 294, 295, 297
Ramsey, Frank P., 294
rang
    matroidé, 345
    részhalmazé, 345
rangfüggvény
    matroidé, 346
rank
    of a matroid, 345
    of a subset, 345
reakció
    -mechanizmus, 142
    kémiai, 141
    minimális, 141
redukált
    él-/illeszkedési-/incidencia- mátrix, 215
    gráfé, 263
reguláris
    gráf, 171
regular
    graph, 171
rekurzív
    összefüggés, 80
    összefüggés dimenziója, 94
        állandó együtthatójú, 95
    összefüggés, magasabbrendű, 94
        állandó együtthatójú, 95
    sorozat, 81
rekurzív összefüggés, 81
    feloldása, 82
    szimultán, 94
    többdimenziós, 94
    véges rendű, 81

rekurzió, 80
  dimenziója, 94
    állandó együtthatójú, 95
  feloldása, 82
  lineáris, 85
  magasabbrendű, 94
    állandó együtthatójú, 95
  rendje, 81
  szimultán, 94
  többdimenziós, 94
  véges rendű, 80
reláció, 7
relatív prím
  természetes számok, 74
rendezés
  bináris fán, 234
reprezentánsrendszer, gyenge
  halmazrendszeré, 314
Riemann, Georg F.B., 127
Robertson, George Neil, 271
root
  of a graph, 254
rooted tree
  binary, 231
  strict isomorphism, 231
rooting
  of a graph, 254
Ruffini, Paolo, 360
Ryser
  tétele, 136
Ryser, Herbert John, 136

sík-/ -beli gráf, 262
síkba teríthető gráf, 262
síkbeli gráf, külső -, 267
síkbeli térkép, 284
síkidom
  konvex, 273
séta
  gráfban, 173
súly
  -ozott távolság, csúcsoké, 177
  élé, 240
  úté, 174
  köré, 174
  részgráfé, 240
súlyfüggvény, 240
  metrikus, 246
súlyozott
  él, 167
  él / élű gráf, 240
sajátérték, 325
sajátvektor, 325
sakk, ix
Sauer, Norbert, 291
Segner János, 120
semi-, 192
  Hamiltonian graph, 192
sequence
  eventually periodic, 104
set, 5
  cardinality of -s, 5
  complement of a -, 5
  empty -, 5
  ground -, 5
  intersection of -s, 5
  power -, 5
  sub-, 5
  union of -s, 5
set system, 165
Seymour és Robertson tétele, 271
Seymour, Paul D., 271
signum, 314
Simonovits Miklós, xi, 295, 322
simple
  circle, 169

edge, 164
graph, 165
path, 168
sink, 329
Skolem
-lezárás, 176
hull, 176
Skolem, Thoralf Albert, 176
Smith, 265
sor
(hiper)harmonikus, 127
Dirichlet-, 127
sorbarendezés
lexikografikus, 257
vödör algoritmussal, 258
sorozat
átszámozása, 110
egymást elkerülő -ok, 105
Fibonacci, 81
generátorfüggvénye, 109
Lucas-, 102
Padovai, 102
Perrin-, 102
rekurzív, 81
számtani, magasabbrendű, 98, 99
rendje, 98, 99
véges, xii
végperiodikus, 104
végtelen, xii
sorozatok
összefűzése, 221
konkatenációja, 221
sorting
of data, 233
source, 329
spanning
tree, 239
spectra
of a graph, 325
spektrum
gráfé, 325
Sperner
-tulajdonság, 132
tétele, 131, 133
Sperner, Emanuel, 131
Spur
von einem Matrix, 204
standard
címke, csúcsé, 198
star
-graph, 169
Stein, Sherman Kopald, 267
Steinitz
féle izomorfia elv, 11
Steiniz
-féle izomorfia elv, 249
Stirling, James, 38, 153
-formula, 38
-számok, másodfajú, 153
tulajdonságai, 153
Stone, Marshall H., 11
-tétele, 11
strigula, 35
string, xii
struktúra
algebrai, 7, 163
izomorfak, 249
rész-, 8
típusa, 7
struktúratétel, 11, 144
subdivision
of an edge, 263
subgraph, 172
spanned, 172
subset, 5
rank of a -, 345

szürjektív függvények
  száma, 76
színalgebra, 9
színezés
  éleké, 166, 251
  csúcsé, 282
  csúcsoké, 166, 251
  gráf csúcsainak/éleinek, 281
  intervallum-, 304
  térképé, 284
színezési szám
  gráfé, 283
szám
  egész része, 132
  felosztása, 149
  négyzetmentes, 8
  partíciója, 149
számosság
  elérhetetlen, 297
számozás
  csúcsoké, 166
számozott
  csúcsú gráf, 251
  csúcsú gráfok izomorfiája, 251
számtani sorozat
  magasabbrendű -, 98, 99
    rendje, 98, 99
szélesség, gráfé, 260
szélkerék
  -gráf, 169
szénhidrogének, 172
szó, xii
szűkülés
  csúcshalmazé, 312
szabad
  matroid, 345
szaturált, 194
  gráf, 194
Szegő Gábor, 153
Szekeres György, 300
szimmetria tulajdonság, 48
szimmetrikus
  csoport, 314
  differencia, halmazoké, 139
  függvény, 178
szimplex
  algebrai, 142
  matroidban, 346
szimulálás
  valószínűségé, 56
szimultán
  rekurzió, 94
szint
  gyökereztetett fában, 255
szint, gráfé, 267
szintekbe rendezés
  gráf -e, 254
szintenkénti izomorfizmus, 256
szitaformula
  logikai, 64, 73
szomszéd
  csúcs -ai, 254
  csúcshalmazé, 310
szomszédos (csúcsok), 163
sztereografikus projekció, 268
szubfaktoriális, 67
szubkardinális
  halmazfüggvény, 346
szubmoduláris
  halmazfüggvény, 346

t - dekompozící, 302
T.Soós Vera, 328
többdimenziós
  rekurzió, 94
többpólusú

gráf, 168
többszörös
él, 164
többszörösen
élösszefüggő gráf, 177
csúcsösszefüggő gráf, 177
tört
-függvény, racionális, 359
elemi-/ parciális-/rész-, 359
típus
struktúra -a, 7
távolság
csúcsoké, 177
súlyozott- (csúcsoké), 177
térkép, 278
duális gráfja, 278, 284
kromatikus száma, 284
síkbeli, 284
színezése, 284
Tétel
Algebra Alap- -e, 360
Fa - mátrix -, 213
tétel
minimax, 334
struktúra-, 11, 144
tórusz, 268, 289
tag
gráfé, 176
tagadás
formula -a, 253
Tardos Gábor, 291
Tartaglia, Nicolo F., 360
Tartalmazás és kizárás elve, 63
tartomány, 284
telített
gráf, 194
teljes
gráf, 167
kétpólusú gráf, 168
párosítás, 310
többpólusú gráf, 168
teljes indukció
módszere, 22
term, 17
min-/max-, 17
természetes szám
algebrai, 57
természetes számok
relatív prímek, 74
test
konvex, 273
testbővítés
algebrai, 57
tetszőleges
gráf, 165
tiltott
gráf, 317
részgráf, 265
tintacsöppentős algoritmus, 211
Topkapi Palota (szeráj), 277
topológiailag homeomorf, 272
topologikus részgráf, 263
topologikus tér, 271
Trace
of a matrix, 204
transzformáció
Laplace-, 109
traveling salesman problem, 246
tree, 225
bicenter of -, 232
center of -, 232
height of a rooted -, 255
rooted -, 254
spanning, 239
trigonometrikus
generátorfüggvény, 127

polinom, 127
trinomiális
együttható, 34
tulajdonság
invariáns, 253
kicserélési, 347
kiegészítési, 344
Turán
gráfok, 168
graphs, 168
Turán Pál, 318
-féle gráf, általánosított, 318
-féle szám, gráfé, 318
Tutte, William Thomas "Bill" , 197
Tuza Zsolt, 140
type
of a structure, 7

uniform
matroid, 345
union
of sets, 5
utazó ügynök probléma, 246

vödör algoritmus, 258
vágás, 333
kapacitása, 333
vágatmátrix
gráfé, 204, 216
véges
differencia, 99
geometria, 134
matematika, ix
véges rendű
rekurzív összefüggés, 81
rekurzió, 80
végesen additív, halmazfüggvény, 71
végesen generált
Boole-algebra, 15
végperiodikus
sorozat, 104
végtelen
gráf, 166
valószínűség
szimulálása, 56
valószínűségszámítási módszer, 290
value
of a flow, 330
Vandermode, Alexandre Th., 90
-determináns, 90
Vandermonde
-konvolúció, 50
variáció, 29, 30
ismétlés nélküli, 30
ismétléses, 30
visszatevés nélküli, 30
visszatevéses, 30
variation, 30
generalized, 30
vastagság, gráfé, 267
vektor
ekvivalens -ok, 143
Venn, Johann, 6
-diagram, 6
vertex
ancestor of a -, 256
child of a -, 256
coloring of, 282
degree of, 170
descendant of a -, 256
incident on an edge, 213
incident on edge, 163
isolated, 171
leaf, 230
leaf -, 256
neighbours of a -, 254

well coloring of, 282
vertex, of a graph, 163
vertex-colouring, 251
vertices
adjacent, 163, 204
connected, 163
distance, 177
neighbours, 163
weighted distance, 177
visszatevés
-es
kombináció, 30
mintavétel, 30
variáció, 30
nélküli
kombináció, 30
mintavétel, 30
variáció, 30
VLSI probléma, 267
vonal, 261
Hamilton-, 192

Wagner és Fáry tétele, 267
Wagner, Klaus, 267
Weierstrass tétele, 331
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 331
weight
-ed distance of vertices, 177
of a circle, 174
of a path, 174
weight function, 240
wellcoloring
of vertices, 282
Whitney, Hassler, 343
width
of a graph, 260
windmill
-graph, 169

Zermelo, Ernst, 5
-Fraenkel axiómarendszer, 5
ZFC (Zermelo-Fraenkel axiómarendszer), 5
ZH (zárthelyi dolgozat), 19