



Írta:

GERZSON MIKLÓS
PLETL SZILVESZTER

IRÁNYÍTÁSTECHNIKA

Egyetemi tananyag



2011

COPYRIGHT: © 2011–2016, Dr. Gerzson Miklós, Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék; Dr. Pletl Szilveszter, Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Informatikai Tanszékcsoport

LEKTORÁLTA: Dr. Szakonyi Lajos, Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Kar Műszaki Informatika Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjeleníthető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.



SZÉCHENYI TERV



ISBN 978-963-279-529-4

KÉSZÜLT: a [Typotex Kiadó](#) gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Benkő Márta

KULCSSZAVAK:

az irányítástechnikai rendszerek leírása és vizsgálatának módszerei; a különböző dinamikus tagok ismertetése; a stabilitás fogalma és vizsgálata; a rendszerek leírása szakaszos időtartományban

ÖSSZEFOGLALÁS:

Az Irányítástechnika tárgy a mérnök informatikus és a villamosmérnök alapszakos hallgatóknak egyaránt kötelező szakmai alapozó tárgyként szerepel a tantervben. E jegyzet célja elsősorban nem a tantervben előírt teljes anyag áttekintése, hanem a gyakorlati foglalkozások alkalmazott szimulációs példák és megoldott számolási feladatok megértésének segítése példákon keresztül. Így ez a jegyzet, a legfontosabb anyagrészek rövid elméleti áttekintése mellett, jelentős számú kidolgozott példát is tartalmaz.

A jegyzet elsősorban a Pannon Egyetem Mérnök informatikus BSc szak tantervében szereplő Irányítástechnika tárgy tanmenetét követi, illetve annak sajátosságaira épül, figyelembe véve a Szegedi Tudományegyetem hasonló szakán oktatott tárgy jellegzetességeit. Ennek megfelelően elsősorban az irányítástechnika megértéséhez és alkalmazásához szükséges alapok kerülnek tárgyalásra. Az áttekintett témakörök „az irányítástechnikai rendszerek leírása és vizsgálatának módszerei; a különböző dinamikus tagok ismertetése; a stabilitás fogalma és vizsgálata; a rendszerek leírása szakaszos időtartományban” című területeket ölelik fel.

Bevezetés

Az Irányítástechnika tárgy a mérnök informatikus és a villamosmérnök alapszakos hallgatóknak egyaránt kötelező szakmai alapozó tárgyként szerepel a tantervben. E jegyzet célja elsősorban nem a tantervben előírt teljes anyag áttekintése, hiszen erre a közelmúlt számos kiváló jegyzet készült. Példaként elsősorban Keviczky László – Bars Ruth – Hetthéssy Jenő – Barta András – Bányász Csilla Szabályozástechnika jegyzetét. (Műegyetemi Kiadó megjelentetésében) és (Akadémia Kiadó gondozásában) Lantos Béla Irányítási rendszerek elmélete és tervezése című három kötetes könyvét illetve Szakonyi Lajos és munkatárai által a számítógépes folyamatirányítás témakörében összeállított és a Pécsi Tudományegyetemen megjelentett jegyzetsorozatot szeretnénk kiemelni, számos más kiváló könyv mellett.

Az elmúlt években szerzett oktatási tapasztalataink alapján úgy látjuk, hogy a hallgatók jelentős részének gondot okoz az elméleti anyag mélyebb elsajátítása. A gyakorlati foglalkozások célja ennek segítése szimulációs példák és számolási feladatok megoldásával. E folyamat támogatására készült ez a jegyzet, mely a legfontosabb anyagrészek rövid elméleti áttekintése mellett jelentős számú kidolgozott példát is tartalmaz.

A jegyzet elsősorban a Pannon Egyetem Mérnök informatikus BSc szak tantervében szereplő Irányítástechnika tárgy tanmenetét követi, illetve annak sajátosságaira épül, figyelembe véve a Szegedi Tudományegyetem ugyanezen szakán oktatott tárgy jellegzetességeit. Ennek megfelelően elsősorban az irányítástechnika megértéséhez és alkalmazásához szükséges alapok kerülnek tárgyalásra. Az áttekintett témakörök "az irányítástechnikai rendszerek leírása és vizsgálatának módszerei; a különböző dinamikus tagok ismertetése; a stabilitás fogalma és vizsgálata; a rendszerek leírása szakaszos időtartományban" című területeket ölelik fel.

A jegyzet a TÁMOP – 4.1.2-08/1/A program keretében készült, a szerzők köszönik a jegyzet elkészítéséhez nyújtott támogatást. Bár a kézirat leadásakor a jegyzetírás folyamatának egy lépése lezárul, de a szerzők előre is köszönik a jegyzet használóinak, az oktató kollégáknak és a hallgatóknak egyaránt a visszajelzést, hogy egy újabb kiadásban a bevezetőben megfogalmazott célt, tehát az irányítástechnika alapjainak készség szintű elsajátítását még inkább segíthessük.

Veszprém – Szeged, 2011. január 31.

Gerzson Miklós
Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar

Pletl Szilveszter
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
Tartalomjegyzék.....	4
1. Rendszerek áttekintése.....	6
1.1. Rendszertechnikai alapfogalmak	6
1.2. Rendszerek osztályozása	7
1.3. Példák különböző rendszerekre	12
1.4. Állapotegyenletek	15
1.5. Példák állapotegyenletekre.....	22
1.6. Sima, nemlineáris rendszer linearizálása	40
2. Rendszerelemek matematikai leírása és vizsgálata	43
2.1. A bemenet-kimenet modell	43
2.2. Vizsgáló jelek	44
2.2.1. Egységimpulzus függvény	45
2.2.2. A négyzög-impulzus függvény	46
2.2.3. Egységugrás függvény.....	46
2.2.4. Egységsebesség-ugrás függvény	47
2.2.5. Egységgyorsulás-ugrás függvény	47
2.2.6. Szinuszos bemenő jel.....	48
2.3. Válaszfüggvény meghatározása időtartományban a súlyfüggvény ismeretében	48
2.4. Válaszfüggvény meghatározása időtartományban általános esetben	49
2.5. Az átviteli függvény.....	50
3. Laplace transzformáció	53
3.1. Feladatok Laplace transzformáció alkalmazására	56
4. Irányítástechnikai rendszerek leírása.....	62
4.1. Alapkapcsolások eredő átviteli függvénye.....	64
4.2. Helyettesítő kapcsolások.....	67
4.3. Feladatok hatásvázlatok átalakítására	70
5. Dinamikus tagok leírása.....	78
5.1. Nulladrendű tag	78
5.2. Elsőrendű tag	79
5.3. Integráló tagok.....	82
5.4. Másodrendű tagok.....	83
5.5. Másodrendű modellek zérus együtthatóval.....	91
5.6. Magasabb rendű tagok	93
5.7. Differenciáló tagok	94
5.8. Feladatok dinamikus tagok vizsgálatának témaköréből.....	96
6. Stabilitásvizsgálat	110
6.1. Stabilitásdefiníciók	110
6.1.1. Korlátos bemenet – korlátos kimenet (BIBO) stabilitás definíciója	110
6.1.2. Az aszimptotikus stabilitás definíciója	111
6.1.3. Aszimptotikusan stabil rendszer viselkedése egységimpulzus bemenet esetén l 13	
6.1.4. Aszimptotikusan stabil rendszer viselkedése egységugrás bemenet esetén 114	
6.2. Stabilitásvizsgálati módszerek.....	115
6.2.1. Routh-Hurwitz kritérium	115
6.2.2. Nyquist-, illetve Bode-féle stabilitási kritérium.....	116

6.2.3. Gyökhelygörbe	121
6.3. Feladatok stabilitásvizsgálat témaköréből	132
7. Mintavételes rendszerek	143
7.1. Jelek osztályozása	143
7.2. Mintavételes rendszerek leírása	143
7.3. Folytonos bemenet – kimenet modell diszkretizálása	150
7.4. Differenciaegyenletek megoldása	152
7.4.1. Differenciaegyenletek analitikus megoldása	153
7.4.2. Differenciaegyenlet megoldása z-transzformáció segítségével	154
7.4.3. Differenciaegyenlet megoldása iteratív úton	155
7.4.4. Kimenet meghatározása polinom osztással	156
7.5. Az impulzus-átviteli függvény	157
7.6. Eredő impulzus-átviteli függvény meghatározása	160
7.7. Diszkrét idejű rendszerek erősítésének meghatározása	163
7.8. Tartószervek	164
7.9. Mintavételes rendszerek stabilitása	166
7.9.1. Diszkrét BIBO stabilitás	167
7.9.2. Aszimptotikus stabilitás	168
7.9.3. Stabilitásvizsgálati módszerek	172
7.10. Gyakorló feladatok – mintavételes rendszerek	173
8. Szabályozók paraméter beállítása	206
8.1 PID szabályozók	207
8.2. A szabályozó paramétereit változtató irányítás	213
Ábrajegyzék	218

1. Rendszerek áttekintése

1.1. Rendszerteknikai alapfogalmak

A tananyag megértésének érdekében mindenképp tisztázni kell néhány, a rendszerrel kapcsolatos alapfogalmat. A rendszer fogalmának meghatározása többféle szempontból lehetséges. Szadovszkij professzor „Általános rendszerelmélet alapjai” c. művében több, meghatározó jelentőségű definíciót ad meg. Az első csoportba tartoznak a matematikai modellek irányából megközelítő definíciók, a második csoport definíciói a rendszert, mint relációk által összekapcsolt elemek halmazát tekintik, míg a harmadik csoportba sorolható meghatározások a „bemenet, kimenet, információfeldolgozás”, fogalmával operálnak. A továbbiakban a mérnökök számára két egyenértékű, kiemelésre érdemes definíció kerül megadásra:

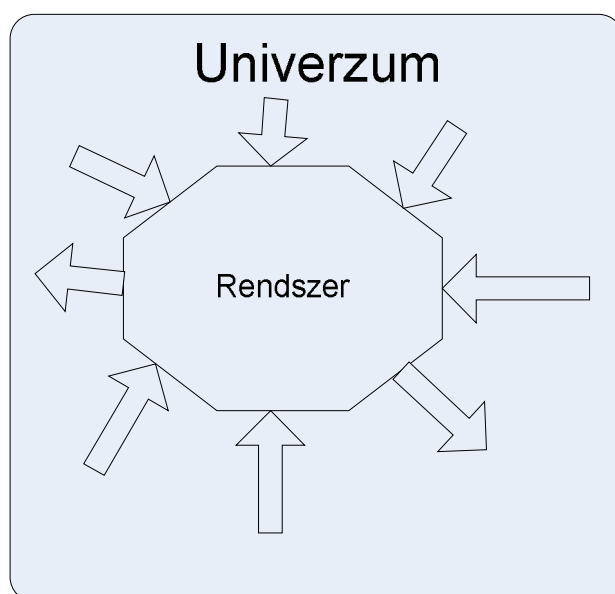
1. A valóságnak minden térben elhatárolt részét, ahol a különböző anyag- és mozgásformák elemeit kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolják össze, **rendszernek nevezzük**.
2. A **rendszer**, valóságos vagy elképzelt objektumok viszonylag jól körülhatárolható olyan halmaza, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak egybe.

Elméleti szempontból rendszernek tekinthető minden olyan transzformáció, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel.

A rendszer elemének tekintjük azt az objektumot, amelyet a rendszer vizsgálatához már további részekre nem szükséges felbontani. A rendszer elemei közötti, valamint a környezethez fűződő összefüggések és kapcsolatok kifejezhetnek egyszerű vagy bonyolult; fizikai, kémiai, biológiai, illetve információs jellegű kölcsönhatásokat. A rendszerrel kapcsolatos ismereteink leírását, az összefüggések matematikai formalizmussal való megadását matematikai modellnek, modellrendszernek nevezzük.

Mivel minden természetben előforduló, vagy ember által létrehozott rendszer, folyamat, jelenség kölcsönhatásban van egymással, ha bármilyen rendszert tanulmányozunk is, figyelembe kell vennünk a környezet hatását a rendszerre, illetve a rendszer hatását a környezetre. Ezek a hatások lehetnek olyanok, amelyek a rendszer meghatározott pontjaiban összpontosulnak, például a rendszer egy elemére ható erő formájában. A hatások azonban lehetnek elosztottak is, ekkor például az egész rendszer, vagy annak eleme felületére, esetleg minden egyes pontjára hatnak. Ilyen elosztott jellegűek az anyag-, energia-, és impulzusáramok hatásai, amelyek egy rendszer (rendszerelem) bizonyos felületén értelmezhetők, továbbá a gravitációs és mágneses terek hatásai, stb. A rendszer és környezete összetartozó, dialektikus egységet képező fogalmak. Szétválasztásuk, a rendszer határvonalainak kijelölése, a rendszer körülhatárolása a feladattól, a vizsgálat szempontjaitól, a beavatkozást igénylő szituációtól függ. Az 1.1. ábra vázlatosan tünteti fel

a rendszert a tér olyan részeként, amelyben a rendszer összes eleme és a környezethez fűződő összes kapcsolatai összpontosítva (koncentrálva) vannak. A kapcsolatokat ábrázoló nyilak a hatások terjedésének irányát mutatják. Minden rendszer jellemezhető az azt felépítő elemek tulajdonságaival és azokkal a kapcsolatokkal, amelyek az adott rendszer és a környezet kölcsönhatását jellemzik. Meg kell jegyezni, hogy akármilyen részletesen és alaposan is tanulmányozzuk a rendszer tulajdonságát illetve viselkedését, sohasem tudjuk figyelembe venni mind azt a végtelen sok tényezőt, amely a rendszert közvetve, vagy közvetlenül befolyásolja. Ezért minden tanulmányozás, kísérlet eredményét csakis megfelelő fenntartással fogadhatjuk el és alkalmazhatjuk a gyakorlatban. A rendszerekben keringő és áthaladó hatásokat - amelyek információs kapcsolatokat valósítanak meg- jeleknek nevezzük, továbbá a jelnek legfontosabb sajátossága az információtartalom. Elmondható, hogy a jel a jelhordozó (különböző fizikai, kémiai stb. mennyiség) mindazon értéke (értékváltozása), mely alkalmas a hozzárendelt információ megszerzésére, továbbítására, tárolására.

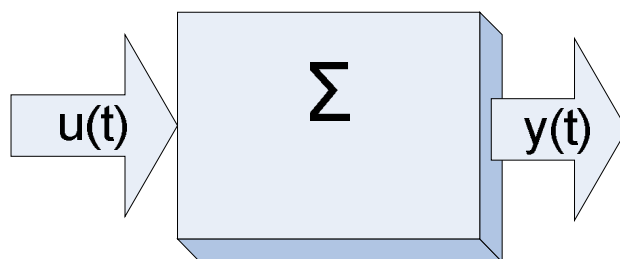


1.1. ábra. A rendszer és környezete

1.2. Rendszerek osztályozása

A rendszereket viselkedésük és az őket leíró matematikai modell alapján osztályozzuk. Egy rendszer több osztályba is tartozhat. Az osztályok gyakran ellentétpárokból állnak.

Az alábbiakban röviden bemutatásra kerülnek az osztályok. A rendszer szimbolikus jelölését az 1.2. ábra. mutatja.



1.2. ábra. A rendszer szimbolikus jelölése

A Σ -val jelölt rendszer bemenő és kimenő jeleinek értékét a t pillanatban értelem-szerűen $u(t)$ és $y(t)$ jelöli, míg $u(\cdot)$ és $y(\cdot)$ jelöli a teljes megfigyelhető jelet. Érvényes továbbá a visszahatás-mentesség : $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t)$.

Az osztályok

Folytonos vagy diszkrét (a jelek időbeli lefolyása szerint)

Amennyiben a rendszer bemenetén vagy kimenetén található jel adott időtartományban megszakítás nélkül fennáll, akkor folytonos rendszerről beszélünk, de ha a jel csak meghatározott időpillanatokban értelmezett, akkor diszkrét rendszerről beszélünk. Tehát a folytonos és diszkrét meghatározás az időbeli folyamatosságra illetve szaggatott jellegre vonatkozik. Folytonos idejű rendszer esetében az idő intervalluma $[a, b]$ vagy \mathfrak{R}^1 , diszkrétidejű rendszernél pedig kitüntetett időpillanatokot jelző valós számsorozat, tipikusan $\{0, T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots\}$, ahol T a mintavételi idő.

Példa folytonos idejű rendszerre: $y(t) = 3u(t - t_0)$, $t_0 > 0$.

Példa diszkrét idejű rendszerre: $y[n] = 2u[n] + 3u[n-1]$, ahol $y[n]$ az n -edik mintavételi időben a kimenet értéke. Az előbbivel egyenértékű leírás: $y[nT] = 2u[nT] + 3u[(n-1)T]$.

Kauzális vagy nem kauzális

A kauzális (ok-okozati) rendszernél ok-okozati kapcsolat áll fenn annak bemenő és kimenő jelei között. Jellemző, hogy rendszer válasza egy t_0 időpontban csak az időpontot megelőző gerjesztésektől függ ($t \leq t_0$). Más szóval a kauzális rendszereknek nincs előre-látó képességük. A valós fizikai rendszerek kauzálisak. A nem kauzális rendszerek fizikailag nem reálisak. Ilyenek a jóslások és más prognosztikai, gondolati rendszerek. A mérnöki gyakorlat azonban alkalmazza a nem kauzális rendszereket is. A folytonos idejű rendszerek vizsgálatánál gyakran egyszerűbb matematikai tárgyalást biztosítanak. A diszkrétidejű

rendszerek esetében a jelek memorizálhatók és valósídon kívül feldolgozhatók. Itt megemlíthető a képfeldolgozás, a hangfeldolgozás, a meteorológia vagy más hasonló terület.

A kauzalitás fogalma kiterjeszthető a jelekre is. A kauzális jelek értéke $t < 0$ esetén nullával egyenlő. Ezek a belépő jelek.

Példák kauzális rendszerekre:

Folytonos idejű: $y(t) = u(t - t_0)$, $t_0 > 0$, diszkrét idejű: $y[n] = u[n] + u[n - 1]$.

Példák nem kauzális rendszerekre:

Folytonos idejű: $y(t) = u(t + t_0)$, $t_0 > 0$, diszkrét idejű: $y[n] = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^M u[n - k]$.

Az utóbbi rendszert gyakran használják átlagképzésre.

Statikus vagy dinamikus

A statikus rendszer kimenete egy t_0 időpontban csakis kizárólag az abban a pillanatban jelentkező gerjesztéstől (bemenettől) függ. A statikus rendszereknek nincs memóriájuk. A statikus rendszerek viselkedése nem függ az időtől. A statikus rendszer algebrai vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó közönséges vagy parciális differenciálegyenletekkel írható le. A dinamikus rendszerek esetében egy adott időben gerjesztett kimenet értéke függ a múltbeli gerjesztésektől is. A dinamikus rendszerek energiatárolót(kat) tartalmazó rendszerek, vagyis memóriával rendelkező rendszerek. Matematikai modelljük olyan közönséges vagy parciális differenciálegyenletekkel adható meg, amelyekben szerepel idő szerinti derivált.

Koncentrált paraméterű vagy elosztott paraméterű

Koncentrált paraméterű rendszer esetében az elemeket paramétereik tekintetében idealizálnak, kiterjedés nélkülinek tekintjük. Ilyen idealizált elem a tömegpont, amely bizonyos esetekben alkalmas egy bolygó figyelembevételére egy koncentrált paraméterű rendszeren belül. Az elosztott paraméterű rendszerben a paraméterek általában térben folytonos eloszlásban hatnak. Az elosztott paraméterű rendszerek matematikai modellje parciális differenciálegyenletekkel adható meg.

Homogén vagy nem homogén

Homogén rendszerre érvényes: $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t) \Rightarrow Au(t) \xrightarrow{\Sigma} Ay(t)$, vagyis amennyiben a bemenetet megnöveljük A -szorosára, akkor a kimenet is A -szorosra növekszik.

Példa homogén rendszerre: $y(t) = 5u(t)$.

Példa nem homogén rendszerre: $y(t) = 5u(t) + 2$.

Additív vagy nem additív

Legyen $u_1(t)$ gerjesztésre egy rendszer válasza $y_1(t)$, és $u_2(t)$ gerjesztésre $y_2(t)$, akkor a két bemenet összegére ($u_1(t) + u_2(t)$) a válasz a két kimenet összege ($y_1(t) + y_2(t)$). Tehát additív rendszerre érvényes:

$$u_1(t) \xrightarrow{\Sigma} y_1(t), \quad u_2(t) \xrightarrow{\Sigma} y_2(t) \Rightarrow (u_1(t) + u_2(t)) \xrightarrow{\Sigma} (y_1(t) + y_2(t))$$

Az additivitást igen jól szemlélteti a 1.3. ábrán látható jelleggörbe. Ha egy függvény leképezés az:

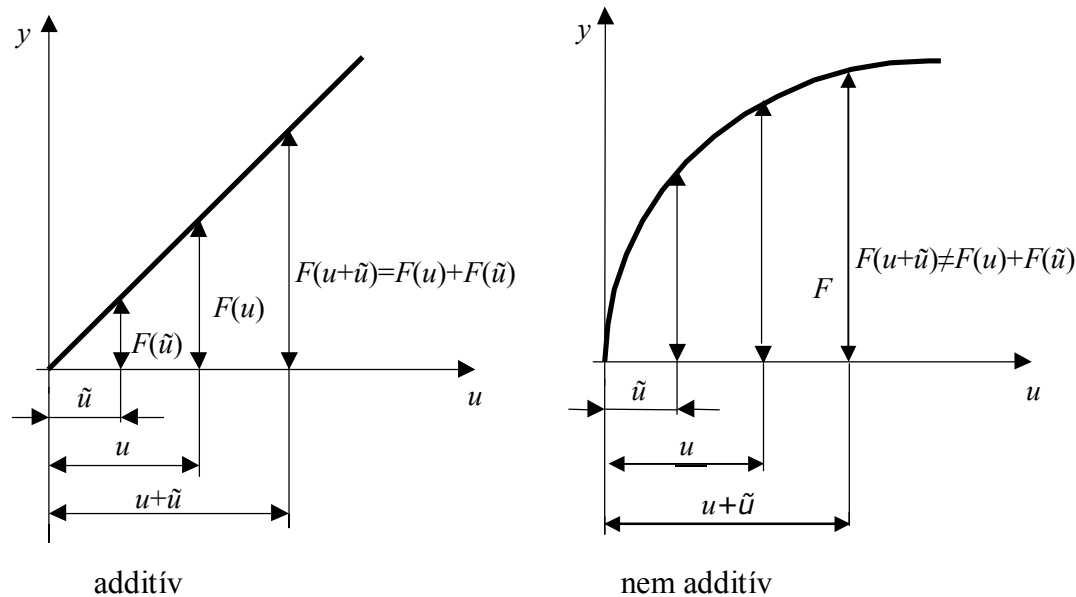
$$y(t) = F(u(t))$$

törvényszerűség szerint történik, akkor a modell additív, ha

$$F(u + \tilde{u}) = F(u) + F(\tilde{u});$$

és nem additív, ha

$$F(u + \tilde{u}) \neq F(u) + F(\tilde{u}).$$



1.3. ábra. Additív és nem additív jelleggörbék

Lineáris vagy nemlineáris

A lineáris rendszer egyszerre homogén és additív is.

Ezt a tulajdonságot szuperpozíciónak nevezzük. Vagyis

$$u_1(t) \xrightarrow{\Sigma} y_1(t), \quad u_2(t) \xrightarrow{\Sigma} y_2(t) \Rightarrow (Au_1(t) + Bu_2(t)) \xrightarrow{\Sigma} (Ay_1(t) + By_2(t))$$

Az egyenletek akkor lineárisak, ha a független változók (vagy annak deriváltjai) csak első hatványon és transzcendens függvények által történő leképezések nélkül fordulnak elő benne, egyébként nemlineárisak. Ha a linearitás valóban fennáll, akkor jelentősen

leegyszerűsíti a rendszer viselkedésének elemzését. A valódi világ számos rendszere igen széles tartományban, legalábbis első közelítésben, lineáris.

Példa lineáris rendszerre: $a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu$

Példa nemlineáris rendszerre: $a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + a_0 y^3 = bu$

A folytonos rendszerekhez hasonlóan, amennyiben a diszkrét rendszer egyszerre homogén és additív is, akkor az lineáris diszkrétidejű rendszer.

Időinvariáns vagy idővariáns

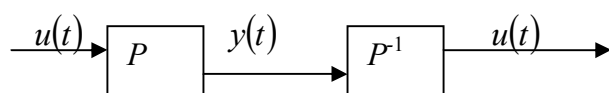
Ha a rendszer kapcsolatai és paraméterei időfüggetlenek, akkor a rendszer időinvariáns (autonóm). Időinvariáns rendszerek esetén egy adott gerjesztésre ugyanaz a válasz, függetlenül attól, hogy az mikor lett alkalmazva.

Vagyis $u(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t) \Rightarrow u(t - t_0) \xrightarrow{\Sigma} y(t - t_0)$.

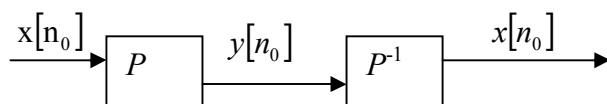
Diszkrét rendszerek esetén pedig ha $x[n]$ bemenetre a válasz $y[n]$, akkor az időinvariáns rendszer válasza $x[n - n_0]$ bemenetre $y[n - n_0]$.

Invertálható rendszer

A rendszer invertálható, ha annak kimenetéből egyértelműen meghatározható a bemenete. Más szóval a rendszernek létezik inverze, amennyiben különböző gerjesztések különböző válaszokat generálnak.



Ez igaz diszkrét rendszerek esetében is. Például az $y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]$ akkumulátorként is ismert rendszer inverze az $x[n_0] = y[n_0] - y[n_0 - 1]$ rendszer.



Determinisztikus vagy sztochasztikus

A determinisztikus rendszer független változói függvényekkel adhatók meg térben és időben. A sztochasztikus rendszer egyes független változói csak valószínűségszámítási összefüggésekkel írhatók le.

1.3. Példák különböző rendszerekre

1. Példa

Memóriával rendelkező diszkrét rendszer

Diszkrét rendszerre akkor mondjuk, hogy memóriával rendelkezik, ha egy adott pillanatban jelentkező kimeneti érték nemcsak az akkor ható bemeneti értéktől függ, hanem az azt megelőző értékektől is.

Példa memóriával nem rendelkező rendszerre: $y[n] = x^2[n]$.

Példa memóriával rendelkező rendszerre: $y[n_0] = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n]$, amely rendszert akkumulátornak is szoktak nevezni.

2. Példa

A következő differenciálegyenletek mindegyike egy rendszer működését írja le:

$$a) \quad y(t) = 4u(t) + 2 \frac{du(t)}{dt}$$

$$b) \quad y(t) = u^3(t)$$

$$c) \quad y(t) = 3tu(t) + 4 \frac{du(t)}{dt}$$

$$d) \quad y(t) = tu^3(t)$$

Végezzük el a rendszerek osztályozását, ha $y(t)$ a rendszerek bemenete és $u(t)$ pedig a kimenete.

Megoldás:

- A rendszer lineáris és állandó paraméterű
- A rendszer nem lineáris és állandó paraméterű.
- A rendszer lineáris és változó paraméterű.
- A rendszer nem lineáris és változó paraméterű.

3. Példa

Az alábbiakban adott három rendszer egyenlete, ahol $y(t)$ a folytonos idejű rendszerek bemenete és $u(t)$ pedig a kimenete, $y[kT_0]$ a diszkrétidejű rendszerek bemenete és $u[kT_0]$ pedig a kimenete:

$$a) \quad b_1 \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right)^2 + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (b_3 + b_4 \cos t) \frac{dy(t)}{dt} + b_5 y(t) = u(t)$$

$$b) \quad b_1 (y[(k+2)T_0])^2 + [b_2 + b_3 y[kT_0] + b_4 \sin(kT_0)] y[kT_0] = u[kT_0]$$

$$c) \quad y[kT_0] = \frac{b_1}{T_0} \{u[kT_0] - u[(k-1)T_0]\} + 2b_2$$

Határozzuk meg a b_1 , b_2 , b_3 , b_4 és b_5 paraméterek értékeit úgy, hogy a rendszer:

- lineáris,
- változó paraméterű legyen.

Megoldás:

a)

A rendszer akkor lesz lineáris, amennyiben a $b_1=0$ és $b_4=0$. Ekkor a rendszer differenciálegyenlete:

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_3 \frac{dy(t)}{dt} + b_5 y(t) = u(t)$$

A rendszer akkor lesz változó paraméterű, ha $b_4 \neq 0$.

b)

A rendszer akkor lesz lineáris, ha $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ és $b_4 = 0$. Ekkor a rendszer differenciaegyenlete:

$$b_2 y[kT_0] = u[kT_0]$$

A rendszer akkor lesz változó paraméterű, ha $b_4 \neq 0$.

c)

A rendszer lineáris, ha $b_2 = 0$.

A rendszer állandó paraméterű függetlenül b_1 és b_2 paraméterek értékétől.

4. Példa

Vizsgáljuk ki az alábbi rendszer linearitását:

$$y[kT_0] = \frac{1}{T_0}(u[kT_0] - u[(k-1)T_0]): \text{ ahol a } T_0 \text{ a mintavételezési időállandó és } k = 0, 1, 2, \dots$$

Megoldás:

Amennyiben $u = u_1[kT_0]$ akkor a rendszert leíró egyenlet szerint a kimenet:

$$y_1[kT_0] = \frac{1}{T_0}(u_1[kT_0] - u_1[(k-1)T_0]).$$

Ha $u = u_2[kT_0]$, akkor a rendszer kimenete az alábbiak szerint alakul:

$$y_2[kT_0] = \frac{1}{T_0}(u_2[kT_0] - u_2[(k-1)T_0]).$$

Most vegyük a két bemenet lineáris kombinációját: $u = a_1u_1[kT_0] + a_2u_2[kT_0]$, ekkor:

$$y_3[kT_0] = \frac{1}{T_0}(a_1u_1[kT_0] + a_2u_2[kT_0] - (a_1u_1[(k-1)T_0] + a_2u_2[(k-1)T_0])),$$

$$y_3[kT_0] = \frac{a_1}{T_0}(u_1[kT_0] - u_1[(k-1)T_0]) + \frac{a_2}{T_0}(u_2[kT_0] - u_2[(k-1)T_0]).$$

Belátható, hogy $y_3[kT_0] = a_1y_1[kT_0] + a_2y_2[kT_0]$,

így bizonyított, hogy a feladatban megadott matematikai modellel leírható rendszer lineáris.

5. Példa

Vizsgáljuk ki az alábbi egyenlettel megadott rendszer linearitását:

$$y(t) = u^2(t)$$

Megoldás:

Legyen $u = u_1(t)$, akkor az egyenlet: $y_1(t) = u_1^2(t)$.

Most figyeljük az $u = u_2(t)$ bemenet hatását, ekkor $y_2(t) = u_2^2(t)$.

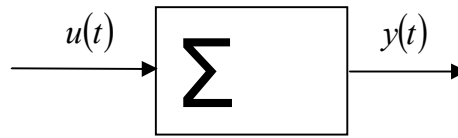
Majd vizsgáljuk az $u = a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$ bemenet hatását, ekkor:

$$y_3(t) = (a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t))^2 \quad y_3(t) = a_1^2 u_1^2(t) + 2a_1 a_2 u_1(t) u_2(t) + a_2^2 u_2^2(t).$$

Elmondható, hogy $y_3(t) \neq a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$, így az adott rendszer nem homogén, nem additív, nem érvényes rá a szuperpozíció elve, tehát nemlineáris.

1.4. Állapotegyenletek

A dinamikus rendszerek definíciója során Kalman, Falb és Arbib módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy a rendszer teljes előélete bármilyen τ esetén leírható az $x(\tau)$ állapottal egészen τ időpontig. A rendszer bemenő jelének értéke egy t időpillanatban $u(t)$, a kimenő jel ugyanakkor $y(t)$.



1.4. ábra. A dinamikus rendszer szimbolikus ábrázolása.

Általánosan az 1.4. ábra szerint megadott dinamikus rendszer felírható egy többkomponensű struktúrával az alábbiak szerint:

$$\Sigma = (\mathfrak{T}, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, g) \quad (1.1)$$

A struktúra egyes elemei a következők:

\mathfrak{T} az időpontok halmaza,

X az állapotok halmaza,

U a bemenet értékeinek halmaza,

Ω a megengedett bemenő jelek halmaza, $\Omega \subset \{u : \tau \rightarrow U\}$,

Y a kimenet értékeinek halmaza,

Γ a lehetséges kimenő jelek halmaza, $\Gamma \subset \{y : \tau \rightarrow Y\}$,

φ az állapotátmenet függvény, $\varphi : \tau \times \tau \times X \times \Omega \rightarrow X$,

g a kimenet leképezés függvény, $g : \tau \times X \times U \rightarrow Y$.

Ha a rendszer a τ pillanatban az x állapotban van és a bemenő jel $u(\cdot)$, akkor az állapot és a kimenet a t pillanatban $x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot))$ és $y(t) = g(t, x(t), u(t))$ módon adható meg.

Tehát általánosan egy rendszer állapota egy t pillanatban megadható:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)). \quad (1.2)$$

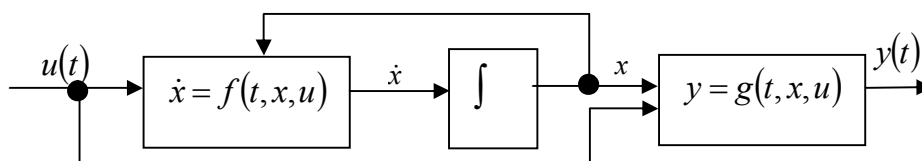
Speciális esetben, ha a rendszer **lineáris**, akkor

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)u(\cdot), \quad (1.3)$$

az állapot megadható a kezdeti feltétel hatásából és a bemenő jel hatásából.

Egy másik speciális eset a **sima** rendszer. Sima rendszer esetében az állapotokat leképező leképezés: $x(\cdot) = \varphi(\cdot, \tau, x, u(\cdot))$ folytonos, $x(\cdot) \in C^{(1)}$, tehát legalább egyszer differenciálható és így felírható a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)). \quad (1.4)$$



1.5. ábra. Sima nemlineáris rendszer hatásvázlata

Tehát gyakorlati megközelítésből kijelenthetjük, hogy az egy- és több- bemenetű, illetve kimenetű dinamikus rendszer leírására nemcsak a bemenőjelek és kimenőjelek alkalmasak, hanem a belső állapotváltozók és azok változásai is. Az állapotváltozókon az időtől függő változóknak azt a legkisebb elemszámú halmazát értjük, amely a rendszer állapotának teljes és pontos leírásához szükséges és elegendő.

Tegyük fel, hogy egy villamos rezgőkör bemenő jele a kapcsolófeszültség, kimenő jele az áram. Két energia felhalmozó elemet, a kondenzátort és az induktivitást tartalmazza. Ezért két független állapotváltozója lehet, például a kondenzátor feszültsége és az ellenállás feszültsége, vagy a kondenzátor töltése és árama. Hasonlóképpen egy mechanikai rezgőkör bemenő jele az erő, kimenő jele a sebesség, két állapotváltozója lehet, például a rugóerő és a csillapítóerő, vagy az elmozdulás és a sebesség. (Egyes állapotváltozók meg is egyezhetnek a kimenőjellel.) Az eddigiekből világosan kitűnik, hogy egy vizsgált rendszernek többféle állapotváltozója és így többféle egyenletrendszere képzelhető el, még akkor is, ha a bemenőjelek és a kimenőjelek adottak.

Az állapotváltozókból alkalmas módon egy vektort képezünk; az állapotvektort. Az átmeneti folyamatot egy elsőrendű vektor-differenciálegyenlet segítségével írjuk le. A bemenőjelből ugyancsak vektort képezünk, a bemenőjelek vektorát. Hasonlóképpen képezhető a kimenő jelek vektora, vagy röviden a kimenővektor. Az 1.5. ábrán megadott rendszerre általánosan érvényes, hogy $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^r$, $y \in \mathfrak{R}^m$; n az állapotváltozók száma, r a bemenetek száma és m a kimenetek száma. Speciálisan, ha $m = r = 1$, akkor a rendszer egy bemenetű-egy kimenetű (angolul single input – single output system SISO), máskülönben több bemenetű-több kimenetű (angolul multiple input – multiple output system MIMO) rendszerről beszélünk.

A harmadik speciális rendszer legyen a **sima lineáris** rendszer. A rendszert leíró egyenletek a következőképp alakulnak:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, u(\cdot)) = \Phi(t, \tau)x + \Theta(t, \tau)u(\cdot) \Rightarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, t, x(t), u_{[t, t+\Delta t]}) - \varphi(t, t, x(t), u_{[t, t+\Delta t]})}{\Delta t},$$

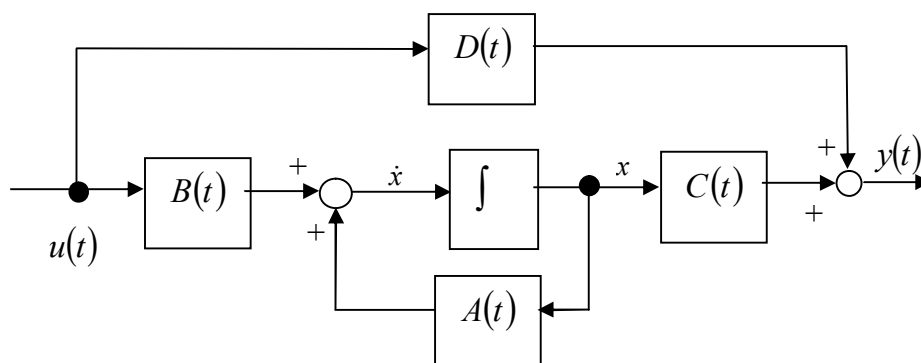
$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t, t) - \Phi(t, t)}{\Delta t} x(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Theta(t + \Delta t, t) - \Theta(t, t)}{\Delta t} u_{[t, t+\Delta t]}.$$

Az állapotegyenlet:
$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1.5)$$

$$x(\tau) = x,$$

és a kimenet
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (1.6)$$

$$x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^r, y \in \mathfrak{R}^m.$$



1.6. ábra. Sima lineáris rendszer hatásvázlata

A 1.6. ábra által meghatározott rendszer folytonos idejű időben változó lineáris rendszer. Az ábrán használt jelölések: $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ és $D(t)$ rendre $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$ méretű, időben változó elemeket tartalmazó mátrixok.

A (1.5) állapotegyenlet megoldása $\Phi(t, \tau)$ állapotmátrix segítségével adható meg:

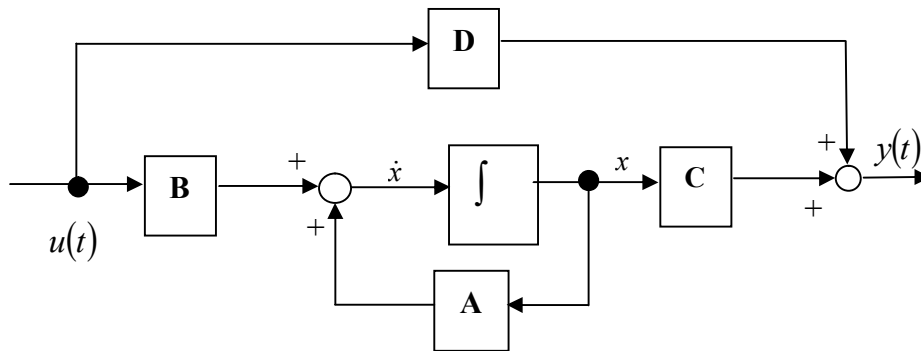
$$x(t) = \Phi(t, \tau)x + \int_{\tau}^t \Phi(t, \gamma)B(\gamma)u(\gamma)d\gamma. \quad (1.7)$$

Végül negyedik speciális esetként a **folytonosidejű, időinvariáns, lineáris rendszerek** (linear time invariant system LTI) leíró egyenletei a következőkben adóttak.

$$\text{Az állapotegyenlet: } \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.8)$$

$$x(\tau) = x,$$

$$\text{és a kimenet } y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1.9)$$



1.7. ábra. Lineáris időinvariáns rendszer hatásvázlata

Ebben az esetben a $\Phi(t, \tau)$ alapmátrix az exponenciális mátrixból számítható:

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}. \text{ Az exponenciális mátrix definíciója: } e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

A (1.8) állapotegyenlet megoldása:

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x + \int_{\tau}^t e^{A(t-\gamma)}Bu(\gamma)d\gamma. \quad (1.10)$$

Az összes lehetséges állapotvektornak halmaza az állapottér, az összes lehetséges bemenő vektorok halmaza a bemeneti tér, az összes lehetséges kimenővektorok halmaza a kimeneti tér. Általában ezek a terek többdimenziós, valós EUKLIDESZI-i terek.

Az állapotváltozókat egy-egy koordinátatengelyre felmérve absztrakt állapottér áll elő. Háromnál több állapotváltozóra a szokásos háromdimenziós euklideszi tér általánosításaként a több-dimenziós, ún. hipertér áll elő, míg a kétdimenziós állapotsík és az egydimenziós állapotegyenes az állapottér speciális esetének tekinthető. Az állapottérnek az a része, amelyben a rendszer állapotát meghatározó pont előfordulhat, az a megengedett állapotok tartománya. A dinamikus rendszerek vizsgálata és méretezése ebben az állapottérben végezhető el.

A rendszer állapota azt az egy adott időpontban megadott információt jelenti, amely ettől az időponttól kezdve a rendszer viselkedésének meghatározásához szükséges. Minden

rendszer nagyszámú és egymástól megkülönböztethető állapotba kerülhet. A rendszer állapotát bizonyos pontossággal meghatározhatjuk azoknak a belső jellemzőknek és kölcsönhatásoknak mértékrendszerben kifejezett értékeivel, amelyek a rendszer helyzetét (pl. távolság, szint), energia- és anyagjellemezőit (pl. hőmérséklet, nyomás, összetétel) és az egyéb információjellegű (pl. számláló állapota, megtett fordulatok száma) mutatóit határozzák meg. Az állapotváltozók értékeit a t időpontban az $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ időfüggvényekkel és az

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} ; \quad x(t) \in R^n$$

állapotvektor felhasználásával rendszerezük. Az állapotvektor egy tetszőleges t időpontra meghatározza a rendszer pillanatnyi állapotát. Ha az állapotvektor elemeinek értékeit két egymástól különböző időpontban vizsgáljuk ($t_1 \neq t_2$), akkor az állapotvektor értékeinek megváltozásából meghatározhatjuk a rendszer által elvégzett „mozgás” mértékét és jellegét.

A mozgás fogalmát a mechanikában a szó szoros értelmében használják, és ez azt jelenti, hogy a test időben változtatja helyzetét. A továbbiakban mozgásnak nevezzük az elem állapotjellemzőinek mindenfajta időbeli változását. Mozgásnak nevezzük például a test hőmérsékletének, a kondenzátor töltésének, egy bankszámla végösszegének, a raktáron lévő nyersanyagok a változását, sőt a mozgás meghatározott, bár igen bonyolult formáinak kell tekintenünk az olyan folyamatokat is, mint például az élet és a gondolkodás.

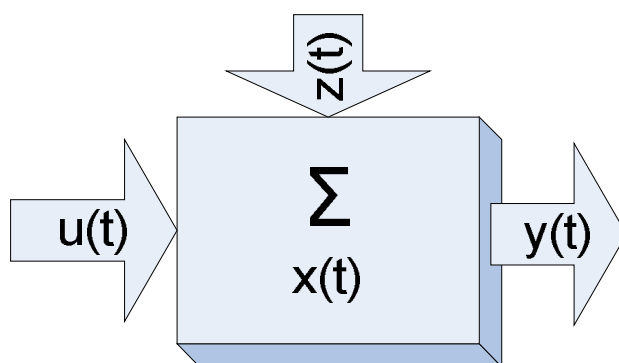
A rendszer mozgása – állapotváltozása – történhet külső hatásokra vagy a rendszeren belül lejátszódó folyamatok hatására is. A rendszerrel való minden kölcsönhatás, érintkezés a rendszer bizonyos tulajdonságainak, állapotának megváltozását vonja maga után. A tulajdonságok változásait az állapotjellemzők változásai révén figyeljük meg.

Szigorúan véve, minden rendszert végtelen számú külső hatás ér, de korántsem lényeges mindegyikük. Így nyilvánvaló, hogy a Hold vonzása nem lényeges egy autónak a Földhöz viszonyított mozgására, bár elvben ez a hatás létezik. A külső hatások halmazából csak azokat választjuk ki, amelyek a feladat adott körülményei között lényegesek a rendszer állapotára. Ezt nevezzük lényegkiemelésnek. Ezen külső hatásokat bemenő jellemzőknek (vagy bemenő hatásoknak), a rendszer bemenő változásának, míg a rendszernek azon elemeit, amelyekre a bemenő hatások hatnak, a rendszer bemenetének nevezik.

A bemenő hatások két csoportját különböztetjük meg: az irányító és a zavaró hatásokat. Az irányító hatások értékeit a rendszer működése közben módosítani tudjuk (pl. egy tartályba vezető szelep állítása, a motor táplálásának átkapcsolása, ...). Ez a módosítás annak érdekében történik, hogy a rendszerben elindítsunk bizonyos folyamatokat, megvalósíthassuk annak legelőnyösebb lefolyását és leállítsuk az elindított folyamatot. A

zavaró bemenő hatások az irányító által nem módosíthatók. A zavaró hatások nemcsak külső eredetűek lehetnek, hanem létrejöhetnek a rendszeren belül is, például az elemek tulajdonságainak hosszabb működés után bekövetkező változása miatt (öregedés, szigetelési tulajdonságok vesztese stb.).

A rendszernek a környezetére gyakorolt hatását a kimenő mennyiségek (vagy kimenő hatások), leegyszerűsítve kimenetek határozzák meg. A kimeneti hatás változását a módosító vagy zavaró hatások hozzák létre. Az 1.8. ábrán láthatók vázlatosan egy rendszer és a hozzá tartozó módosító bemenő $u(t)$, zavaró $z(t)$, állapot $x(t)$ valamint kimenő $y(t)$ jellemzők vektorai.



1.8. ábra. A rendszer és jellemzői

Az állapotok, kimenetek, irányító és zavaró hatások közötti összefüggések a valós rendszereknél gyakran igen bonyolultak. Ha ezen összefüggéseket megfosztjuk a fizikai mivoltuktól, absztrakt rendszereket kapunk. Az így kapott összefüggések nem mindig egyértelműek, ezért a rendszer matematikai leírása egy reláció és nem egy függvény vagy operátor.

Mivel a legkülönbözőbb rendszerek mozgási törvényszerűségeiben sok közös vonás van – különösen a bennük lezajló változások irányítása szempontjából – nem mindig célszerű konkrét rendszerek mozgásának törvényszerűségeit tanulmányozni, hanem áttérhetünk elvont és általánosított, vagyis absztrakt irányítási rendszerek tanulmányozására is. Az így szerzett eredményeket ezután sikeresen alkalmazhatjuk a valós irányítási feladatok megoldásában.

Azok a rendszerek, amelyeknek a bemenetei között irányított bemenetek is találhatóak, irányított rendszerek. Az irányított rendszer egyik jellegzetes tulajdonsága az, hogy különböző irányító hatások következtében, képes mozgását megváltoztatni. Ha irányított rendszerről van szó, mindig megtalálható a cselekvések olyan összessége, amelyek közül az adott esetben kiválasztható a legelőnyösebb (optimális). Ahol erre a választásra nincs mód, ott nincs és nem is lehet szó irányításról.

Egy rendszer mozgását tekinthetjük úgy is, mint állapotai átalakulásának kapcsolatát. Bármely rendszer állapotának változása azonban nem valósítható meg az alkotóelemeiben

végbemenő anyag, energia vagy információ átalakulási vagy átviteli folyamatai nélkül. Így egy test hőmérsékletének változása kapcsolatban van belső energiájának változásával, egy tartályban a folyadékszint megváltozásához szükség van a benne levő folyadék mennyiségének megváltoztatására.

Ha a rendszer állapotának változása egy pillanat alatt lefolyhatna, ez azt jelentené, hogy a benne levő anyag és energia mennyisége végtelenül kis idő alatt, véges mennyiséggel változna. Ehhez arra lenne szükség, hogy az anyag- vagy energiaáramlás intenzitása a rendszer egyes elemein keresztül végtelenül nagy értéket vegyen fel, ami lehetetlen. Egy valós rendszer állapota tehát nem változhat pillanatszerűen, hanem véges idő alatt, az úgynevezett átmeneti folyamat eredményeképpen.

Azok a rendszerek, melyeknek állapotváltozásai nem egy pillanat alatt zajlanak le, hanem egy átmeneti folyamat eredményei, dinamikus rendszerek. Az eddigiekből kitűnik, hogy szigorú értelemben véve minden valós rendszer, dinamikus rendszer. Azokban az esetekben, amikor az átmeneti folyamat tartalma lényegtelenül kicsi a vizsgált jelenség időtartamához képest, és az átmeneti jelenség lefolyásának jellege nem gyakorol lényeges befolyást a rendszer viselkedésére, elhanyagolhatjuk a vizsgált rendszer dinamikus tulajdonságát, és úgy tekinthetjük, hogy állapotváltozásai egy pillanat alatt követik az őket kiváltó okokat.

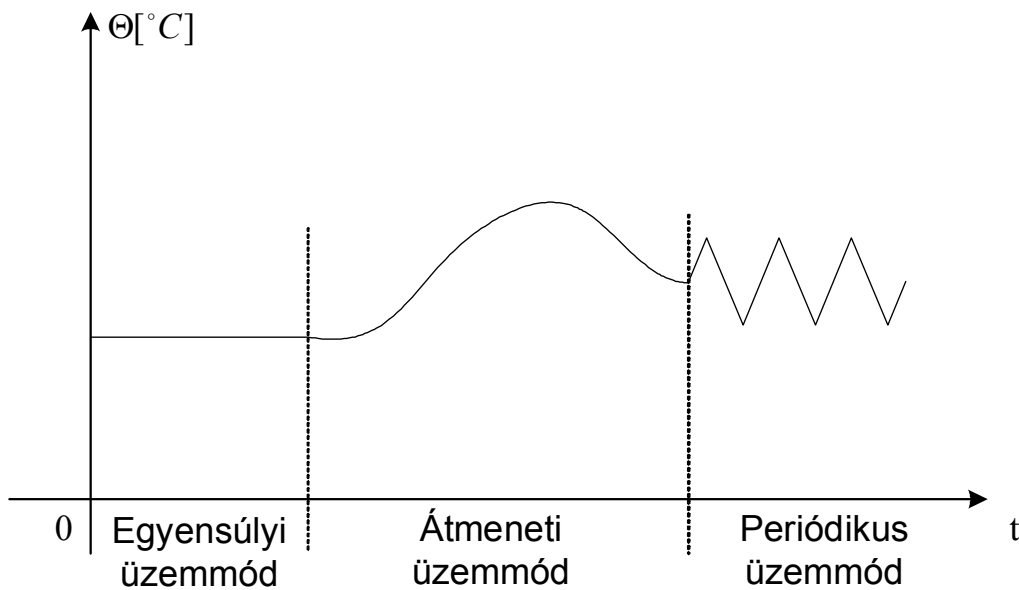
Egy dinamikus rendszer működésének három alapvető módja van: egyensúlyi vagy állandósult, átmeneti és periodikus.

Azt mondjuk, hogy a rendszer egyensúlyi vagy állandósult üzemmódban van, ha állapota nem változik az időben.

Átmeneti üzemmódnak nevezzük a dinamikus rendszer mozgásának azt az üzemmódját, amikor egy bizonyos kiinduló helyzetből, egy állandósult egyensúlyi vagy periodikus üzemmódba törekszik. Átmeneti üzemmód jelenhet meg a rendszerben a külső hatások változásának vagy a rendszer belső tulajdonságainak megváltozása következtében.

Periodikus üzemmód esetén, a rendszer egyenlő időközönként, ugyanabba az állapotba kerül.

Az 1.9. ábrán egy hőmérsékletváltozás egyensúlyi, átmeneti és periodikus üzemmódját tüntettük fel.



1.9. ábra. A dinamikus rendszer üzemmódjai

A rendszer üzemmódjainak meghatározásával és megalkotásával kapcsolatosan igen sok kérdés merül fel, amelyekre felelet csak a rendszer alapos vizsgálata után, a kapott adatok részletes minőségi és mennyiségi elemzésével adhatunk.

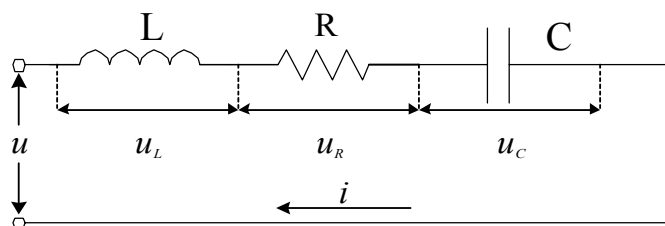
Összefoglalásul elmondható, hogy az irányítási rendszerek matematikai modelljeinek állapottéri megfogalmazása igen előnyösen felhasználható a korszerű irányítástechnika legfontosabb feladatainak megoldásában (például az optimális rendszerek elmélete, stabilitásvizsgálatok, adaptív irányító rendszerek elmélete stb.).

Az állapotvektoros számítási mód nagy előnye, hogy általánosan felhasználható, és a rendszeregyenleteket a digitális számítógépen való számításokhoz a legalkalmasabb alakban adja meg.

1.5. Példák állapotegyenletekre

1. Példa

Határozzuk meg az 1.10. ábrán látható rendszer állapotegyenletét:



1.10. ábra. Illusztráció a példához

Az ábrán látható jelölések mellett jelölje q a kondenzátor töltését. A rendszernek legyen egy bemenete: $u = u(t)$ és öt kimenete, melyek rendre: $y_1(t) = q(t)$, $y_2(t) = i(t)$, $y_3(t) = u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$, $y_4(t) = Ri(t)$ és $y_5(t) = u_L(t)$. A rendszer két energiatárolóval rendelkezik, legyenek az állapotváltozók a következők: $x_1(t) = q(t)$; $x_2(t) = \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$.

Megoldás:

A soros rezgőkör viselkedését a következő differenciálegyenlet írja le:

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u(t)$$

Az állapotváltozók bevezetése után a következő két elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{u(t)}{L}, \end{aligned}$$

ugyanaz vektor differenciálegyenlet alakban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t),$$

A kimenő jelet megadó kiegészítő vektoregyenlethez a következő módon jutunk el:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= q(t) = x_1(t), \\ y_2(t) &= i(t) = x_2(t), \\ y_3(t) &= u_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} x_1(t), \\ y_4(t) &= Ri(t) = R x_2(t), \\ y_5(t) &= u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \dot{x}_2, \quad y_5(t) = -\frac{1}{C} x_1(t) - R x_2(t) + u(t), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & R \\ -\frac{1}{C} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban jelöljük a következő időfüggő vektorokat a következőképpen:

$$u = u(t), \quad y = y(t), \quad x = x(t),$$

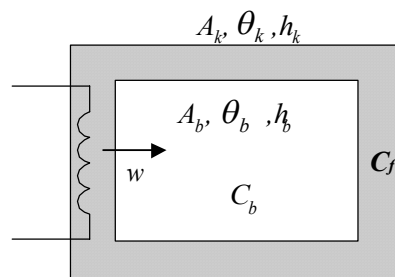
$$u = [u(t)], \quad y = [y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)]^T, \quad x = [x_1(t), x_2(t)]^T. \quad \text{A mátrixos alak:}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

$$\text{ahol: } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & R \\ -\frac{1}{C} & -R \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Példa

Egy villanyárammal fűtött kemence (1.11. ábra) matematikai modelljét kívánjuk meghatározni. A termikus rendszer lényegében két hőkapacitásból áll. Legyen a külső környezeti hőmérséklet θ_k , a falazat hőmérséklete θ_f , a kemence belső hőmérséklete θ_b . Jelölje ω a villamos fűtés által előidézett hőteljesítményt. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a hőmérsékletek egyenletesen és pillanatszerűen oszlanak meg az egyes közegekben. Legyen A_b és A_k a fal belső és külső felülete. Jelölje c_b és c_f a kemence belsejének és falának hőkapacitását. Legyen a falazat hőleadási állandója befelé, illetve kifelé h_b , illetve h_k .



1.11. ábra. Illusztráció a példához

Megoldás:

A falazat hőegyensúlyának differenciálegyenlete közvetlen fizikai megfontolások alapján:

$$C_f \frac{d\Theta_f(t)}{dt} = A_k h_k (\Theta_k(t) - \Theta_f(t)) - A_b h_b (\Theta_b(t) - \Theta_f(t)) + \omega(t),$$

hiszen a falban felhalmozott hőmennyiség időbeni változása egyenlő a fűtőtest által szolgáltatott hőteljesítménnyel, az utóbbiból levonva a falazat által a külső, ill. a belső környezetnek leadott hőteljesítményt. Hasonlóképpen írható fel a kemence belsejének differenciálegyenlete:

$$C_b \frac{d\Theta_b(t)}{dt} = A_b h_b (\Theta_f(t) - \Theta_b(t)).$$

Vezessünk be állapotváltozókat. Legyenek a hőmérséklet különbségek az állapotváltozók:

$$x_1(t) = \Theta_f(t) - \Theta_k(t),$$

$$x_2(t) = \Theta_b(t) - \Theta_k(t).$$

Legyen az irányító jellemző $u(t) = \omega(t)$. Végül legyen a kimeneti jellemző a kemence hőmérsékletének és a külső környezet hőmérsékletének különbsége: $y(t) = \Theta_b(t) - \Theta_k(t)$. Feltételezzük, hogy a külső hőmérséklet állandó. Így:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{d\Theta_f(t)}{dt},$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d\Theta_b(t)}{dt}.$$

Bevezetve az állapotozókra vonatkozó jelöléseket, rendezés után a következő differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$-x_2(t) + x_1(t) = \Theta_f(t) - \Theta_k(t) - (\Theta_b(t) - \Theta_k(t)) = \Theta_f(t) - \Theta_b(t),$$

$$C_f \dot{x}_1(t) = -A_k h_k x_1(t) + A_b h_b (x_2(t) - x_1(t)) + u(t),$$

$$C_b \dot{x}_2(t) = A_b h_b (x_1(t) - x_2(t)),$$

$$y(t) = x_2(t).$$

Kis átalakítás után az állapotegyenletek vektoregyenlet alakjában is megadhatók:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_f} A_k h_k - \frac{1}{C_f} A_b h_b & \frac{1}{C_f} A_b h_b \\ \frac{1}{C_b} A_b h_b & -\frac{1}{C_b} A_b h_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_f} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

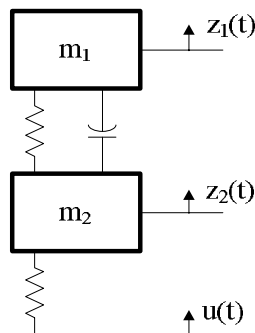
$$y = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

$$\text{ahol: } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_f} A_k h_k - \frac{1}{C_f} A_b h_b & \frac{1}{C_f} A_b h_b \\ \frac{1}{C_b} A_b h_b & -\frac{1}{C_b} A_b h_b \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{1 \times 2} = [0 \quad 1] \text{ és } D_{1 \times 1} = [0].$$

3. Példa

Az 1.12. ábrán egy személyautó leegyszerűsített dinamikai modellje látható. A modellbe m_1 a váz és tartozékainak tömege, c_1 és f a váz és a kerekek között elhelyezett rugó torziós állandója és súrlódási együtthatója, m_2 a kerekek tömege, c_2 pedig a kerekek torziós állandója. Az út egyenetlensége $u(t)$ egy $z_1(t)$ és $z_2(t)$ elmozdulást okoz az egyensúlyi állapothoz viszonyítva a személyautó haladása közben. Írjuk fel a rendszer állapotegyenleteit, ha $z_1(t)$ a kimenet. Az állapotváltozók szabadon választhatók.



1.12. ábra. Illusztráció a példához

Megoldás:

Az egyszerűsített rendszer differenciálegyenletei:

$$c_2 [u(t) - z_2(t)] = m_2 \ddot{z}_2(t) + c_1 [z_2(t) - z_1(t)] + f \left[\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t) \right],$$

$$c_1[z_2(t) - z_1(t)] + f[\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t)] = m_1 \ddot{z}_1(t).$$

Bevezetve az állapotváltozókat:

$$x_1(t) = z_1(t),$$

$$x_2(t) = \dot{z}_1(t),$$

$$x_3(t) = z_2(t),$$

$$x_4(t) = \dot{z}_2(t),$$

és a kimenő jelet: $y(t) = z_1(t) = x_1(t)$,

a rendezés után a következő differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{c_1}{m_1} x_1(t) - \frac{f}{m_1} x_2(t) + \frac{c_1}{m_1} x_3(t) + \frac{f}{m_1} x_4(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t),$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{c_1}{m_2} x_1(t) + \frac{f}{m_2} x_2(t) - \frac{c_1 + c_2}{m_2} x_3(t) - \frac{f}{m_2} x_4(t) + \frac{c_2}{m_2} u(t),$$

$$y = x_1(t).$$

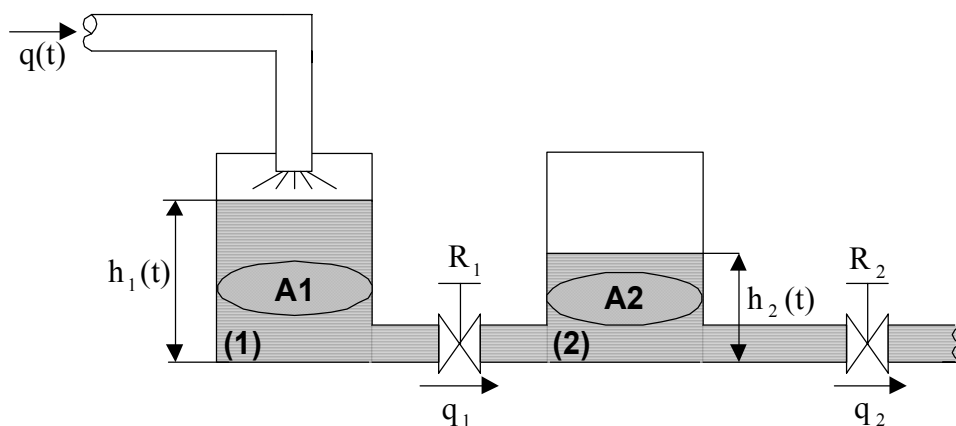
Az állapotegyenletek vektoregyenlet alakjában a következők:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & \frac{f}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_1}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{c_1 + c_2}{m_2} & -\frac{f}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

4. Példa

A 1.13 ábrán vázolt hidraulikus rendszer két A1 és A2 keresztmetszetű tartályból áll. A tartályokban a folyadék szintmagassága $h_1(t)$ és $h_2(t)$. A csővezetékek hidraulikus ellenállását elhanyagoljuk, a két tolózár hidraulikus ellenállása lineáris közelítéssel legyen R_1 és R_2 . Legyen a bemeneti jellemző a $q(t)$ hozzáfolyás, a kimeneti jellemző a $q_1(t)$ áramlás.



1.13. ábra. Egy két tárolós hidraulikus rendszer vázolata

A tartályokban tárolt tömeg változásait a következő egyenletek határozzák meg:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q(t) - q_1(t) ,$$

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) .$$

A hozzáfolyást és a kimeneti áramlást a következő egyenletek határozzák meg:

$$q_1(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} ,$$

$$q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} .$$

Behelyettesítéssel a következő állapotegyenleteket kapjuk :

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} (h_1(t) - h_2(t)) + q(t)$$

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_1} (h_1(t) - h_2(t)) - \frac{1}{R_2} h_2(t)$$

Ha bevezetjük a alábbi állapot-, bemenő- és kimenő-vektort:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = [q(t)], \quad y(t) = [q_1(t)], \quad \begin{matrix} n = 2 \\ r = 1 \\ m = 1 \end{matrix}$$

akkor az egyenletek az általánosított jelölési formával a következő alakúak:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 A_1} (x_1 - x_2) + \frac{1}{A_1} u,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_1 A_2} (x_1 - x_2) - \frac{1}{R_2 A_2} x_2,$$

$$y = \frac{1}{R_1} (x_1 - x_2).$$

A rendszer állapotegyenlete ezekkel az elemekkel a már adott általános állapotegyenleti alakot veszi fel:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

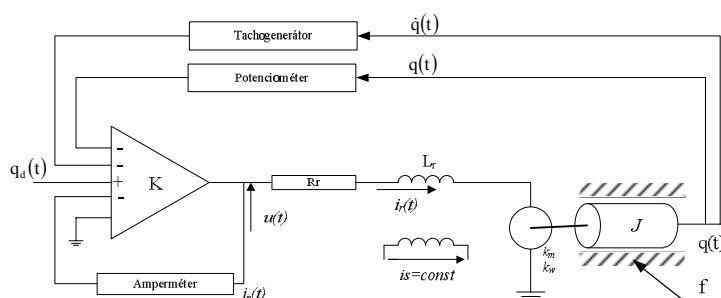
$$y = Cx + Du,$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_1 A_2} - \frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B \in \mathfrak{R}^{2 \times 1},$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix}, \quad C \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}, \quad D = [0], \quad D \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}.$$

5. Példa

Az 1.14. ábrán egy forgórész-feszültség változtatásával irányított egyenáramú motor pozíciószabályozási rendszerének vázlatja látható.



1.14. ábra. Illusztráció a példához

Az egyenáramú motor nyomatéka arányos a forgórész $i_r(t)$ áramával, legyen k_m a motor nyomaték-áram állandója. R_r a forgórész ellenállása, L_r pedig az induktivitása, k_ω a motor feszültség-szögsebesség állandója. A mechanikai elemeket J tehetetlenségi nyomaték és f csillapítási állandó jellemzi, K a szabályozó erősítő erősítése. Az ideálisnak tekinthető állító feszültség osztó, a tachogenerátor és az amperméter átviteli tényezői rendre k_1 , k_2 és k_3 .

Állapotváltozóként válasszuk a motor tengelyének szögelfordulását ($q(t)$), a szögelfordulás sebességét ($\dot{q}(t)$) és a forgórész áramát ($i_r(t)$). A kimeneti jellemző a forgórész szögelfordulása ($q(t)$), a bemeneti jellemző pedig az alapjelül megadott, előírt szögelfordulás ($q_d(t)$). Írjuk fel a rendszer állapotegyenletét.

Megoldás:

A motor működését a következő egyenlettel írhatjuk le.

$$\text{A szabályozó kimenete: } u(t) = K[q_d(t) - k_1 q(t) - k_2 \dot{q}(t) - k_3 i_r(t)],$$

$$\text{az elektromos egyenlet: } u(t) = R_r i_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt} + k_\omega \dot{q}(t),$$

$$\text{a forgórészre ható elektromos nyomaték: } M(t) = k_m i_r(t),$$

$$\text{a forgórész mechanikus egyenlete: } M(t) = J\ddot{q}(t) + f\dot{q}(t).$$

Rendezés után:

$$\ddot{q}(t) = -\frac{f}{J}\dot{q}(t) + \frac{k_m}{J}i_r(t),$$

$$\frac{di_r}{dt} = -\frac{k_\omega}{L_r}\dot{q}(t) - \frac{R_r}{L_r}i_r(t) + \frac{1}{L_r}K[q_d(t) - k_1 q(t) - k_2 \dot{q}(t) - k_3 i_r(t)].$$

Jelöljük meg az állapotváltozókat, a bemenetet és kimenetet:

$$x_1(t) = q(t), \quad x_2(t) = \dot{q}(t), \quad x_3(t) = i_r(t), \quad u(t) = q_d(t), \quad y(t) = q(t).$$

Az egyenletekbe helyettesítve kapjuk:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{f}{J}x_2(t) + \frac{k_m}{J}x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{k_1K}{L_r}x_1(t) - \left(\frac{k_\omega}{L_r} + \frac{k_2K}{L_r}\right)x_2(t) - \left(\frac{R_r}{L_r} + \frac{k_3K}{L_r}\right)x_3(t),$$

$$y(t) = x_1(t).$$

Rendezés után felírható az állapotegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{k_m}{J} \\ -\frac{k_1K}{L_r} & -\frac{k_\omega}{L_r} - \frac{k_2K}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} - \frac{k_3K}{L_r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{L_r} \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] \cdot u.$$

6. Példa

Egy irányítás rendszer átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Határozzuk meg az egybemenetű és egykimenetű lineáris, időinvariáns rendszer állapotegyenletét.

Megoldás:

Az átviteli függvény alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)Y(s) = 2U(s),$$

$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = 2U(s).$$

Inverz Laplace-transzformáció után:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 11y(t) = 2u(t).$$

Amennyiben az állapotváltozókat a következők szerint válasszuk: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$,
 $x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2$,

akkor az utóbbi egyenletbe történő helyettesítés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{x}_3 + 6x_3 + 11x_2 + 6x_1 = 2u.$$

Az állapotegyenletes felíráshoz fejezzük ki az állapotok első deriváltjait:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u,$$

$$y = x_1.$$

Rendezés után az állapotegyenlet vektoriális alakja:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot x.$$

A feladat megoldása a Matlab programcsomag alkalmazásával:


```

» n=[2];
» d=[1 6 11 6];
» [a,b,c,d]=tf2ss(n,d)
a =
    -6   -11    -6
     1     0     0
     0     1     0
b =
     1
     0
     0
c =
     0     0     2
d =
     0

```

Az állapotváltozók sorszámának felcserélése ne zavarjon meg senkit. A Matlabbal kiszámított megoldás teljes mértékben megegyezik az előző számítás alapján kapottakkal.

7. Példa

Egy irányítási rendszer állapotegyenlete a következő:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2u.$$

Határozzuk meg a rendszer alaplátrixát Laplace-transzformációval.

Megoldás:

Az alaplátrix a következő kifejezés alkalmazásával határozható meg:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\dot{x} = Ax + Bu) \xrightarrow{\text{Laplace}} sIX(s) = AX(s) + BU(s), \quad sIX(s) - AX(s) = BU(s),$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s),$$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1}.$$

A rendszer és az egységmátrix behelyettesítése után:

$$\Phi(s) = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1},$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)}.$$

Rendezés után az alaplátrix Laplace-transzformáltja:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+2)} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{s}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Az alaplátrix meghatározható inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával:

$$\Phi(s) \xrightarrow{(Laplace)^{-1}} \phi(t)$$

$$\phi(t) = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) & \frac{1}{2}h(t) - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

8. Példa

Egy többváltozós rendszer viselkedését a következő egyenletrendszer írja le:

$$\ddot{z}_1(t) + 4\dot{z}_1(t) - 3z_2(t) = u_1(t),$$

$$\dot{z}_2(t) + \dot{z}_1(t) + z_1(t) + 2z_2(t) = u_2(t).$$

Válasszuk az állapotváltozókat a következők szerint: $z_1(t), \dot{z}_1(t), z_2(t)$, a kimenetek adottak a következők szerint: $z_1(t), z_2(t)$. Feladat meghatározni:

- a rendszer állapotegyenletét.
- a rendszer átviteli függvény mátrixát.

Megoldás:

a)

$x_1(t) = z_1(t)$
Tehát az állapotvektor: $x_2(t) = \dot{z}_1(t)$, a bemenetek vektora: $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$, valamint a
 $x_3(t) = z_2(t)$
kimenetek vektora: $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$.

Az állapotegyenletek:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 + 3x_3 + u_1,$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 2x_3 + u_2.$$

Az állapotegyenletek mátrixos felírásban:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

A rendszer átviteli függvény mátrixa a következőképpen határozható meg:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\dot{x} = Ax + Bu) \xrightarrow{\text{Laplace}} sIX(s) = AX(s) + BU(s), \quad sIX(s) - AX(s) = BU(s),$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s), \quad y = Cx + Du, \quad (y = Cx + Du) \xrightarrow{\text{Laplace}} Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) + DU(s),$$

végül az átviteli függvény mátrix:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
[sI - A]^{-1} &= \frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \cdot \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s + 2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ s(s+2) & 3s \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \\ -\frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{s(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A rendszer átviteli függvény mátrixa a következő:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \\ -\frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} & \frac{s(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \end{bmatrix}.$$

9. Példa

Egy irányítási rendszer állapotteres leírása:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \\
y &= [0 \ 1] x.
\end{aligned}$$

Határozzuk meg az állapotváltozók időfüggvényét zérus kezdeti feltételekre és egységugrás bemenetre.

Megoldás:

A bemenet Laplace-transzformáltja: $U(s) = L\{h(t)\} = \frac{1}{s}$.

A kezdeti feltételek: $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az állapotvektor Laplace-transzformáltja:

$$X(s) = \Phi(s) \cdot B \cdot U(s) + \Phi(s) \cdot x(0),$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+2)} \\ \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^2(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix},$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \end{bmatrix},$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\}.$$

Az állapotvektor időfüggvénye tehát:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} h(t) + t + \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} \\ h(t) - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

A kimenetre érvényes, hogy:

$$Y(s) = C \cdot X(s) + D \cdot U(s).$$

Mivelhogy $D=0$, így a kimenet Laplace-transzformáltja:

$$Y(s) = C \cdot X(s),$$

$$Y(s) = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{s^2(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}.$$

A kimenet időfüggvényét inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával határozzuk meg:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\},$$

$$y(t) = 1 - e^{-2t} = h(t) - e^{-2t}.$$

A megoldás a Matlab program csomag alkalmazásával a következő:

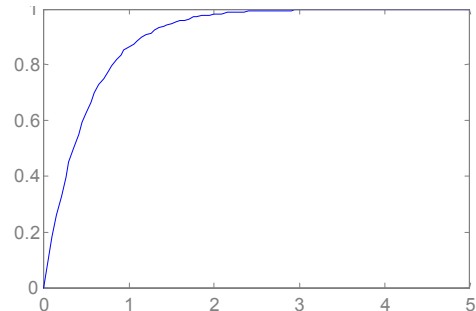
» $a=[0 \ 1; \ 0 \ -2];$

» $b=[0 \ 2]';$

» $c=[0 \ 1];$

» $d=[0];$

» $step(a,b,c,d)$



10. Példa

Adott egy irányítási rendszer matematikai modellje:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1]x + u.$$

Határozzuk meg az a, b, c paramétert úgy, hogy a rendszer teljes mértékben irányítható, majd teljes mértékben megfigyelhető legyen.

Megoldás:

Az irányíthatóság mátrixa:

$$Q_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} c & ac \\ 0 & bc \end{bmatrix}.$$

Ha az alábbi feltételek teljesülnek, a rendszer teljes mértékben irányítható:

$$\det Q_C = bc^2 \neq 0,$$

$$b \neq 0 \wedge c \neq 0; \forall a \in R \quad \Rightarrow \quad \text{rang} Q_C = 2.$$

A megfigyelhetőség mátrixa:

$$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a+b & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det Q_O = 1 \neq 0,$$

$$\text{rang} Q_O = 2.$$

Amennyiben az alábbi feltételek beteljesülnek, a rendszer teljes mértékben megfigyelhető:

$$\det Q_O = 1 - a - b \neq 0,$$

$$a + b \neq 1; \forall c \in R \Rightarrow \text{rang} Q_O = 2.$$

11. Példa

Adott egy irányítási rendszer matematikai modellje:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x.$$

Vizsgáljuk ki az adott rendszer irányíthatóságát és megfigyelhetőségét.

Megoldás:

Irányíthatóság:
$$Q_C = [B \quad AB \quad AB^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\det Q_C = -4 \neq 0.$$

A rendszer teljes mértékben irányítható.

$$\text{Megfigyelhetőség: } Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det Q_o = 1 \neq 0.$$

A rendszer teljes mértékben megfigyelhető.

1.6. Sima, nemlineáris rendszer linearizálása

A sima rendszer esetében az állapotátmenet függvény legalább egyszer differenciálható és így felírható a következő vektoregyenletekkel:

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$y = g(x, u, t).$$

általános esetben legyen a rendszer MIMO, és akkor a jelölésmódok:

$$x - \text{állapotvektor} \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$u - \text{bemeneti vektor} \quad u = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T,$$

$$y - \text{kimeneti vektor} \quad y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$$

és t a független változó.

A kis Δu vektorral meghatározott változásokra, az u_0 és x_0 vektorokkal megadott munkapont bizonyos környezetében, az állapotvektor változásai sorfejtéssel meghatározhatók. A Taylor – sorfejtést végezzük el az első taggal bezárva:

$$\dot{x} + \Delta \dot{x} \approx f(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta u,$$

ahol

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix},$$

$$y + \Delta y \approx g(x_0, u_0, t) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta u .$$

Miután elvégeztük a következő helyettesítést:

$$z = \Delta x , \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} , \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} , \quad v = \Delta u ,$$

$$w = \Delta y , \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} , \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} ,$$

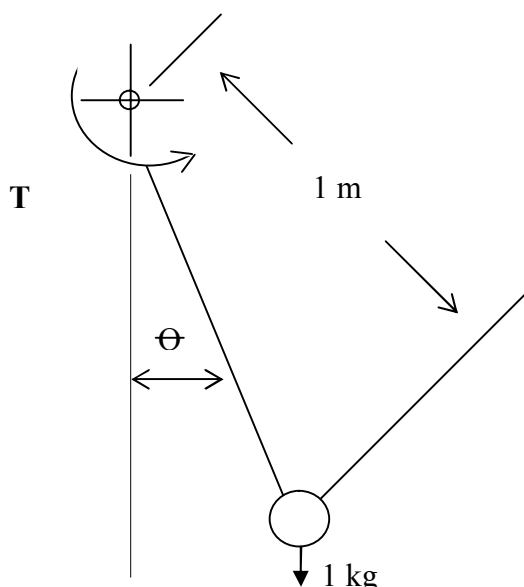
az új változókkal meghatározott állapotteres modellt kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A \cdot z + B \cdot v , \\ w &= C \cdot z + D \cdot v . \end{aligned}$$

1. Példa

A 1.15. ábrán vázolt inga tömege 1 kg, a zsinag hossza 1 m. A súrlódás elhanyagolásával és a T kimozdító nyomaték figyelembevételével az inga mozgása a következő

$$\text{egyenlettel írható le: } \frac{d^2\theta}{dt^2} = -9.81 \sin(\theta) + T .$$



1.15. ábra. A matematikai inga leegyszerűsített vázlata

Végezzük el a modell linearizálását.

A megoldás menete:

Ha az inga állapotváltozói $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, a bemenet $u = T$ és a kimenet $y = \theta$, akkor az inga állapotegyenlete:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -9.81 \sin(x_1) + u \end{bmatrix}; \quad y = g(x, u, t) = x_1,$$

egyensúlyi helyzet és $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_d \\ 0 \end{bmatrix}$ munkapont határozza meg.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-9.81 \sin(x_1) + u)}{\partial x_1} & \frac{\partial(-9.81 \sin(x_1) + u)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 \cos(x_{10}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial(-9.81 \sin x_1 + u)}{\partial u} \end{array} \right]_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

A nemlineáris rendszer linearizált állapotegyenletei:

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 \cos x_{10} & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u,$$

$$\Delta y = [1 \quad 0] \Delta x.$$

2. Rendszerelemek matematikai leírása és vizsgálata

Az 1. fejezetben tárgyaltaknak megfelelően az irányítástechnikai rendszerek vizsgálata során a leírásukhoz differenciálegyenlet alapú modelleket alkalmazunk. Ezek a modellek a rendelkezésre álló és figyelembe vett ismeretek alapján két fő csoportra oszthatók.

Az állapotter modellek esetében a felírt modell a rendszer belső tulajdonságait leíró ún. állapotváltozók változásait vizsgálja a pillanatnyi állapot és a bemenet függvényében, majd ennek alapján határozza meg a kimenet értékének alakulását. Az állapotter modellek felírása alapos ismereteket követel meg a rendszer belső felépítéséről, összefüggéseiről, valamint a rendszer és a környezet közötti kapcsolatokról. Modellezési szempontból ezeket az ún. fehér doboz modellek közé sorolhatjuk. Ilyen modellekre és alapvető tulajdonságaikra láthatunk példákat a 1. fejezetben.

A modellek másik csoportjánál nincs információnk a rendszer belső szerkezetéről, vagy nem kívánjuk azokat figyelembe venni, így csak a bemenetek és a kimenetek közti összefüggések alapján írjuk fel a modellt. Ezek az ún. fekete doboz modellek elsősorban kísérleti megfigyeléseken, teszteléseken alapulnak, ezért alkalmazhatóságuk sokszor korlátozottabb, mint az állapotter modelleké. Miután a továbbiakban az irányítástechnikai rendszerek tárgyalását ezeken az ún. bemenet-kimenet (vagy I/O) modelleken alapulva végezzük el, ezért ezek tulajdonságait, operátor tartománybeli használatukat, és a paramétereik megállapításához kapcsolódó vizsgálati módszereket tekintjük át részletesebben ebben a fejezetben.

2.1. A bemenet-kimenet modell

A bemenet-kimenet modellt a következő egyszerűsített alakban írjuk fel:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t), \quad (2.1)$$

ahol $y(t)$ – a kimenő jel,

$u(t)$ – a bemenő jel,

$$x^{(i)}(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad x = \{y, u\}, \quad i = 1 \dots n,$$

a_i, b_j – konstans együtthatók.

Mint látható, egy nemlineáris, időtől vagy más paraméterek értékétől függő együtthatókat tartalmazó modellhez képest a következőkben használt (2.1) bemenet-kimenet modell jóval egyszerűbb alakú. Legfontosabb tulajdonságai a következők:

- *Lineáris* modell, mivel a (2.1) egyenlet bal oldalán a kimenet és deriváltjainak lineáris kombinációja, a jobb oldalán pedig a bemenet és deriváltjainak lineáris kombinációja szerepel.
- *Időinvariáns* vagy állandó együtthatós modell, vagyis a_i, b_j együtthatók konstans értékűek.
- *Folytonos idejű* modell, a kimenet és a bemenet az idő folytonos függvényei a $t > 0$ időintervallumon (továbbiakban az idő argumentumként való jelölésétől eltekintünk és a kimenetre az y , a bemenetre az u változóval hivatkozunk).
- *n -ed rendű differenciálegyenlet* a modell. A kimenet és a bemenet deriválási fokszámaira teljesül a fizikai rendszerek működésére érvényes oksági szabály, azaz $n \geq m$. Ennek megfelelően a kimenet alakulása függ a bemenettől és nem fordítva.
- *SISO* modell, azaz a leírt rendszernek egy bemenete és egy kimenete között írjuk fel az összefüggést.

A felírt modellhez természetesen tartozik n darab kezdeti feltétel is, rendre $y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$. A kezdeti feltételeket általában nullának tekintjük az egyszerűsített vizsgálatok során, kifejezve ezzel azt, hogy a rendszernek egy adott induló állapothoz viszonyított viselkedését vizsgáljuk. Néhány esetben, - így például bizonyos stabilitás vizsgálatoknál - lényeges szerepe van a nem nulla kezdeti feltételeknek, ott ezt külön jelezzük.

A felsorolt tulajdonságokból látható, hogy ez a modell típus a valós fizikai rendszereknek csak szűk körére alkalmazható, vagy csak a működési tartományuknak egy jól meghatározott, szűk tartományára igaz. Ez a modell viszont alkalmas, hogy ebben a bevezető kurzusban a rendszerek alapvető tulajdonságait megismerjük, illetve egyszerűbb összetett rendszerek vizsgálatát elvégezzük.

2.2. Vizsgáló jelek

A rendszerek tulajdonságainak, jellemző paramétereinek megfigyelésen alapuló vizsgálatát alapvetően két fő csoportba sorolhatjuk. Az első csoportban az ún. *aktív kísérletek* tartoznak, ahol különböző, előre meghatározott jellegű és nagyságú tesztleleteket alkalmazunk és ezeknek a kimeneten megjelenő hatásaiból következtetünk a vizsgált jellemzőre. A kísérletek ilyen módon történő elvégzése nyilvánvalóan megkönnyíti a vizsgálatot végző feladatát, hiszen az adott időpontban és bemeneten alkalmazott bemenő jel kimenetre gyakorolt hatásának vizsgálata a lineáris, időinvariáns modellek esetében általában egyszerű. Ilyen vizsgálatokat általában tesztrendszereken vagy egyszerűbb technológiai rendszereken lehet és szabad elvégezni. A valós fizikai rendszerek többségénél ezek a vizsgálatok komoly technológiai problémákat és veszélyhelyzeteket okozhatnak, ezért az ilyen rendszereken ún. *passzív kísérleteket* végeznek. A passzív kísérletek azt jelentik, hogy a rendszer normális üzemmenetű működése során felmerülő zajok, zavarások kimenetre gyakorolt hatását használjuk fel a rendszer megismerésére. Természetesen ez mind mérés-technikai, mind modellezési szempontból összetettebb feladatot jelent, hiszen a

zajok, zavarások mind a jel formája és nagysága, mind az időbeli lefolyása szempontjából véletlenszerű. A továbbiakban az aktív kísérleteknél használt jeleket, és azok legfontosabb tulajdonságait ismertetjük.

2.2.1. Egységimpulzus függvény

Az egységimpulzus függvény, vagy Dirac-delta függvény definíciója a következő:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

A Dirac delta függvényt elsősorban a rendszert ért impulzus jellegű zavarások modellezésére alkalmazzuk. Bár, mint a definícióból látszik, a jel fizikailag nem valósítható meg, azonban könnyen adhatunk meg olyan jelenségeket, amelyek jó közelítéssel így játszódnak le. Ilyen például két biliárdgolyó ütközése, teniszütő és labda találkozása, vagy egy kondenzátor adott állandó áramerősséggel való feltöltése. Ezeknél a folyamatoknál az energiaátadás igen rövid idő alatt játszódik le, ezért alkalmasak az impulzusfüggvény megjelenítésére.

Az egységimpulzus függvénynek számos fontos tulajdonsága van.

- Integráljának értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

- Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt = 1.$$

- Bármely $t = 0$ -ban folytonos $f(t)$ függvény esetén:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt \triangleq f(0),$$

vagyis az egységimpulzus függvény segítségével meghatározhatjuk egy folytonos jelnek adott időponthoz tartozó értékét.

- Az egységimpulzus függvény deriváltját a következő módon értelmezhetjük:

$$\delta^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

A Dirac függvény deriváltját tehát úgy képzelhetjük el, mint két egymástól ε távolságban lévő, $1/\varepsilon$ amplitúdójú, ellentétes irányú impulzus. Elfogadva ennek az általánosított deriválnak a létezését, és feltételezve, hogy az $f(t)$ függvénynek

létezik az első, ..., n -dik deriváltja a $t = 0$ időpontban, ekkor az egységimpulzus függvény segítségével ezek a derivált-függvényértékek is meghatározhatók:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(1)}(t)dt \triangleq -f^{(1)}(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt \triangleq (-1)^n f^{(n)}(0)$$

- Az egységimpulzus függvényre adott válasz a *súlyfüggvény*, $h(t)$. A dinamikus tagok kísérleti vagy szimulációs vizsgálata során a súlyfüggvény viselkedése fontos információt ad a rendszer tulajdonságairól.

2.2.2. A négyszög-impulzus függvény

A négyszög-impulzus függvény elsősorban elektronikai rendszerekben alkalmazott vizsgáló jel, de más technológiai rendszerek esetében is könnyen megvalósítható és használható. Definíciója:

$$p_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} .$$

A négyszög-impulzus ilyen módon történő megadása egységnyi függvény alatti területet jelent, és ha az impulzus időtartamának ε értékét minden határon túl csökkentjük, akkor az egységimpulzus függvényt kapjuk meg.

Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{p_{\varepsilon}(t)\} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s} .$$

2.2.3. Egységugrás függvény

Az egységugrás függvény szintén a leggyakrabban alkalmazott vizsgáló jelek közé tartozik. Definíciója:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

Az egységugrás függvényt elsősorban a szabályozási körben megvalósított ugrásszerű alapjel-váltások, illetve hasonlóan ugrásszerű módon fellépő zavarások modellezésére használhatjuk. Szigorúan matematikai szempontból vizsgálva a jelet szakadásos függvényről van szó, melynek a $t = 0$ időpontban nem egyezik meg a jobb és bal oldali határértéke. A fizikai értelmezés során olyan folytonos jelnek tekintjük az egységugrás jelet, melynél a két jelérték közötti felfutás a rendszer működése szempontjából elhanyagolhatóan rövid idő alatt játszódik le.

Az egységugrás függvény tulajdonságai a következők:

- Az egységugrás függvény deriváltja a Dirac delta, illetve a négyszög impulzus függvények segítségével értelmezhető. A négyszög impulzus függvényt felbontjuk, mint egy $t = 0$ időpontban felfutó, $1/\varepsilon$ amplitúdójú, majd $t = \varepsilon$ időpontban lefutó, $-1/\varepsilon$ amplitúdójú egységugrás függvények együttese, így:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} 1(t) .$$

- Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} .$$

- Az egységugrás függvényre adott válasz az *átmeneti függvény*. Szerepe a súlyfüggvényhez hasonlóan fontos a jelformáló tagok dinamikus vizsgálata során.

2.2.4. Egységsebesség-ugrás függvény

Az egységsebesség-ugrás függvényt a következő módon definiálhatjuk:

$$v(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

A gyakorlatban általában programozott, azaz előírt ideig tartó alapjel-váltások, illetve növekvő jellegű zavarások modellezésére használjuk. Mint az a definícióból is látható, az egység jelzőt a felfutás meredeksége miatt kapta. Miután az alapjel-váltás egy előírt értékig történik, ezért az előbbi definíciót – megtartva egységnyi meredekséget – a következőképpen módosíthatjuk:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq T \\ T, & t > T \end{cases} ,$$

ahol T a felfutás előírt időtartama. Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{1}{s^2} .$$

2.2.5. Egységgyorsulás-ugrás függvény

Ez a vizsgáló jel a hagyományos technológia rendszerekben ritkán használatos, de például mechanikai mozgást leíró rendszerekben (pl. robotkarok mozgása) nagy jelentőségű. Definíciója:

$$a(t) = \begin{cases} t^2/2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{a(t)\} = \frac{1}{s^3} .$$

Belátható, hogy az egységimpulzus, az egységugrás, az egységsebesség-ugrás és az egységgyorsulás függvények között időtartományban az alábbi kapcsolat van:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) , \quad 1(t) = \frac{d}{dt} v(t) , \quad v(t) = \frac{d}{dt} a(t) , \quad t \geq 0 .$$

$$\int \delta(t) dt = 1(t) , \quad \int 1(t) dt = v(t) , \quad \int v(t) dt = a(t) ,$$

Az egységsebesség-ugrás és az egységgyorsulás függvény esetén is értelmezhető a megfelelő válasz függvény, de azokra nem alkalmaznak külön elnevezést.

2.2.6. Szinuszos bemenő jel

A szinusz függvényt, mint vizsgáló jelet a következő módon adhatjuk meg:

$$\sin \omega t = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \omega = 1 \\ 0, & t < 0 \end{cases} .$$

Ezt a vizsgáló jelet elsősorban periodikus bemenetű hálózatok esetében használjuk a gyakorlatban, illetve frekvenciatartománybeli rendszervizsgálatok során alkalmazzuk tipikus bemenetként. Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} .$$

A szinuszos bemenő jellel és az arra adott válasszal a frekvenciatartományban elvégzett rendszervizsgálatok során foglalkozunk részletesen.

2.3. Válaszfüggvény meghatározása időtartományban a súlyfüggvény ismeretében

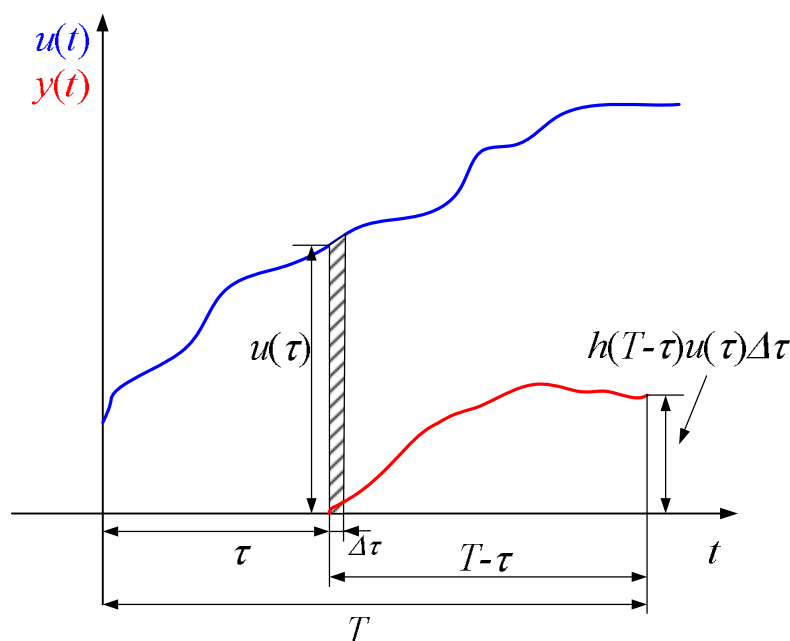
Legyen adott egy dinamikus tag $h(t)$ súlyfüggvénye. Határozzuk meg ennek ismeretében egy tetszőleges $u(t)$ bemenetre adott $y(t)$ választ. Bontsuk fel az $u(t)$ függvényt elegendően kicsiny időtartamú négyzetimpulzusok sorozatára. Vizsgáljuk meg, hogy a τ_i időponthoz tartozó $u(\tau_i)$ bemenő jelértéknek milyen hatása lesz egy tetszőleges $T > \tau_i$ időpontban a kimenetre. Feltételezve, hogy $\Delta \tau$ elegendően kicsi időtartam, az $u(\tau_i)$ bemenetre adott válasz közelíthető a súlyfüggvény segítségével, mint ahogy ez a 2.1. ábrán látszik. Természetesen a kimenet $y(T)$ értéke valamennyi $\tau < T$ időpontbeli bemeneti jel-összetevőtől függ:

$$y(T) \approx \sum_{i=0}^{n-1} h(T - \tau_i) u(\tau_i) \Delta \tau .$$

Feltételezve, hogy a bemenő jel felbontásához használt négyzetimpulzusok időtartamát minden határon túl lehetséges csökkenteni, azaz $\Delta \tau \rightarrow 0$, akkor a bemenő jelet, mint impulzusok sorozatát lehet értelmezni. Így a kimenet értéke egy tetszőleges T időpontban a következő módon határozható meg:

$$y(T) = \int_0^{\infty} h(T - \tau)u(\tau) d\tau .$$

A kapott összefüggés konvolúciós integrálként ismert. Megjegyezzük, hogy általánosságban az integrálás alsó határaként a $-\infty$ is megadható, de a korábban tárgyaltak megfelelően feltételezzük, hogy a bemenő jel értéke a $\tau < 0$ időtartományon 0.



2.1. ábra. A konvolúciós integrál értelmezése

2.4. Válaszfüggvény meghatározása időtartományban általános esetben

Egy tetszőleges bemenetre adott válaszfüggvény általános esetben történő meghatározásához induljunk ki az általános bemenet-kimenet modelltől:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) .$$

Egy ilyen típusú differenciálegyenlettel jellemzett rendszer válasza, vagyis az $y(t)$ kimenet időbeli lefolyása egyrészt függ a rendszer bemenetére adott $u(t)$ jeltől, valamint $y^{(i)}(t_0)$, $i = 1, \dots, n-1$ kezdeti feltételektől. A differenciálegyenletek megoldása kapcsán tanultakból ismert, hogy az inhomogén differenciálegyenletek megoldása a homogén differenciálegyenlet általános megoldásából és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásából áll össze:

$$y(t) = y_{h0}(t) + y_{ih0}(t) .$$

Tételezzük fel, hogy a bemenő jel ugrás jellegű függvény. Ekkor az $y_{ih0}(t)$ partikuláris megoldás adja meg a kimenő jelet az *állandósult* (*stacionárius*) állapotban (ha létezik az

állandósult állapot), míg $y_{h0}(t)$ homogén megoldás írja a kimenet alakulását az *átmeneti (tranzienst) állapotban*.

Vizsgáljuk meg először a homogén egyenlet megoldását.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0 .$$

Keressük a homogén egyenlet megoldását a következő alakban:

$$y_{h0}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} .$$

Helyettesítsük ezt vissza a homogén egyenletbe, és végezzük el a kijelölt deriválási műveleteket:

$$\sum_{i=1}^n (a_n p_i^n + \dots + a_1 p_i + a_0) C_i e^{p_i t} = 0 .$$

Az egyenlőség teljesüléséhez minden $p = p_i$, $i = 1, \dots, n$ -re teljesülnie kell az alábbi egyenlőségnek:

$$a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0 .$$

Erre az egyenletre szokás karakterisztikus egyenletként, a polinomra pedig karakterisztikus polinomként hivatkozni.

2.5. Az átviteli függvény

Az átviteli függvény a dinamikus tag operátor tartománybeli modellje. Meghatározásához Laplace transzformáljuk a bemenet-kimenet modell általános alakját zérus kezdeti feltételek mellett, majd fejezzük ki ebből a kimenetek és a bemenetek közötti kapcsolatot. A levezetéshez induljunk ki az általános bemenet-kimenet modellből:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) .$$

Legyenek a kezdeti feltételek zérusok:

$$y(t_0) = 0, y^{(1)}(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0 .$$

Laplace transzformáljuk mindkét oldalt tanult transzformálási szabályok figyelembe vételével:

$$\mathcal{L}\{a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t)\} = \mathcal{L}\{b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)\} ,$$

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s) ,$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) U(s) .$$

Átrendezve a következő alakot kapjuk:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} .$$

A kapott kifejezés alapján az átviteli függvényt a következő módon definiáljuk. A kimenő jel Laplace transzformáltja és a bemenő jel Laplace transzformáltjának hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett az átviteli függvényt határozza meg az alábbi képletnek megfelelően:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \Big|_{z.k.f.} .$$

Az átviteli függvény szokásos jelölései:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{z(s)}{p(s)} .$$

A felsorolás második alakja a bemenet-kimenet modell együtthatóival felírt racionális tört-függvényre, míg a harmadik a számláló illetve nevezőbeli polinomok gyöktényezős alakban történő megadására utal. Irányítástechnikában a nevező polinomjának gyökeit pólusoknak, a számláló polinomjának gyökeit zérushelyeknek nevezzük. Ha a modell kimeneti oldalán a legnagyobb deriválási fokszám n , a bementi oldalán m , akkor természetesen n darab pólusa és m darab zérushelye van az átviteli függvénnyel jellemzett tagnak:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{(s - z_m) \cdot \dots \cdot (s - z_2)(s - z_1)}{(s - p_n) \cdot \dots \cdot (s - p_2)(s - p_1)} .$$

Az átviteli függvény a következő fontosabb tulajdonságokkal rendelkezik:

- Átviteli függvénnyel lineáris, időinvariáns rendszereket jellemezünk.
- Az átviteli függvényt a bemenet és a kimenet közti kapcsolat alapján vezetjük le operátortartományban, így a modellezett rendszer belső összefüggéseiről nem ad információt. Így szerkezetileg különböző, de viselkedésükben hasonló rendszereknek lehet azonos átviteli függvénye.
- Egy dinamikus tag átviteli függvénye vagy egy tagcsoport eredő átviteli függvénye a tag vagy tagcsoport operátor tartománybeli modellje, független a konkrét bemenet nagyságától, formájától. Az átviteli függvény a modellezett rendszer tulajdonságainak hordozója.
- Ismert átviteli függvény esetén, ha bemenetnek adott a Laplace transzformáltja, akkor a kimenetet a következő összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} .$$

- Az átviteli függvény nevezőjében szereplő polinom alakilag megegyezik a karakterisztikus polinommal:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \sum_{i=1}^n (a_n p_i^n + \dots + a_1 p_i + a_0) C_i e^{p_i t} = 0 .$$

Ezen polinomok segítségével fontos rendszertulajdonságok határozhatók meg.

- Az átviteli függvény teremt kapcsolatot a bemenet-kimenet típusú modellek és az állapottér modellek között. Belátható, hogy ha ugyanannak a rendszernek írjuk fel mindkét típusú modelljét, akkor a belőlük levezethető átviteli függvény megegyezik.
- Ha az átviteli függvény alakja ismert (a számlálóban és a nevezőben szereplő polinomok fokszáma adott), de az együtthatók értéke nem, akkor azokat paraméter identifikációs módszerekkel kísérleti (szimulációs) úton meghatározhatjuk. Ha az átviteli függvény alakja nem teljesen ismert (nem ismerjük a polinomok fokszámát), akkor azokat struktúra identifikációs feladatok segítségével állapíthatjuk meg.

Az átviteli függvény, a súlyfüggvény és az átmeneti függvény között a következő kapcsolat értelmezhető. Legyen egy dinamikus tag átviteli függvénye $G(s)$. Súlyfüggvény esetén a bemenő jel a Dirac delta (egységimpulzus), így $u(t) = \delta(t)$, melynek Laplace transzformáltja $U(s) = 1$. Ekkor a kimenet:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \Leftrightarrow G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} ,$$

ahol a $h(t)$ súlyfüggvény szokásos jelölése. Ezen összefüggésből adódóan szokás a súlyfüggvényre, mint a jelformáló tag időtartománybeli modelljére hivatkozni. Ha a bemenet az egységugrás függvény, azaz $u(t) = 1(t)$, akkor a kimenet:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^t h(\tau) d\tau .$$

A megadott összefüggések ismeretében is fontos még egyszer kiemelni, hogy az átviteli függvény a tag operátor tartománybeli modellje, a súlyfüggvény és az átmeneti függvény a jelformáló tagnak, egy-egy speciális bemenetre (egységimpulzusra, illetve egységugrásra) adott időtartománybeli válaszfüggvényei.

3. Laplace transzformáció

Az irányítástechnikai leírásokban előforduló differenciálegyenletek megoldásának egyik kézenfekvő eszköze a Laplace transzformáció. Intuitív módon értelmezve, a Laplace transzformáció olyan szerepet játszik a differenciálegyenletek megoldásában, mint a logaritmus alkalmazása a szorzáshoz, osztáshoz vagy hatványozáshoz kapcsolódó feladatokban: segítségével a számítási feladatok egyszerűbben lesznek elvégezhetőek. A számítás lépései a következők lesznek:

- a kiindulási adatok (modellek, bemenő jelek) Laplace transzformációja;
- operátor tartományban a megfelelő műveletek szabályok szerinti elvégzése;
- a kapott eredmények visszatranszformálása időtartományba.

A Laplace transzformációt a következő módon vezethetjük be. Legyen $f(t)$ egy valós értékű függvény. Ekkor az $f(t)$ függvény Laplace transzformáltja alatt azt az $F(s)$ függvényt értjük, amit az alábbi módon határozzunk meg:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt ,$$

ahol az $s = \sigma + j\omega$ komplex szám, az úgynevezett *Laplace operátor*. Vizsgálataink során az $f(t)$ függvényről feltételezzük, hogy $f(t) = 0$, ha $t < 0$, illetve legyen értelmezve, ha $t > 0$. Ez a két feltétel a valóságos folyamatok esetében viszonylag könnyen teljesíthető. A $t = 0$ időpont előtti történéseket összefoglalhatjuk a differenciálegyenlet kezdeti feltételeiben, másrészt az induló állapotot véve viszonyítási alapnak, vagyis az ehhez viszonyított változásokat vizsgálva, koordináta-transzformációval tekinthetjük a $t = 0$ időponthoz tartozó értéket $f(t) = 0$ értéknek.

Az így bevezetett Laplace transzformáció, tulajdonképpen egyoldalas transzformáció, és az alsó határt a $t = 0^-$ időpontként értelmezzük, vagyis az idő balról tart nullához. Ennek a kitételnek akkor van jelentősége, ha az $f(t)$ függvénynek a $t = 0$ időpontban szakadása van (pl. egységugrás függvény), vagy impulzus (Dirac impulzus) jellegű összetevővel rendelkezik.

A Laplace transzformáció alkalmazása során figyelembe kell vennünk a transzformációhoz kapcsolódó szabályokat és tételeket. Ezeket a tételeket a 3.1. táblázatban foglaltuk össze.

A transzformáció elvégzése során az ún. operátor tartományban az ott érvényes műveleti szabályoknak megfelelően elvégezzük a kijelölt műveleteket. A kapott eredmény időtartománybeli értelmezéséhez elvégezzük az inverz Laplace transzformációt a következő képlet alapján:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{ts} ds ,$$

ahol c az $F(s)$ függvény legnagyobb valósrésű pólusánál nagyobb érték. A Laplace transzformációt és az inverz Laplace transzformációt általában a 3.2. táblázatban bemutatott egyszerűbb tagokra visszavezetve végezzük el. Ehhez, különösen az inverz Laplace transzformáció elvégzéséhez, a visszatranszformálandó kifejezést parciális törtekre kell bontanunk, majd a műveleti szabályok figyelembe vételével kell elvégeznünk a kívánt transzformációt.

3.1. táblázat. A Laplace transzformációra vonatkozó főbb összefüggések

Összefüggés	Időfüggvény	Laplace transzformált
Laplace transzformáció értelmezése	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Inverz Laplace transzformáció	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{ts} ds$	$F(s)$
Linearitás, szuperpozíció	$cf(t)$ $c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$	$cF(s)$ $c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$
Differenciálhányados Laplace transzformáltja	$f^{(1)}(t)$ $f^{(2)}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ $s^nF(s) - \sum_{p=0}^{n-1} s^{n-p-1} f^{(p)}(0)$
Integrálás Laplace transzformációja	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Eltolási tétel	$1(t - \tau)f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
Csillapítási tétel	$f(t)e^{\mp\alpha \cdot t}$	$F(s \pm \alpha)$
Konvolúció-tétel	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Kezdetiérték-tétel		$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Végérték-tétel		$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

3.2. táblázat Néhány fontosabb függvény Laplace transzformáltja

Időfüggvény $f(t)$	Laplace transzformált $F(s)$
Egységimpulzus $\delta(t)$	1
Egységugrás $1(t)$	$\frac{1}{s}$
Egységsebesség-ugrás t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$te^{-\alpha \cdot t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha \cdot t}$ (n pozitív egész)	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha \cdot t} - e^{-\beta \cdot t})$ ($\alpha \neq \beta$)	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta \cdot e^{-\beta \cdot t} - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t})$ ($\alpha \neq \beta$)	$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \cdot t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
$\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$
$\sin(\omega_n t)$	$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$
$\cos(\omega_n t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$ ($\zeta < 1$)	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta)$ ($\zeta < 1$)	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$

A következőkben néhány gyakorló feladat található a Laplace és inverz Laplace transzformáció elvégzésére.

3.1. Feladatok Laplace transzformáció alkalmazására

Készítsük el a következő függvények Laplace transzformáltjait!

1. $f_1(t) = 4$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 4e^{-st} dt = \frac{4e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{4}{-s} = \frac{4}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

2. $f_2(t) = 4e^{-5t}$

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 4e^{-5t}e^{-st} dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-(s+5)t} dt = \\ &= \frac{4e^{-(s+5)t}}{-(s+5)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{4}{-(s+5)} = \frac{4}{s+5}, \quad \operatorname{Re}(s) > -5. \end{aligned}$$

3. $f_3(t) = 2e^{6t}$

$$\begin{aligned} F_3(s) &= \int_0^{\infty} f_3(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 2e^{6t}e^{-st} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-(s-6)t} dt = \\ &= \frac{2e^{-(s-6)t}}{-(s-6)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{2}{-(s-6)} = \frac{2}{s-6}, \quad \operatorname{Re}(s) > 6. \end{aligned}$$

4. $f_4(t) = e^{j5t}$

Ha $f(t)$ egy komplexértékű függvény, akkor a Laplace transzformáció elvégzéséhez bontsuk fel valós és képzetes részére és a transzformációt végezzük el tagonként:

$$f(t) = f_v(t) + jf_k(t),$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_v(t)\} + j\mathcal{L}\{f_k(t)\},$$

$$F(s) = F_v(s) + jF_k(s).$$

$$\begin{aligned}
 F_4(s) &= \int_0^{\infty} f_4(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{j5t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-5j)t} dt = \\
 &= \frac{e^{-(s-5j)t}}{-(s-5j)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(s-5j)} = \frac{1}{s-5j} = \frac{s+5j}{s^2+25} \\
 &= \frac{s}{s^2+25} + j \frac{5}{s^2+25} \quad , \quad \text{Re}(s) > 0 .
 \end{aligned}$$

5. $f_5(t) = \cos 5t$

A megoldáshoz induljunk ki a komplex számok különböző formában felírt alakjából:

$$\alpha + j\beta = \varrho(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \varrho e^{j\varphi} .$$

Ennek megfelelően, ha az $e^{j\varphi}$ -t akarjuk Laplace-transzformálni, akkor az előzőekben felírt általános alakoknak megfelelően egy olyan komplex kifejezést kapunk, melynek az első tagja a $\cos(\varphi)$ Laplace-transzformáltjának, míg a második tagja a $\sin(\varphi)$ transzformáltjának felel meg.

Így

$$\mathcal{L}\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2+25} \quad , \quad \text{Re}(s) > 0 \quad ,$$

$$\mathcal{L}\{\sin 5t\} = \frac{5}{s^2+25} \quad , \quad \text{Re}(s) > 0 \quad .$$

6. $f_6(t) = \frac{d}{dt}(4e^{-5t}1(t))$

A megoldáshoz első lépésként végezzük el a deriválást:

$$\frac{d}{dt}(4e^{-5t}1(t)) = 4e^{-5t}\delta(t) + 4(-5)e^{-5t}1(t) = 4\delta(t) - 20e^{-5t}1(t) .$$

Az átalakítás második lépésénél kihasználtuk, hogy a $\delta(t)$ függvény a $t=0$ időpont kivételével mindenhol 0, itt viszont az exponenciális függvény értéke 1 lesz.

Így

$$\begin{aligned}
 F_6(s) &= \mathcal{L}\{4\delta(t)\} - \mathcal{L}\{20e^{-5t}1(t)\} = 4\mathcal{L}\{\delta(t)\} - 20\mathcal{L}\{e^{-5t}\} = \\
 &= 4 - \frac{20}{s+5} = \frac{4s}{s+5} \quad , \quad \text{Re}(s) > -5 \quad .
 \end{aligned}$$

$$7. f_7(t) = \frac{d}{dt}(4e^{-5t})$$

Az előző feladathoz képest annyi a különbség, hogy nem szerepel az $1(t)$ függvény a megadott kifejezésben. Miután az $1(t)$ függvény értéke $t > 0$ időpontokra 1, így a 6. feladatban a deriválás elvégzése után a transzformáció második tagjánál figyelmen kívül hagyhattuk. Ennél a feladatnál viszont már a deriválásnál sem szerepel, ezért kapunk más eredményt.

$$\frac{d}{dt}(4e^{-5t}) = 4(-5)e^{-5t}1(t) = -20e^{-5t}1(t) .$$

Így

$$F_7(s) = \mathcal{L}\{-20e^{-5t}\} = -20\mathcal{L}\{e^{-5t}\} = -\frac{20}{s+5} , \quad \text{Re}(s) > -5 .$$

Határozzuk meg a következő kifejezések időtartománybeli megfelelőjét!

$$1. F_1(s) = \frac{4s+5}{5s+4}$$

Az inverz transzformáció elvégzéséhez hozzuk az alábbi alakra a kifejezést:

$$F_1(s) = \frac{4s+5}{5s+4} = \frac{0,8(5s+4)}{5s+4} + \frac{5-3,2}{5s+4} = 0,8 + \frac{1,8}{5s+4} = 0,8 + \frac{0,36}{s+0,8} .$$

A kapott kifejezésben szereplő tagokat a II. táblázat alapján az invertálás elvégezhető:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{0,8\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,36}{s+0,8}\right\} = 0,8\delta(t) + 0,36e^{-0,8t} .$$

$$2. F_2(s) = \frac{4s+5}{s^2}$$

Az inverz transzformációt az 1. példához hasonlóan végezhetjük el:

$$F_2(s) = \frac{4s+5}{s^2} = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} ,$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}\right\} = 4 \cdot 1(t) + 5 \cdot t .$$

$$3. F_3(s) = \frac{4s+5}{s^2+9}$$

Az inverz transzformációt ebben az esetben is az 1. példának megfelelően végezzük el:

$$F_3(s) = \frac{4s+5}{s^2+9} = \frac{4s}{s^2+9} + \frac{5}{3} \frac{3}{s^2+9},$$

$$f_3(t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = 4\cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t.$$

$$4. F_4(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Az inverz Laplace-transzformáció elvégzéséhez első lépésként bontsuk parciális törtekre a kifejezést:

$$\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3},$$

$$s^2+2s+2 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2),$$

$$s^2+2s+2 = (A+B+C)s^2 + (5A+4B+3C)s + 6A+3B+2C,$$

$$(A+B+C) = 1 \quad (5A+4B+3C) = 2 \quad 6A+3B+2C = 2.$$

A kapott három ismeretlenes egyenletrendszert megoldva az együtthatók:

$$A = 0,5, \quad B = -2, \quad C = 2,5.$$

Így

$$\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{2,5}{s+3}.$$

A kapott kifejezést már tagonként visszatranszformálhatjuk időtartományra:

$$\begin{aligned} f_4(t) &= 0,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \\ &= 0,5e^{-t} - 2e^{-2t} + 2,5e^{-3t}. \end{aligned}$$

$$5. F_5(s) = \frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)}$$

Az inverz Laplace-transzformáció elvégzéséhez először ebben az esetben is végezzük el a kifejezés parciális törtekre bontását:

$$\frac{5s^2+3s+1}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2},$$

$$5s^2 + 3s + 1 = A(s + 2)^2 + B(s + 2)(s + 4) + C(s + 4) .$$

Az együtthatók meghatározását ebben az esetben végezzük el úgy, hogy a kapott egyenletnek teljesülnie kell s tetszőleges értékére, így a pólusokra is. Ezt felhasználva:

$$A = \left. \frac{5s^2 + 3s + 1}{(s + 2)^2} \right|_{s=-4} = \frac{5 \cdot 16 + 3 \cdot (-4) + 1}{(-4 + 2)^2} = 19,75 ,$$

$$C = \left. \frac{5s^2 + 3s + 1}{s + 4} \right|_{s=-2} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1}{-2 + 4} = 7,5 .$$

A B együttható esetében ez a megoldás közvetlenül nem használható, de ha beírjuk az A -ra és C -re kapott értékeket:

$$\frac{5s^2 + 3s + 1}{(s + 2)^2(s + 4)} = \frac{19,75}{s + 4} + \frac{B}{s + 2} + \frac{7,5}{(s + 2)^2} ,$$

akkor a kapott egyenletnek továbbra is tetszőleges s -re igaznak kell lennie, de most legyen $s = 0$:

$$\frac{1}{16} = \frac{19,75}{4} + \frac{B}{2} + \frac{7,5}{4} \Rightarrow B = -12 .$$

Tehát a felbontás eredményeként a következő alakot kapjuk:

$$\frac{5s^2 + 3s + 1}{(s + 2)^2(s + 4)} = \frac{19,75}{s + 4} + \frac{-12}{s + 2} + \frac{7,5}{(s + 2)^2} ,$$

melyet a II. táblázat segítségével invertálhatunk.

$$\begin{aligned} f_5(t) &= 19,75\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\} - 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} + 7,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^2}\right\} = \\ &= 19,75e^{-4t} - 12e^{-2t} + 7,5te^{-2t} . \end{aligned}$$

6. $F_6(s) = \frac{3s+4}{(s+2)(s^2+16)}$

A megoldást ebben az esetben is a parciális törtekre bontással kezdjük, majd az egyenlet két oldalán szereplő polinomok együtthatóit összehasonlítva kapjuk meg az együtthatók értékeit:

$$\frac{3s + 4}{(s + 2)(s^2 + 16)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 16} ,$$

$$3s + 4 = A(s^2 + 16) + (Bs + C)(s + 2) ,$$

$$3s + 4 = (A + B)s^2 + (2B + C)s + 16A + 2C ,$$

$$A = -0,1 \quad B = 0,1 \quad C = 2,8 .$$

$$\frac{3s + 4}{(s + 2)(s^2 + 16)} = \frac{-0,1}{(s + 2)} + \frac{0,1s + 2,8}{(s^2 + 16)} .$$

Innen:

$$\begin{aligned} f_6(t) &= -0,1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} + 0,1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 16}\right\} + 0,7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\} = \\ &= -0,1e^{-2t} + 0,1 \cos 4t + 0,7 \sin 4t . \end{aligned}$$

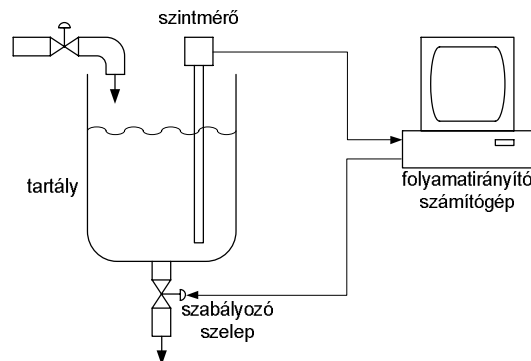
4. Irányítástechnikai rendszerek leírása

Az irányítástechnikai rendszerekben található alrendszereket alapvetően két fő csoportra oszthatjuk: az irányító rendszerre és az irányított rendszerre. Az irányító rendszerre röviden, mint szabályozóra, az irányított rendszerre, mint irányított objektumra vagy szakaszra hivatkozunk. Természetesen részletesebb bontás esetén megkülönböztethetünk további alrendszereket, így például a szakasz kimenő jelének meghatározását elvégző mérőeszközt, vagy az anyag-, energiaáramok módosítását biztosító beavatkozó szervet.

A leírás céljának megfelelően az irányítási rendszert következő formákban jeleníthetjük meg:

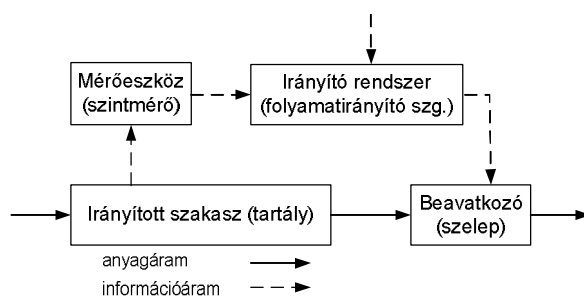
- szerkezeti vázlat,
- működési vázlat,
- hatásvázlat.

A szerkezeti vázlat esetében az adott szakterületen használatos szimbólumok segítségével jelenítjük meg az irányított rendszer technológia szempontból fontos elemeit, beleértve az irányító rendszer részeit is. Az egyes objektumokat összekötő nyilak a szerkezeti vázlaton a technológiai működés jellegének megfelelően jelképezhetnek anyag-, energia- és információ-áramokat. Példaként a 4.1. ábrán látható egyszerű technológia rendszer szerkezeti vázlata.



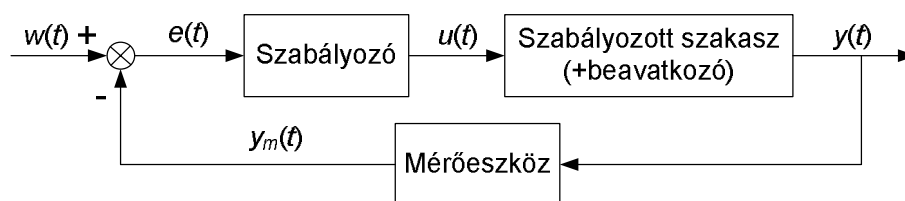
4.1. ábra. Az irányított technológiai rendszer szerkezeti vázlat formájú megjelenítése

A működési vázlat esetén a cél már egy formalizáltabb leírás, ezért geometria elemeket (téglalap, kör, stb.) használunk szimbólumokként, de továbbra is a technológiai és az irányítási struktúra egyformán kiemelt szerepet kap, mint az a 4.2. ábrán látható.



4.2. ábra. Az irányított technológiai rendszer működési vázlat formájú megjelenítése

A hatásvázlat esetében is geometria elemeket alkalmazunk, de ezeknél már az irányítási struktúra megjelenítésére tesszük a hangsúlyt. Ellentétben a szerkezeti és a működési vázlattal, a hatásvázlat esetében már nincsenek feltüntetve a technológiai áramok, az összekötő nyilak jeleket (jellemzőket) szimbolizálnak. Az ok-okozati kapcsolatok figyelembe vételével a szabályozott szakasz bemenő jele nem a belépő anyag- vagy energiaáram lesz, hanem a szabályozótól jövő beavatkozó jel. Összehasonlításként a 4.3. ábrán láthatjuk a korábban szerkezeti vázlat és működési vázlat formájában bemutatott technológiai rendszer hatásvázlatát.



$w(t)$ – alapjel vagy előírt érték
 $u(t)$ – beavatkozó jel (szelep pozíció)
 $y(t)$ – kimenet (szint)
 $y_m(t)$ – kimenet (szint) mért értéke

4.3. ábra. Az irányított technológiai rendszer megjelenítése hatásvázlat formájában

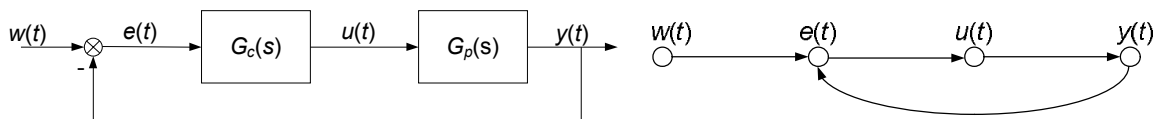
Az irányítási rendszerek tárgyalásánál elsősorban a hatásvázlatnak van kiemelt szerepe, ezért a következőkben ezzel foglalkozunk részletesebben.

A hatásvázlat fontosabb részei és jellemzői:

- tag: az irányítási rendszer elemeinek jelátviteli tulajdonságát képviselő fogalom;
 - irányított szakasz: az irányított objektum jelátvitelét leíró tag;
 - szabályozó: az irányítási művelet során a jelformálás feladatát ellátó tag;
 - a tagokat a hatásvázlaton általában az átviteli függvényük szimbólumával jelöljük;
- jelek
 - bemenő jel: a tagot működésre készítő, tőle független hatás;

- kimenő jel: a tag jelformálása, vagyis működése eredményeként kialakuló hatás;
- hatásirány: a jelnek a tagon való áthaladási iránya, a jelekről feltételezzük, hogy egy irányban haladnak át a tagokon, így visszahatásmentesek, azaz a kimenetnek a bemenetre nincs közvetlen hatása.

A hatásvázlatot szokás tömbvázlat és jel-folyam gráf formájában megadni. A 4.4. ábrán látható egy egyszerű szabályozási körnek a tömbvázlat és a jel-folyam gráf típusú ábrázolása. A két ábrázolási mód egymásnak könnyen megfeleltethető, így ebben a jegyzetben a hatásvázlat alatt a tömbvázlat formájában történő ábrázolást értjük.

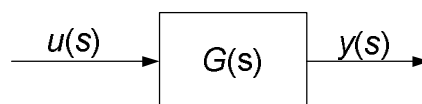


4.4. ábra. A szabályozási kör tömbvázlat és jel-folyam gráf típusú ábrázolása

A hatásvázlatok elkészítésével tulajdonképpen az irányított rendszernek egy funkcionális modelljét kapjuk meg. Számos szimulációs szoftver esetében a hatásvázlat elkészítése után elvégezhetjük a modell szimulációját anélkül, hogy az eredő átviteli függvényt nekünk kellene meghatározni. Abban az esetben, ha a rendszer tulajdonságait magunk akarjuk meghatározni, vagy a válaszfüggvényeket akarjuk analitikusan kiszámolni, el kell készítenünk az eredő átviteli függvényt. Ehhez át kell tudnunk alakítani a hatásvázlatot, előállítva azokat az egyszerűbb formákat, amelyeknek már közvetlenül fel tudjuk írni az eredő átviteli függvényét. A következőkben először ezeknek az alapkapcsolásoknak vezetjük le az eredő átviteli függvényét, majd az ún. egyenértékű átalakításokat tekintjük át. Befejezésként néhány példa segítségével tekintjük át az eredő átviteli függvény meghatározásának menetét.

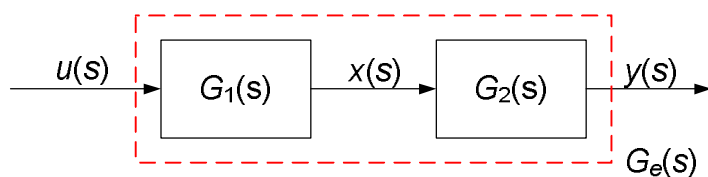
4.1. Alapkapcsolások eredő átviteli függvénye

1. Egy tag



$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} .$$

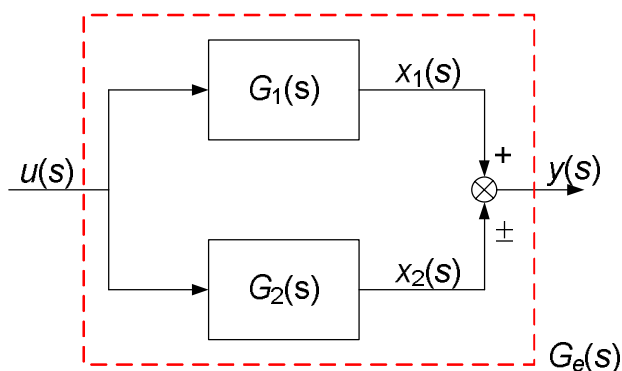
2. Sorba kapcsolt tagok



$$G_1(s) = \frac{x(s)}{u(s)}, \quad G_2(s) = \frac{y(s)}{x(s)},$$

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_2(s)x(s)}{\frac{x(s)}{G_1(s)}} = G_1(s)G_2(s).$$

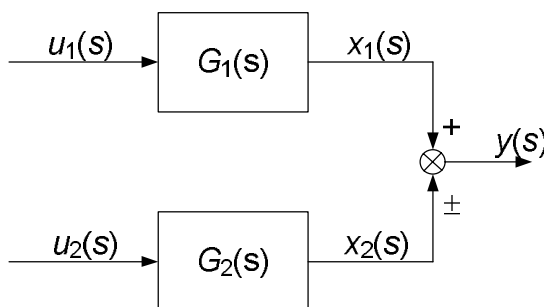
3. Párhuzamosan kapcsolt tagok közös bemenettel



$$G_1(s) = \frac{x_1(s)}{u(s)}, \quad G_2(s) = \frac{x_2(s)}{u(s)},$$

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{x_1(s) \pm x_2(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)u(s) \pm G_2(s)u(s)}{u(s)} = G_1(s) \pm G_2(s).$$

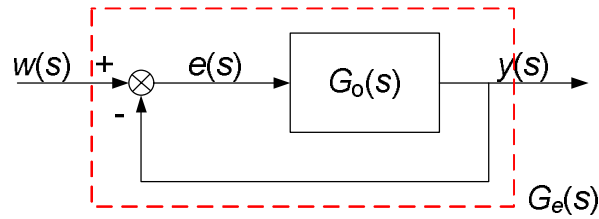
4. Párhuzamosan kapcsolt tagok külön bemenettel



$$G_1(s) = \frac{x_1(s)}{u_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{x_2(s)}{u_2(s)},$$

$$y(s) = x_1(s) \pm x_2(s) = G_1(s)u_1(s) \pm G_2(s)u_2(s).$$

5. Egy tag visszacsatolása



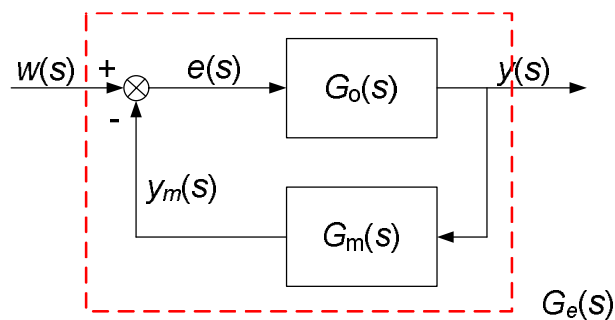
$$G_o(s) = \frac{y(s)}{e(s)} ,$$

$$e(s) = w(s) - y(s) , \quad G_o(s) = \frac{y(s)}{w(s) - y(s)} ,$$

$$y(s) + G_o(s)y(s) = G_o(s)w(s) ,$$

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} .$$

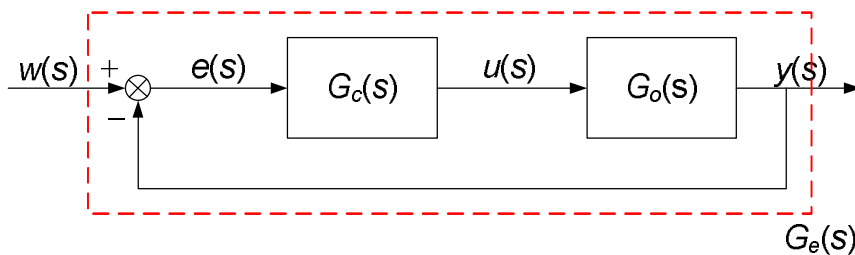
6. Visszacsatolás – tag az előremenő és a visszatérő ágban



$$G_o(s) = \frac{y(s)}{e(s)} , \quad G_m(s) = \frac{y_m(s)}{y(s)} , \quad e(s) = w(s) - y_m(s) = w(s) - G_m(s)y(s) ,$$

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)} .$$

7. Zárt szabályozási kör eredő átviteli függvénye



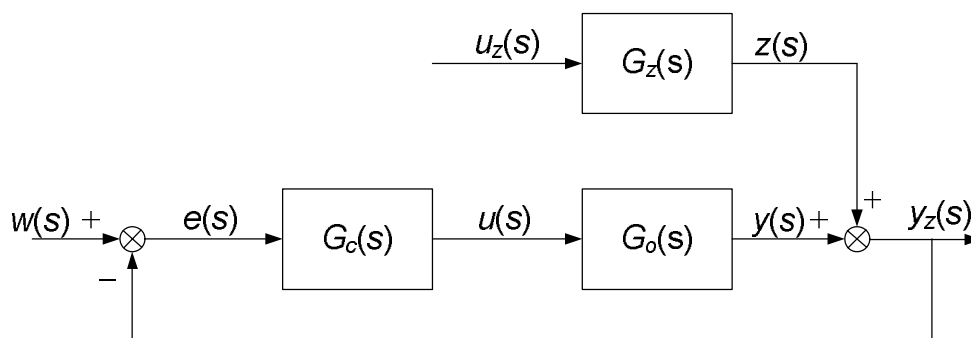
$$G_o(s) = \frac{y(s)}{u(s)}, \quad G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)},$$

$$e(s) = w(s) - y(s) = \frac{u(s)}{G_c(s)} = \frac{y(s)}{G_o(s)},$$

$$y(s) + G_c(s)G_o(s)y(s) = G_c(s)G_o(s)w(s),$$

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_c(s)G_o(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)}.$$

8. Zárt szabályozási kör zavarással



$$G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)}, \quad G_o(s) = \frac{y(s)}{u(s)}, \quad G_z(s) = \frac{z(s)}{u_z(s)}, \quad e(s) = w(s) - y_z(s),$$

$$y_z(s) = y(s) + z(s) = G_o(s)u(s) + G_z(s)u_z(s) = G_c(s)G_o(s)e(s) + G_z(s)u_z(s),$$

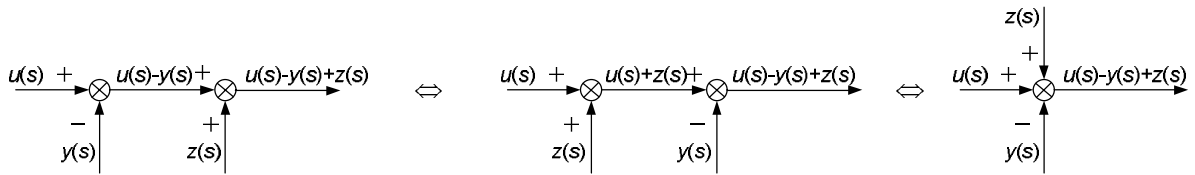
$$y_z(s) = G_c(s)G_o(s)(w(s) - y_z(s)) + G_z(s)u_z(s),$$

$$y_z(s) = \frac{G_c(s)G_o(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)} w(s) + \frac{G_z(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)} u_z(s).$$

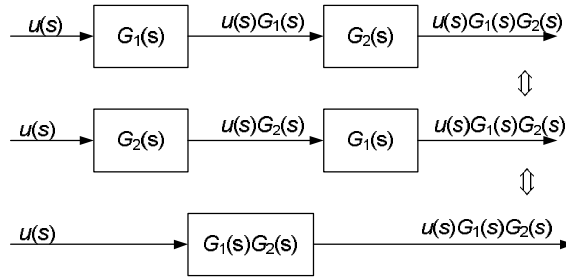
4.2. Helyettesítő kapcsolások

Az alábbiakban bemutatott ún. helyettesítő kapcsolások alkalmazása esetén olyan műveletek hajtunk végre a hatásvázlaton, amelyek nincs hatása az eredő átviteli függvényre, de jelentősen megkönnyíthetik annak meghatározását. Ezeket leggyakrabban átlapolódó előre- és visszacsatolások szétbontásánál tudjuk alkalmazni. Az átalakítás egyenértékűsége akkor lesz igaz, ha az átalakítás előtt és után az átalakított tagcsoport bemenete(i) és kimenete(i) megegyezik(nek).

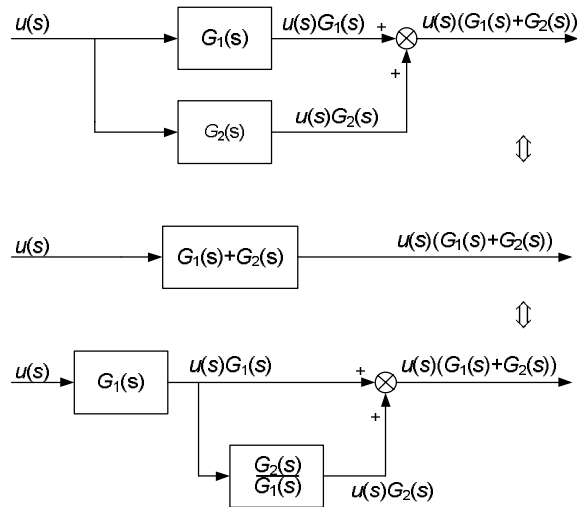
1. Összegzők felcserélése, összevonása, szétbontása



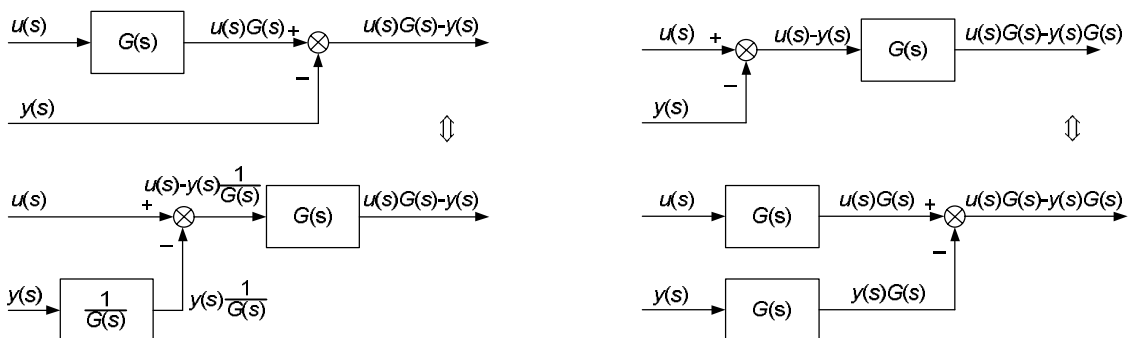
2. Tagok felcserélése, összevonása



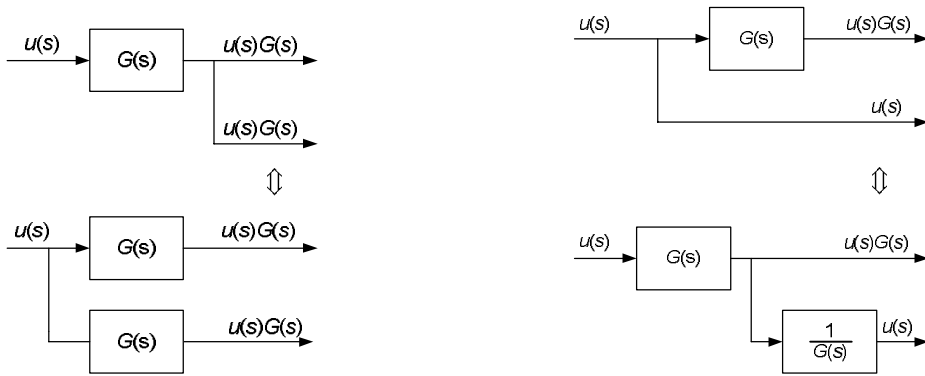
3. Tagok párhuzamos kapcsolásának átalakítása



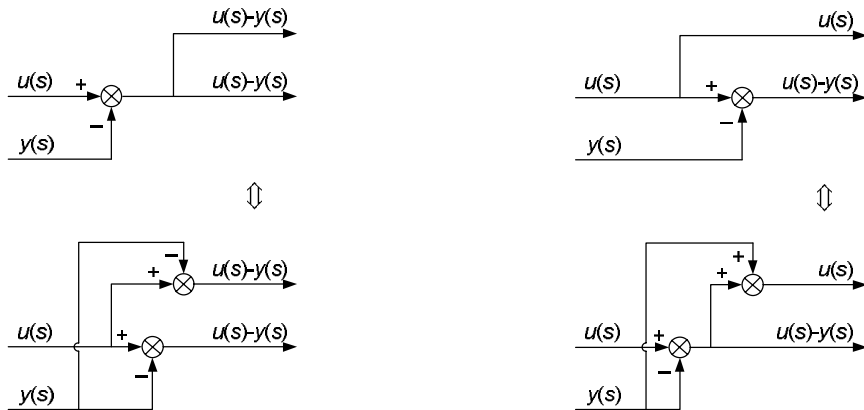
4. Tag és összegző felcserélése



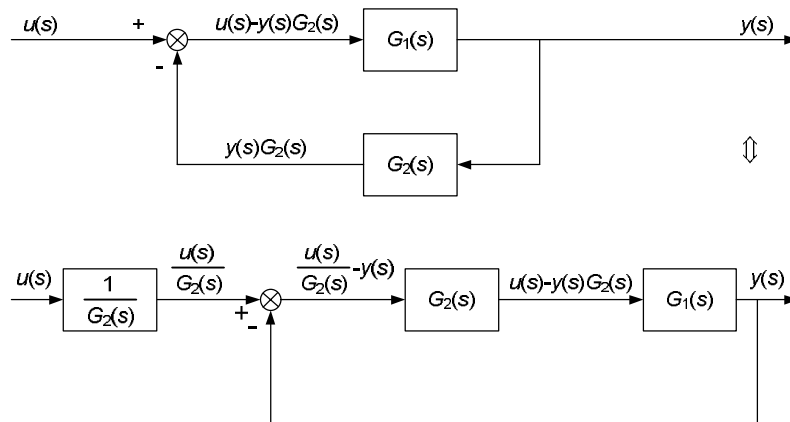
5. Tag és elágazás felcserélése



6. Összegző és elágazás felcserélése



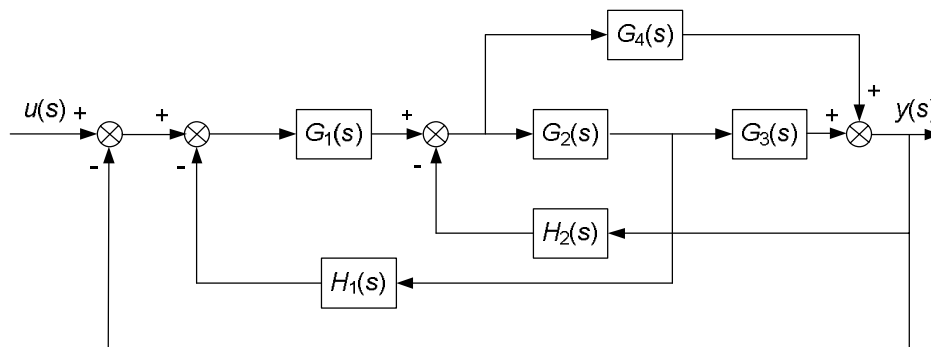
7. Visszacsatolt kör átalakítása



4.3. Feladatok hatásvázlatok átalakítására

1. példa

Legyen a feladat a 4.5. ábrán látható rendszer eredő átviteli függvényének meghatározása!

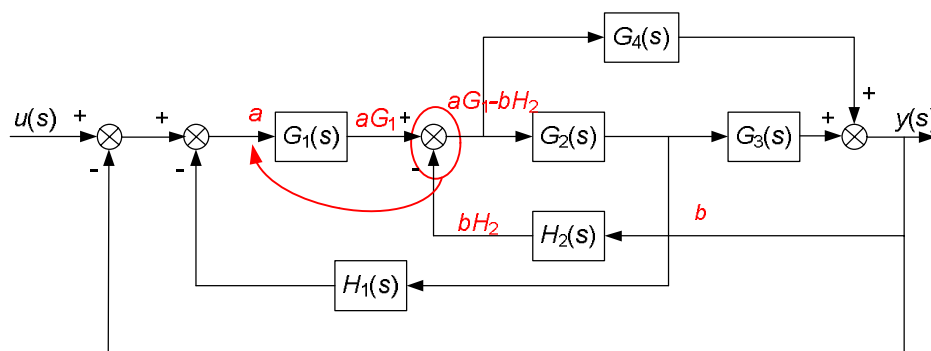


4.5. ábra. Az 1. példa hatásvázlata

A megoldás menete

Jól látható, hogy a feladat nehézségét az egymásba átlapolódó két visszacsatolás és az előrecsatolás okozza. A megoldás menete – nevezetesen, hogy mely lépésekkel milyen sorrendben csatoljuk szét a köröket – tetszőleges. A végeredményként jelentő eredő átviteli függvénynek minden esetben ugyanannak kell lennie. Az áttekinthetőbb jelölés érdekében az átalakítást magyarázó lépéseknél az s argumentum nem került feltüntetésre.

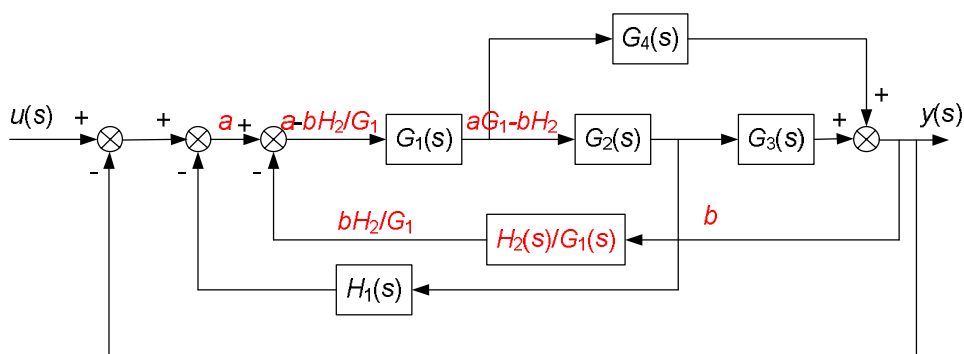
Válasszuk első lépésként a harmadik összegző áthelyezését a $G_1(s)$ jelű tag elé, mint ez a 4.6. ábrán látható.



4.6. ábra. Az átalakítás első lépése

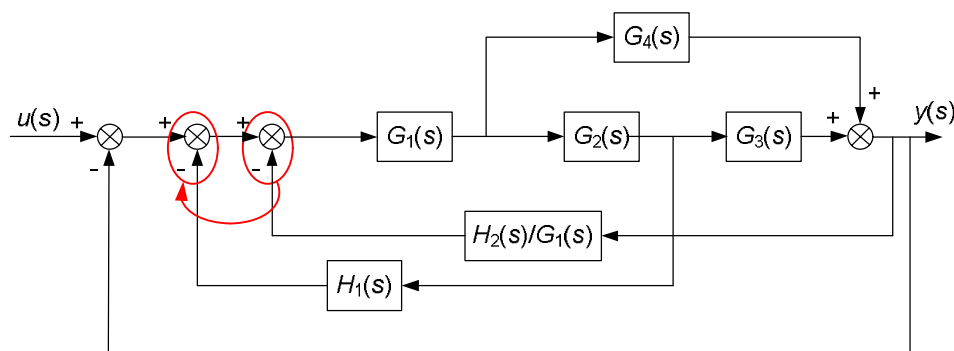
Az átalakítandó tagcsoport meghatározását az áthelyezendő elemhez kapcsolódó tagok figyelembe vételével határozzuk meg. Ennek megfelelően, itt a bemenő jelek az a és b szimbólumokkal jelöltek lesznek, míg a kimenet az $aG_1 - bH_2$ lesz. Az átalakítás után ugyanezeket a bemeneteket és kimenetet kell kapnunk. Kiindulva ebből a tényből –

visszafelé következtetve a kimeneti jelből – könnyen beláthatjuk, hogy az átalakítás előtt a H_2 átviteli függvénnyel jellemzett tagot kell H_2/G_1 -re módosítani. A kapott rendszer a 4.7. ábrán látható.



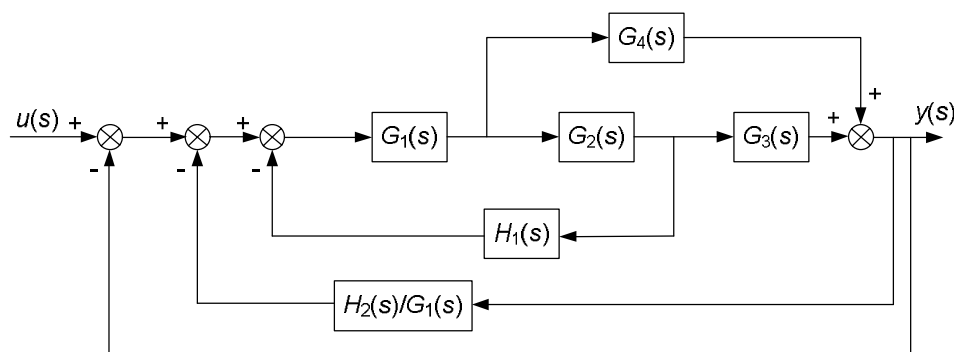
4.7. ábra. Az átalakítás első lépése után kapott rendszer

Következő lépésként cseréljük meg a második és harmadik összegzőt, ahogy ez a 4.8. ábrán látható.



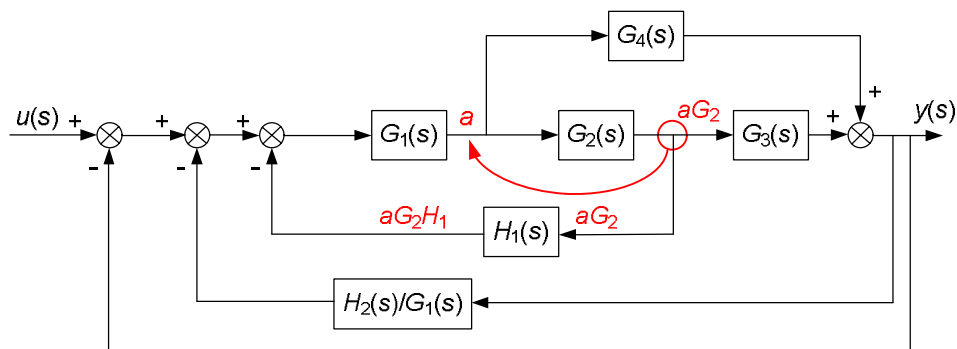
4.8. ábra Az átalakítás második lépése

Ez a lépés – az összegzők felcserélésére vonatkozó általános szabályoknak megfelelően – a többi tagot érintő különösebb átalakítás nélkül megtehető, az eredmény a 4.9. ábrán látható.



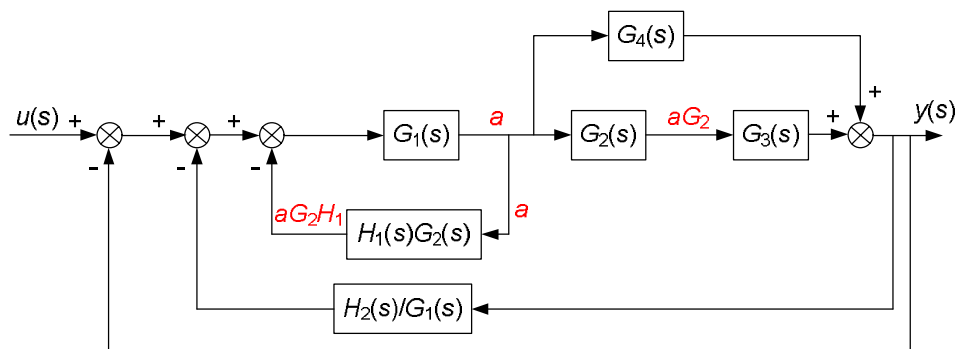
4.9. ábra. Az átalakítás második lépése után

Az átlapolások szétcsatolásának utolsó lépéseként bontuk szét a H_1 tagot tartalmazó legbelső visszacsatolást és a G_4 tagot tartalmazó előreccatolást. Ebben az esetben is szabadon megválasztható, hogy melyik elágazást helyezük át. Helyezzük át a visszacsatolás hatáspontját az előreccatolás hatáspontja elé, ahogy ez a 4.10. ábrán látható. Az átalakítandó tagcsoport bemenete az a jel, kimenetei pedig az aG_2 és az aG_2H_1 jelek.



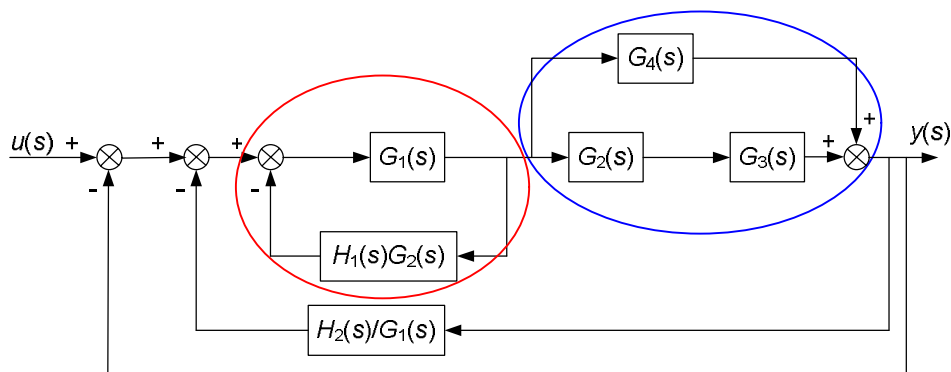
4.10. ábra. Az átalakítás harmadik lépése

A módosítandó átviteli függvényt ebben az esetben is a változatlan kimenetektől vezethetjük le. Könnyen belátható, hogy a visszacsatolásban lévő tag átviteli függvényét kell H_1G_2 -re módosítani, a 4.11. ábrának megfelelően.



4.11. ábra. Az átalakítás harmadik lépése után

Az így kapott hatásvázlat már nem tartalmaz átlapolásokat, így a visszacsatolásokra és az előreccatolásra alkalmazhatjuk az eredőjük meghatározására levezetett képleteket. Írjuk fel a legbelső visszacsatolás és az előreccatolás eredőjét (4.12. ábra).



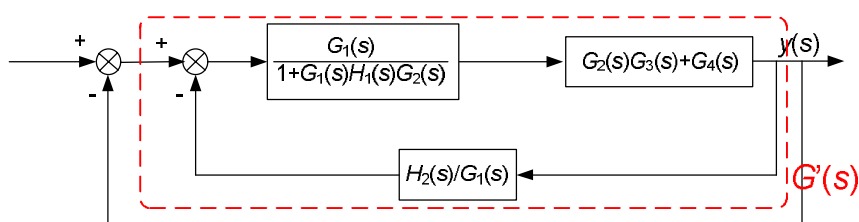
4.12. ábra. A belső visszacsatolás és az előreccsatolás eredményének meghatározása

A visszacsatolás eredménye:

$$G_v(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} .$$

Az előreccsatolás eredménye:

$$G_e(s) = G_2(s)G_3(s) + G_4(s) .$$



4.13. ábra. A belső visszacsatolás és az előreccsatolás eredménye

Az utolsó két lépés a két visszacsatolás eredményének meghatározása. Legyen $G'(s)$ a belső visszacsatolás eredménye (4.13. ábra):

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{\frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s))}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}}{1 + \frac{G_1(s)(G_2(s)G_3(s) + G_4(s))}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{G_1(s)}} = \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)} . \end{aligned}$$

A teljes rendszer eredő átviteli függvénye:

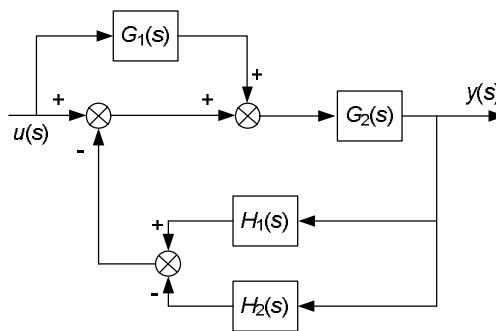
$$G_e(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)} =$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_2(s)}$$

Ha jól megfigyeljük az eredményül kapott átviteli függvényt, akkor „ellenőrizhetjük”, hogy jó eredményt kaptunk. A számlálóban az előremenő ágak eredője szerepel, míg a nevezőben az egyes előremenő ágak és visszatérő ágak eredő átviteli függvényeinek összegei.

2. példa

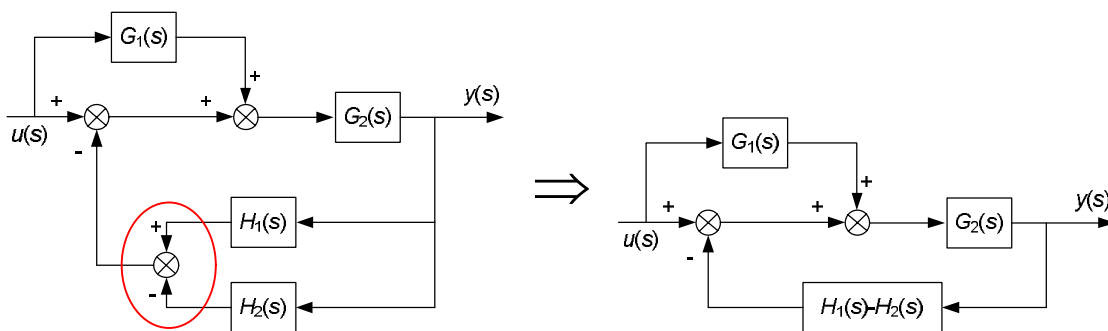
Határozzuk meg a 4.14. ábrán látható rendszer eredő átviteli függvényét!



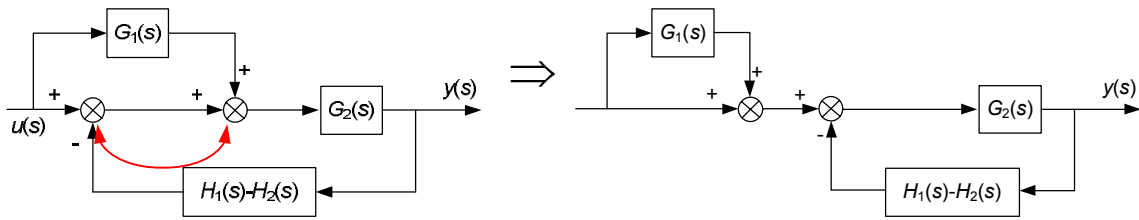
4.14. ábra. A 2. példa hatásvázlata

A megoldás menete

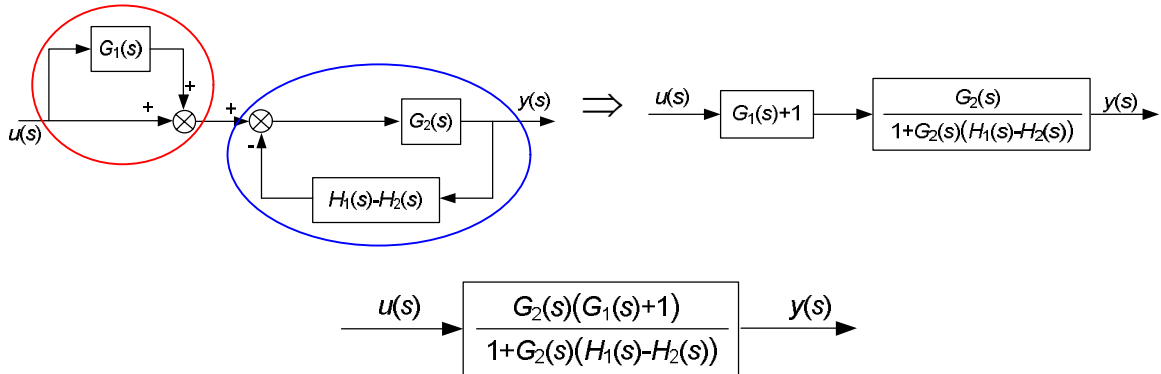
Első lépésként végezzük el a visszacsatolt ágbeli összegzést:



Majd cseréljük meg az összegzőket:

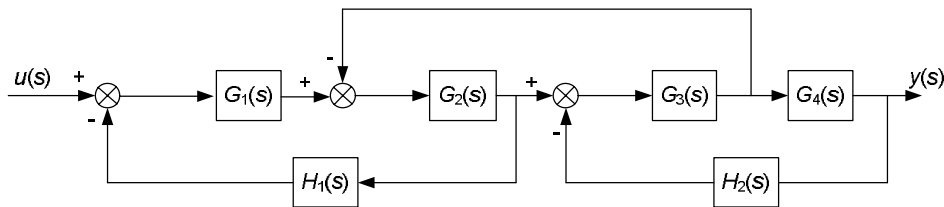


Így megszüntettük az előreccatolás és a visszacsatolás átlapolását, és felírhatjuk előbb ezek eredőjét, majd a teljes tagcsoport eredő átviteli függvényét:



3. példa

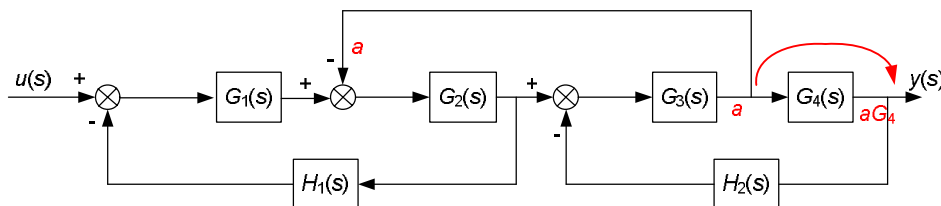
Határozzuk meg a 4.15. ábrán látható rendszer eredő átviteli függvényét!



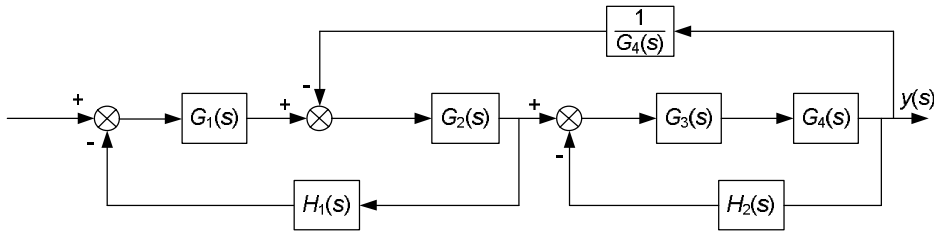
4.15. ábra. A 3. példa hatásvázlata

A megoldás menete

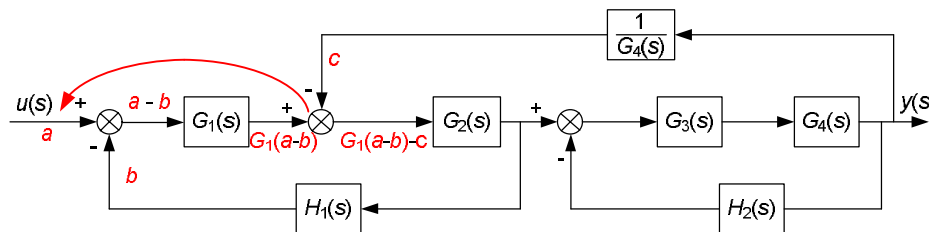
Első lépésként helyezük át a $G_3(s)$ jelű tag utáni visszacsatolás elágazását a legvégére:



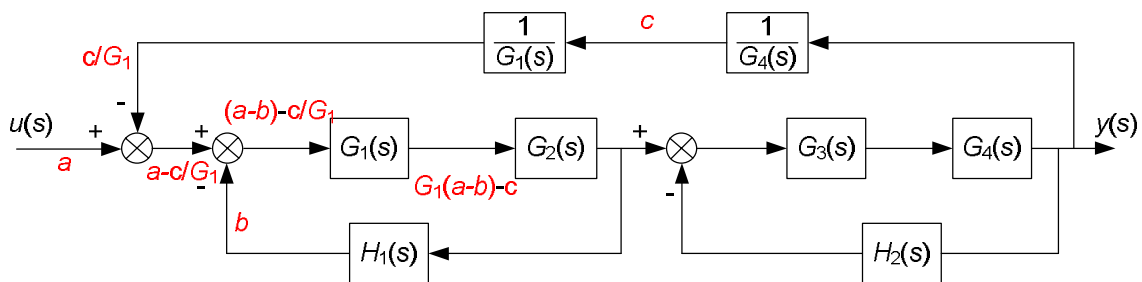
Mint látható, az áthelyezés hatására a visszacsatolás összegzéséhez érkező jel megváltozna, ezért a visszatérő ágba be kell tenni egy $1/G_4(s)$ jelformáló tagot:



Következő lépésként helyezzük át ugyanennek a visszacsatolásnak az összegzőjét a tagcsoport legelejére:



Kihhasználva azt, hogy az összegzők felcserélésének nincs hatása az eredő átviteli függvényre, csak a második összegzőnek $G_1(s)$ tag elé helyezését kell vizsgálni. Az átalakítással érintett tagcsoport-résznek három bemenete (legyenek ezek rendre a , b , és c jelek), és egy kimenete van, ami a levezetés eredményeként $G_1(a-b)-c$. Ennek kell változatlanul maradnia az átalakítás után is. A kimenetből visszafelé következtetve – a következő ábra segítségével – belátható, hogy ez akkor teljesül, ha a visszacsatolásba beépítünk egy $1/G_1(s)$ tagot.



Az így kapott tagcsoportban már nincsenek átlapolások, így az eredő átviteli függvény a következő lépések alapján felírható:

$$G_I(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)},$$

$$G_{II}(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s)},$$

$$G_e(s) = \frac{G_I(s)G_{II}(s)}{1 + G_I(s)G_{II}(s) \frac{1}{G_1(s)G_4(s)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \cdot \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s)}}{1 + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)} \cdot \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s)} \cdot \frac{1}{G_1(s)G_4(s)}} = \\
&= \frac{\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s))(1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s))}}{1 + \frac{G_2(s)G_3(s)}{(1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s))(1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s))}} = \\
&= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{(1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s))(1 + G_3(s)G_4(s)H_2(s)) + G_2(s)G_3(s)} = \\
&= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s)H_2(s) + G_2(s)G_3(s)}.
\end{aligned}$$

Ha összehasonlítjuk a kapott eredő átviteli függvényt a kiindulási ábrával, akkor a lehetséges visszacsatolásokat sorra vételével ellenőrizhető a levezetés helyessége.

5. Dinamikus tagok leírása

Kiindulva a bemenetek és a kimenetek közötti kapcsolatot leíró általános alakú bemenet – kimenet modellből, a legmagasabb deriválási fokszám alapján különböző tulajdonságú modelleket különböztethetünk meg. A modellek szimulációs vizsgálatokor általában különböző bemenetekre adott válaszaikat vizsgáljuk meg, ezekből következtetünk jellemző paramétereikre. Egyszerűbb modellek esetében azonban lehetőség van az analitikus megoldásra is, így lehetőség van a kísérleti eredmények előrejelzésére, illetve ellenőrzésére.

A következőkben áttekintjük a legfontosabb dinamikus tag-típusokat, majd számolási példákon keresztül mutatjuk be a paramétereik, illetve a válaszfüggvények meghatározásának menetét.

Az egyes tag-típusok vizsgálatához induljunk az általános bemenet – kimenet modell egyszerűsített formájából:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t).$$

A felírt modellnek megfelelően tételezzük fel, hogy a bemenő jel esetében nem kell figyelembe venni a deriváltakat. Ennek megfelelően a tag átviteli függvénye a következő lesz:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

A tagok, illetve a belőlük különböző kapcsolással kialakított tagcsoportok jellemzőinek vizsgálatára az egységimpulzust, az egységugrás és az egységsebesség-ugrás tesztjelet alkalmazzuk bemenetként, így a kimeneten kapott súlyfüggvény, átmeneti függvény és sebességugrás válaszfüggvény meghatározását és vizsgálatát végezzük el.

5.1. Nulladrendű tag

Ha a figyelembe vett legmagasabb derivált fokszáma nulla, akkor az eredeti modellünk az alábbi algebrai egyenletre egyszerűsödik:

$$a_0 y(t) = b_0 u(t).$$

Az így kapott tagot a legmagasabb deriválási fokszám alapján *nulladrendű*, tulajdonsága alapján *arányos* tagnak nevezzük. Tételezzük fel, hogy sem az a_0 , sem a b_0 együttható nem nulla. Ennek a triviális megkötésnek az oka az, hogy amennyiben a_0 nulla, akkor a rendszerből nem „jön ki” információ, míg ha b_0 nulla, akkor semmilyen bemenetnek nincs hatása a tagra. Laplace transzformálva és átrendezve a modellt, megkapjuk az átviteli függvényét:

$$a_0 Y(s) = b_0 U(s),$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0} .$$

Határozzuk meg a tag átmeneti függvényét, vagyis az egységugrás bemenetre adott választ:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \frac{b_0}{a_0} 1(t) .$$

A válaszfüggvény alapján, a kimeneten szintén ugrás jellegű jelet kapunk, aminek az amplitúdóját az átviteli függvényben szereplő hányados értéke határozza meg. Ezt a b_0/a_0 hányadost jelöljük továbbiakban K -val. Miután ez az érték megadja, hogy a tag a bemenetére kapott ugrásjelet hányszorosára változtatja meg, ezért ezt a paramétert *erősítésnek*, vagy *arányossági átviteli tényezőnek* nevezzük.

Egységimpulzus bemenetet alkalmazva, a kimeneten a tag súlyfüggvényét kapjuk meg:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \cdot 1 \Rightarrow y(t) = K\delta(t) .$$

A válaszfüggvény ebben az esetben is megőrzi a bemenő jel impulzus jellegét, csak a függvény alatti terület változik meg K értékének megfelelően.

Hasonló figyelhető meg a sebességugrásra adott válasz esetében is:

$$u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(t) = Kv(t) .$$

Az erősítés hatása itt a válaszfüggvény meredekségében jelentkezik.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a nulladrendű rendszerek változatlanul hagyják a bemenetükre érkező jel alakját, csak annak valamely jellemző paraméterét módosítják. A nulladrendű rendszereket egy paraméterrel, az erősítéssel (K) jellemezzük. Ilyen rendszerekre fizikai példaként a fogaskerék áttételeket, a szíj-, lánchajtást, vagy a potenciométereket említhetjük.

5.2. Elsőrendű tag

Legyen a következő eset az, amikor a kimeneti oldalon a legmagasabb deriválási fokszám egy. Ekkor a bemenet – kimenet modellünk a következő alakú lesz:

$$a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) , \quad y(t_0) = 0 .$$

A közönséges elsőrendű differenciálegyenlet modell alapján az így kapott rendszert *elsőrendű* tagnak, vagy a tulajdonságai alapján *arányos*, *egydőálló*s, illetve *arányos*, *egytárolós* tagnak nevezzük.

Tételezzük fel, hogy ebben az esetben sem lesz egyik együttható sem nulla. Ennek az a_1 és a b_0 esetében triviális oka van, az $a_0 = 0$ esetre később visszatérünk. Rendezzük az egyenletet a következő új változók bevezetésével:

$$\frac{a_1}{a_0} y^{(1)}(t) + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t), \quad \frac{a_1}{a_0} = \tau, \quad \frac{b_0}{a_0} = K,$$

$$\tau y^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t),$$

ebből az átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}.$$

A b_0/a_0 hányados helyett bevezetett K paraméter megfelel a nulladrendű rendszernél bevezetett erősítésnek, illetve arányossági tényezőnek. Ennek oka az, hogy ha ugrásszerűen megváltozott bemenet következtében a kimenet beáll egy új állandó értékre, akkor a jel változását leíró deriváló tag értéke nulla lesz. Így visszkapjuk a nulladrendű rendszereknél tárgyalt egyszerű algebrai egyenlet formájú modellt. A másik paraméter értelmezéséhez vizsgáljuk meg a tag átmeneti függvényét:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s},$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = K \left(1(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

A kapott válaszfüggvényből látható, hogy a kérdéses τ paraméter az exponenciális tag „eltűnésének” a gyorsaságát szabályozza, vagyis azt, hogy milyen gyorsan áll be a tag az erősítés által meghatározott végállapotra. Ennek alapján ezt a paramétert időállandónak nevezzük. Belátható, hogy minél nagyobb az időállandó értéke, a tag annál lassabban áll be az erősítés által meghatározott végértékre. Bár ez a beállítás formálisan a végtelenben következik be, de ha

$$t = \tau \Rightarrow y(t) = K \cdot 0.632,$$

$$t = 4\tau \Rightarrow y(t) = K \cdot 0.982,$$

tehát, az időállandónak megfelelő idő eltelte után a jel a végértékének 63,2%-át éri el, míg az időállandó négyszeresének megfelelő idő eltelte után a jel eltérése a végértékétől 2%-nál kisebb. Ez utóbbit, a legtöbb esetben már állandósult állapotnak tekinthetjük.

Egységimpulzust alkalmazva bemenetként, ebben az esetben is a tag súlyfüggvényét kapjuk meg:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot 1 \Rightarrow y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

A válaszfüggvényt elemezve látható, hogy a $t = 0$ időpontban egy K/τ mértékű ugrással indul a rendszer, majd a τ paraméter által meghatározott sebességgel visszaáll az eredeti értékére. Amennyiben az időállandó tervezési paraméter lehet, akkor adott rendszer esetében eldönthető, hogy melyik a rendszer működése szempontjából kedvezőbb eset:

- kis időállandó esetén gyors a visszaállítás, de nagyobb a kezdő időpontbeli elfutás;
- nagy időállandó esetén kisebb a kezdőidőponthoz tartozó ugrás, de lassabb a visszaállítás.

A sebességugrásra adott válasz levezetése:

$$u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(t) = K \left(v(t) - \tau 1(t) + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) .$$

A kapott válaszfüggvény alapvetően az erősítés által meghatározott meredekségű sebességugrás függvény lesz, melyet két tényező befolyásol. Az egységugrás jellegű tag hatása folyamatosan érvényesül, az exponenciális tag viszont körülbelül 4τ ideig befolyásolja a kimenet értékét. Legyen az erősítés értéke 1, és vezessünk be egy új változót a bemenő jel és a kimenő jel közötti különbségre:

$$K = 1, \quad e(t) = (u(t) - y(t)) .$$

Behelyettesítve a bemenő és kimenő jelet:

$$e(t) = v(t) - \left(v(t) - \tau 1(t) + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \tau 1(t) - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Ha

$$t = 0 \Rightarrow e(t) = 0 ,$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e(t) \rightarrow \tau ,$$

tehát a rendszer kimenete, az exponenciális tag hatásának megszűnése után, a bemenetet τ időnyi késleltetéssel követi.

Az általánosítás érdekében megjegyezzük, hogy az elsőrendű tagoknál az oksági szabály megengedi, hogy a bemeneti oldalon is figyelembe vegyük az első deriváltat. Az ilyen típusú tagok időtartománybeli modellje és átviteli függvénye a következő lesz:

$$a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u , \quad y(t_0) = 0 ,$$

$$G(s) = \frac{K(Ts + 1)}{\tau s + 1}, \quad \text{ahol } T = \frac{b_1}{b_0}$$

Ezeknél a tagoknál tehát a számlálóhoz is tartozik egy időállandó. Viselkedésük kissé más, mint az eddig tárgyalt elsőrendű tagoké. Jellemzésükre példa a kidolgozott feladatok között található.

Összefoglalva, az elsőrendű, arányos rendszereket két paraméterrel jellemezhetjük, az erősítéssel és az időállandóval. Az erősítésnek hasonló a szerepe, mint a nulladrendű rendszereknél, az időállandó pedig az állandósult állapot elérésének a gyorsaságát szabályozza. Fizikai példaként az RC-tagokat, vagy a hőközlés közvetlen hőátvitellel történő folyamatát lehet megemlíteni.

5.3. Integráló tagok

Az elsőrendű rendszerek vizsgálatánál feltételeztük, hogy a bemenet – kimenet modellben szereplő együtthatók közül egyik sem nulla. Legyen most a kimeneti oldalon a deriválás nélküli tag együtthatója, vagyis az a_0 értéke nulla. Ekkor a következő modellt kapjuk:

$$a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u(t) ,$$

melyet átrendezve

$$\frac{a_1}{b_0} y^{(1)}(t) = u(t) , \text{ vagy } y^{(1)}(t) = \frac{b_0}{a_1} u(t)$$

egyenletet kapjuk. Vizsgáljuk meg a szokásos tesztjelek segítségével, hogy mi a szerepe ebben az esetben az együtthatók hányadosaként megadott paraméternek. Ehhez adjuk meg először a tag átviteli függvényét:

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s}$$

Az átmeneti függvény:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{a_1 s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{a_1} \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(t) = \frac{b_0}{a_1} v(t) .$$

A levezetésnek megfelelően a tag kimenetén az egységugrás bemenet integrálja, vagyis a sebességugrás jel jelenik meg, és a b_0/a_1 hányados ennek meredekségét határozza meg. Ennek megfelelően e hányados jelölésére bevezetjük a K_I integrálási erősítés paramétert vagy ennek reciprokát, a T_I integrálási időállandót:

$$K_I = \frac{b_0}{a_1}, \quad T_I = \frac{a_1}{b_0}$$

így az átviteli függvényt a következő alakban adhatjuk meg:

$$G(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{T_I s}$$

Az integrálási időállandót ismétlési időállandónak is szokás nevezni, mivel ennyi idő eltelte után az átmeneti függvény értéke megegyezik az egységugrás bemenettel:

$$y(t) = \frac{1}{T_I} v(t), \quad t = T_I \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 .$$

Hasonló következtetést vonhatunk le a súlyfüggvény vizsgálata esetén:

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = 1 ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_I} 1(t) ,$$

tehát itt a paraméter a válaszként kapott ugrásfüggvény amplitúdóját határozza meg.

A sebességugrás bemenetre adott válasz:

$$u(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s^2} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_I} a(t) ,$$

pedig a bementnek az integrálja, vagyis gyorsulás függvény jellegű lesz.

Az integráló tagok tehát a bemenetükre érkező jelnek időkésleltetés nélküli integrálját adják ki a kimenetükön. Jellemző paraméterük az integrálási időállandó. Fizikai rendszerek esetében ilyen jellegű viselkedést mutatnak a folyadéktárolási rendszerek, ha a bemenő jel a belépő folyadék, a kimenő jel pedig a folyadék szintje a tartályban, illetve a tiszta kapacitív tagok.

5.4. Másodrendű tagok

Következő lépésként legyen a kimeneti oldalon a legnagyobb deriválási fokszám 2. Ekkor a bemenet – kimenet modell a következő lesz:

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y^{(1)}(t_0) = 0$$

Kiindulásként ebben az esetben is tételezzük fel, hogy az egyenlet egyik együtthatója sem nulla. Ennek az a_2 és b_0 együtthatók esetében triviális oka van, míg az a_1 és a_0 együtthatókra később visszatérünk.

Rendezzük az egyenletet a következő módon:

$$\frac{a_2}{a_0} y^{(2)}(t) + \frac{a_1}{a_0} y^{(1)}(t) + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t) .$$

A b_0/a_0 hányados már ismerős a nullad- és elsőrendű arányos tagok tárgyalásából, ez volt a tag erősítése, míg a a_1/a_0 hányados az elsőrendű tag esetében az időállandó tag szerepét töltötte be. Feltehető, hogy a második derivált előtt álló a_2/a_0 hányados is ilyen jellegű mennyiség lesz, így írjuk át az egyenletet ennek megfelelően:

$$T_2^2 y^{(2)}(t) + T_1 y^{(1)}(t) + y(t) = Ku(t) .$$

Ebből a következő átviteli függvényt kapjuk:

$$G(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} .$$

A gyakorlatban azonban a két időállandó helyett más paramétereket használnak a másodrendű tagok jellemzésére. Legyen

$$T = T_2 ,$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2} ,$$

vagyis a T_1, T_2 időállandók helyett alkalmazzuk a T időállandót és a ζ csillapítási tényezőt. A modern szabályozástechnikai szakirodalomban a T időállandó helyett gyakran annak reciprokát, az úgy nevezett természetes frekvenciát használják. Így az átviteli függvény a következő alakú lesz:

$$\omega_n = \frac{1}{T} ,$$

$$G(s) = \frac{K}{T_2 s^2 + 2\zeta T s + 1} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} .$$

A paraméterek szerepének a vizsgálatát ennél a tagnál is a különböző tesztjelekre adott válasza alapján vizsgáljuk. Elsőként nézzük meg az átmeneti függvényt:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} ,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} .$$

A megoldáshoz bontsuk fel a következő parciális tört alakra ezt a kifejezést:

$$Y(s) = K \left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right) ,$$

ahol p_1 és p_2 a másodrendű tag pólusai, vagyis a nevezőjének a gyökei, A_1 és A_2 a parciális törtté történő átalakítás során kapott együtthatók. A pólusok, a kiindulási bemenet/kimenet modell paramétereitől függően, – matematikai szempontból általánosítva – lehetnek pozitív vagy negatív valósak vagy nulla értékűek, illetve pozitív, negatív vagy nulla valós részű komplexek a karakterisztikus polinom gyökeinek a meghatározása alapján:

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 ,$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta \omega_n \pm \sqrt{(2\zeta \omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} .$$

Miután az ω_n , mint frekvencia jellegű mennyiség, csak pozitív értékű lehet, ezért a kifejezést a következő, egyszerűbb alakra írhatjuk át:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} .$$

Már most megjegyezzük, hogy természetesen az időállandók is csak pozitívak lehetnek, ennek megfelelően a belőlük származtatott csillapítási tényező is csak pozitív lehet a másodrendű rendszerek esetében. Annak érdekében azonban, hogy a másodrendű rendszerek viselkedéséből következtessünk a magasabb rendű tagok működésére, ettől a fizikai megkötéstől átmenetileg eltekintünk. Mindezek figyelembe vételével az átmeneti függvényre a következő általános alakot kapjuk:

$$y(t) = K(1(t) + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}) ,$$

ahol

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} , \quad A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} .$$

A kapott általános megoldás alapján vizsgáljuk meg a paraméterek hatását. Könnyen belátható, hogy ha a pólusok negatív valós értékűek, negatív valós részű konjugált komplex gyökpárt alkotnak, akkor tetszőlegesen nagy idő eltelte után a kimenet a K paraméter által meghatározott értékhez tart:

$$\forall p_i: \operatorname{Re}(p_i) < 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K .$$

Tehát az előzetes feltételezésünknek megfelelően, a b_0/a_0 hányados helyére bevezetett K paraméter a másodrendű arányos tagoknál is az erősítés szerepét tölti be.

Következő lépésként vizsgáljuk meg a csillapítási tényező szerepét. A vizsgálat során a korábbi megjegyzéseknek megfelelően a természetes frekvencia legyen tetszőleges pozitív mennyiség, míg a csillapítási tényező értékének meghatározása során tekintsünk el a fizikai megfontolásoktól. Legyen ζ értéke nagyobb, mint 1, ekkor az

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

eredményeként két negatív valós gyököt kapunk. Ekkor az általános megoldást a következő alakban írhatjuk fel:

$$y(t) = K \left(1(t) + A_1e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + A_2e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right) ,$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} , \quad A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} .$$

Vizsgáljuk meg, hogyan alakul az átmeneti függvény lefutása. A függvény a $t = 0$ időpontban a nulla értéket veszi fel:

$$t = 0 \Rightarrow y(t) = K(1(t) + A_1e^0 + A_2e^0) = 0$$

mivel $A_1 + A_2 = -1$. A $t \rightarrow \infty$ határértéket vizsgálva, a korábbiaknak megfelelően a tag az erősítése által meghatározott értékhez tart:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) = K(1(t) + A_1 e^{-\infty} + A_2 e^{-\infty}) = K .$$

Ha a csillapítási tényezőt minden határon túl növeljük, ami az eredeti rendszer szempontjából az első derivált időállandójának a második időállandóhoz viszonyított jelentős megnövekedését jelenti, akkor a következőt kapjuk:

$$\zeta \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) = K(1(t) + A_1 e^{-\infty} + A_2 e^0) = K ,$$

mert

$$\zeta \rightarrow \infty \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \rightarrow 0 .$$

Tehát a kimenet ebben az esetben is az erősítés által meghatározott értékhez tart, csak a beállási idő jelentősen megnövekedik a második exponenciális tag lassú eltűnése miatt.

Belátható, hogy az ilyen paraméterrel rendelkező tagok aszimptotikusan simulva állnak be az erősítés által meghatározott végértékhez, ezért ezeket túlcillapított tagoknak szokás nevezni.

Következő esetként legyen a csillapítási tényező értéke 1, vagy az első deriválthoz tartozó időállandó értéke legyen a második deriválthoz tartozónak kétszerese. Ekkor a következő eredményeket kapjuk:

$$\zeta = 1 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\omega_n .$$

A kétszeres gyökök következtében az átmeneti függvény

$$y(t) = K(1(t) - e^{-\omega_n t})$$

alakú lesz, melyről belátható, hogy lefutása nagyon hasonló lesz, mint az előző, $\zeta > 1$ vizsgálat esetében, de ebben az esetben kapjuk a leggyorsabb, aszimptotikusan simuló beállást. Az ilyen paraméterrel rendelkező tagot szokás kritikus csillapítású tagnak nevezni.

Ha a csillapítási tényező értékére igaz, hogy $\zeta \geq 1$, azaz a karakterisztikus polinomnak negatív valós gyökei vannak, akkor az átviteli függvény átírható a következő alakra:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A_1}{s - p_1} \cdot \frac{A_2}{s - p_2} ,$$

tehát az ilyen másodrendű tag két sorba kapcsolt elsőrendű arányos tag eredőjeként is felfogható.

Folytatva a megkezdett vizsgálatot, válasszuk most a csillapítási tényező értékét egynél kisebbre, tehát az első deriválthoz tartozó időállandó értéke legyen kisebb, mint a második deriválthoz tartozó időállandó kétszerese. Ekkor a karakterisztikus polinom megoldására negatív valósrésű komplex konjugált gyökpárt kapunk:

$$0 < \zeta < 1 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2},$$

és A_1 és A_2 értéke is komplex lesz az általános alaknak megfelelően. Az átmeneti függvényt ekkor a következő alakban kapjuk meg:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) \right), \quad \varphi = \cos^{-1}\zeta.$$

A megoldást elemezve láthatjuk, hogy a válaszban szinuszos lengés jelenik meg, aminek frekvenciáját és kezdőfázisát is befolyásolja a csillapítási tényező. A lengések amplitúdóját meghatározó törtkifejezés számlálója viszont az idő előrehaladtával exponenciálisan csökkenve tart nullához. A csökkenés gyorsaságát ebben az esetben is – adott természetes frekvencia mellett – a csillapítási tényező határozza meg. Így, ha ennek értéke 1-hez közeli, akkor a lengések gyorsan megszűnnek, és a kimenet beáll az erősítés által meghatározott végértékre, míg ha 0-hoz közeli, akkor ez a beállítás lényegesen lassabb. Az ilyen viselkedésű tagot alulcsillapított tagnak nevezzük.

A következő lépésként legyen a csillapítási tényező 0. Ez a fizikai rendszer esetében azt jelentené, hogy az első derivált együtthatójának, vagyis a deriválthoz tartozó időállandónak az értéke 0. Miután az ennek megfelelő viselkedés elképzelhető magasabb rendű rendszerek esetében, ezért vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi az ilyen rendszerek működését.

A pólusokra ekkor a következő megoldást kapjuk:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\omega_n,$$

azaz tisztán képzetes pólusokat kapunk. Így az átviteli függvény a következő alakban kapható meg:

$$y(t) = K(1(t) - e^{-j\omega_n t}) = K(1 - \cos\omega_n t),$$

tehát a kimeneten egy ω_n frekvenciájú lengés jelenik meg, melynek amplitúdóját az erősítés határozza meg. Ebből az esetből látható, hogy a természetes frekvencia az ekkor bekövetkező lengések frekvenciájából kapta a megnevezését. Értékét úgy határozhatjuk meg, ha szimuláció során ilyen körülményeket állítunk be. Az ilyen viselkedésű tagot a csillapítás határán lévő tagnak nevezzük.

Végül legyen a csillapítási tényező értéke negatív. Ez az eset a fizikai rendszerek körében már nem értelmezhető, mivel ez egyik vagy másik deriváló taghoz tartozó időállandó negatív értékét jelentené. Elvileg itt is megkülönböztethetünk a $\zeta > 0$ tartományhoz hasonló eseteket, de egyszerűsítésként itt ezeket összevonva tárgyaljuk. Ha a csillapítási tényező értéke 0 és -1 közé esik, akkor a pólusok értéke és az átmeneti függvény a következő lesz:

$$-1 < \zeta < 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \right), \quad \varphi = \cos^{-1}\zeta,$$

tehát pozitív valósrésű konjugált komplex gyökpárt jelentenek a pólusok, és a kimeneten megjelenő szinuszos lengések amplitúdója folyamatosan, elméletileg minden határon túl növekszik. Ha a csillapítási tényező értéke -1 vagy annál kisebb, akkor

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

$$y(t) = K \left(1(t) + A_1 e^{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + A_2 e^{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right),$$

tehát két, pozitív valós értékű a pólust kapunk, és az átmeneti függvény exponenciálisan növekedve a végtelenbe tart. Miután a két utóbbi esetben a kimenet értéke valamilyen formában a végtelenbe tart, ezért az ilyen viselkedésű tagot csillapítatlan tagnak nevezzük.

Ugyanezt a vizsgálatsorozatot elvégezhetjük a súlyfüggvény esetében is. Ekkor a következő eredményeket kapjuk. Kiindulásként az általános megoldás:

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1,$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} 1 = K \left(\frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} \right),$$

$$y(t) = K(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}), \quad C_1 = -C_2 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

ahol C_1 és C_2 a parciális törtté alakítás során meghatározott együtthatók.

Ha a csillapítási tényező értéke egynél nagyobb, akkor a súlyfüggvény

$$h(t) = K \left(C_1 e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + C_2 e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right)$$

alakú lesz. Miután a két együttható értéke egymásnak -1-szerese, így belátható, hogy a $t = 0$ időpontban a kimenet 0-ból indul ki, és ha $t \rightarrow \infty$ -be, akkor oda is áll vissza aszimptotikusan simulva. Részletesebb függvényanalízissel megállapítható, hogy a kezdeti időpont utáni elfutás mértéke, valamint a visszaállás ideje a csillapítási tényező értékétől függ a következő módon. Minél nagyobb a csillapítási tényező értéke, annál kisebb lesz az elfutás, de a tag annál lassabban áll vissza az eredeti értékére. Ha a csillapítási tényező értéke 1-hez tart, akkor gyors visszaállás mellett nagy kezdeti elfutást tapasztalhatunk. Amennyiben csillapítási tényezőt tervezési paraméternek lehet tekinteni, akkor a rendszer egyéb tulajdonságai alapján eldönthetjük, hogy melyik viselkedés kedvezőbb az irányított technológiai rendszer működése szempontjából.

Ha a csillapítási tényező értékét 0 és 1 között választjuk meg, akkor a súlyfüggvény lefutásában is megjelenik az átmeneti függvénytől tapasztalt szinuszos lengés:

$$0 < \zeta < 1, \quad h(t) = K \left(\frac{\omega_n e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right).$$

A lengések a súlyfüggvény esetében a kezdeti érték körül alakulnak ki, és a csillapítási tényező értékének függvényében gyorsabban, vagy lassabban csillapodnak az amplitúdót meghatározó exponenciális tag hatására.

A csillapítás határán, azaz $\zeta = 0$ esetén, a súlyfüggvényben is állandósult lengések alakulnak ki:

$$h(t) = K \omega_n \sin \omega_n t$$

A csillapítatlan tagok esetében pedig a pólusok komplex, vagy valós jellegének megfelelően az elfutás vagy periodikusan növekvő, vagy exponenciális jellegű lesz:

$$-1 < \zeta < 0 \quad h(t) = K \left(\frac{\omega_n e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right),$$

$$\zeta < -1 \quad h(t) = K \left(C_1 e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + C_2 e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right).$$

A sebességugrás bemenetre adott válasz általános alakja a következő lesz:

$$u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2},$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s^2} = K \left(\frac{B_1}{s^2} + \frac{B_2}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right),$$

ahol

$$B_1 = 1, \quad B_2 = -\frac{2\zeta}{\omega_n}, \quad A_1, A_2 = \frac{\zeta}{\omega_n} \pm \frac{2\zeta^2 - 1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$

Időtartományban a válaszfüggvény alakja következő lesz:

$$y(t) = K \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \right).$$

A válaszfüggvény analitikus alakjából és a sebességugrás bemenet jellegéből következtethetünk a függvény lefutására:

- Ha a pólusok negatív valósak, azaz a csillapítási tényező értéke 1, vagy annál nagyobb, akkor egy átmeneti exponenciális felfutás után a kimenet beáll az erősítés által meghatározott meredekségű sebességugrásra. Ha az erősítés értéke 1, akkor a kimenet $2\zeta/\omega_n$ időnyi késéssel követi a bemenetet.
- Ha pólusok negatív valósrésztű komplex értékek, azaz a csillapítási tényező értéke 0 és 1 közé esik, akkor az átmeneti szakaszban csillapodó szinuszos

lengések jelentkeznek. Ennek lecsengése után a kimenet az előző ponthoz hasonlóan követi az erősítés által meghatározott sebességugrást.

- Ha a pólusok nulla valós részű komplex gyökpárt alkotnak, azaz a csillapítási tényező értéke 0, akkor a kimenet folyamatosan leng egy, az erősítés által meghatározott meredekségű egyenes körül.
- Pozitív valós részű komplex gyökpár pólus, illetve pozitív valós pólus esetén, azaz ha a csillapítási tényező értéke negatív, akkor a kimenet növekvő amplitúdójú lengéssel, illetve exponenciális elfutással tart a végtelenbe.

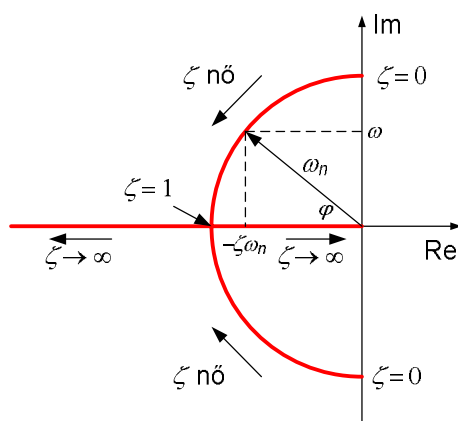
Összefoglalva a másodrendű arányos tagokat megállapíthatjuk, hogy amennyiben a kiindulási bemenet – kimenet modellben egyik együttható sem nulla, akkor ezeket a rendszereket három paraméterrel jellemezhetők: az erősítéssel (más néven arányossági átviteli tényezővel) (K), a csillapítási tényezővel (ζ) és a természetes frekvenciával (ω_n). A természetes frekvencia helyett lehet annak reciprokát, az időállandót (T) is használni. A különböző tesztlejekre adott válasz tranziens (átmeneti) részét a következő kifejezés határozza meg:

$$A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} ,$$

ahol p_1 és p_2 az átviteli függvény pólusai:

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} .$$

A válaszfüggvény átmeneti periódusának viselkedését alapvetően a csillapítási tényező határozza meg. Ha az értéke 1 vagy annál nagyobb, akkor a tranziens szakaszban az exponenciális tagok hatása aszimptotikusan csökkenve eltűnik, míg ha az értéke 0 és 1 közé esik, akkor a tranziens szakaszt csillapodó amplitúdójú lengések jellemzik. Fizikai rendszerek esetében nem értelmezhető, de szimulációval vizsgálható a csillapítás határán és a csillapítatlan tagnak a viselkedése. A pólusok helyének alakulása a csillapítási tényező függvényében ábrázolva 5.1. ábrán látható:



5.1. ábra. A pólusok helyének alakulása a csillapítási tényező függvényében

ahol az $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ a csillapított természetes frekvencia, és a $\varphi = \cos^{-1} \zeta$.

A tag paramétereit szimulációs úton úgy határozhatjuk meg, hogy a csillapítás határán lévő tag lengéseinek maximuma (A_{max}) és minimuma (A_{min}) közti különbség az erősítést, míg a lengések periódusidejéből (T_l) a természetes frekvenciát számoljuk ki:

$$K = \frac{1}{2}(A_{max} - A_{min}) \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_l}$$

Másodrendű arányos tagra példát a műszaki rendszerek széles körben szolgáltatnak. Így ilyen modellel jellemezhető a soros RLC kör, a rugóból és munkahengerből álló lengéscsillapító, a falon keresztüli hőátadás, csak néhányat említve.

5.5. Másodrendű modellek zérus együtthatóval

A másodrendű rendszerek tárgyalása során kiindulásként feltételeztük, hogy az

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y^{(1)}(t_0) = 0,$$

modell egyik együtthatója sem zérus. Ennek az a_2 és b_0 együtthatók esetében triviális oka van, viszont vizsgáljuk meg, hogy az a_1 és a_0 együttható esetében milyen hatása van a 0 értéknek.

Ha az a_1 együttható zérus, akkor a következő egyenletet, illetve átviteli függvényt kapjuk:

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_0}.$$

Mint látható, a kapott átviteli függvény megfelel a csillapítás határán levő tag átviteli függvényének, így annak viselkedését és jellemző tulajdonságait a másodrendű rendszerek általános bemutatásánál már tárgyaltuk.

Legyen következő esetként az a_0 együttható értéke nulla. Ekkor a következő modellt kapjuk:

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y^{(1)}(t_0) = 0.$$

Feltételezve, hogy a többi együttható nem nulla, írjuk fel az átviteli függvényt a következő új változók bevezetésével:

$$T_2^2 = \frac{a_2}{b_0}, \quad T_1 = \frac{a_1}{b_0}, \quad G(s) = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s}.$$

Alakítsuk át az átviteli függvényt a következő módon:

$$G(s) = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s} = \frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{1}{\frac{T_2^2}{T_1} s + 1} = \frac{1}{T_1 s} \cdot \frac{1}{T s + 1}, \quad T_l = T_1, \quad T = \frac{T_2^2}{T_1}$$

Mint látható, a tagot felbontottuk egy T_I időállandóval rendelkező integráló tag és egy T időállandójú elsőrendű arányos tag szorzatára, ami a két tag közötti soros kapcsolásnak felel meg.

Határozzuk meg a kapott átviteli függvény segítségével a tagcsoport jellemző válaszfüggvényeit. Az átmeneti függvény:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1} \right) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{T_I s^2} \cdot \frac{1}{Ts + 1} .$$

A kapott kifejezést visszatranszformálva

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \left(v(t) - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right) .$$

A válaszfüggvényben egyrészt jelentkezik az integráló hatás, hiszen az egységugrás bemenetre a kimeneten $1/T_I$ meredekségű sebességugrást kapunk, amit módosít az elsőrendű tag hatása.

A súlyfüggvény esetében hasonló következtetésre juthatunk:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1} \right) \cdot 1 = \frac{1}{T_I s} \cdot \frac{1}{Ts + 1} ,$$

$$h(t) = \frac{1}{T_I} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) ,$$

tehát az átmeneti függvényhez hasonlóan itt is megjelenik az integráló hatás az állandósult állapotban, melyet az elsőrendű, arányos összetevő az átmeneti szakaszban módosít. Hasonló megfigyelést végezhetünk el a sebességugrásra adott válaszfüggvény esetében is.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy ha csak deriváló tagok szerepelnek a másodrendű tag bemenet – kimenet modelljének baloldalán, akkor integráló jellegű viselkedést kapunk, melyet az elsőrendű arányos összetevő hatása módosít.

Speciális esetként vizsgáljuk meg, ha mind az a_0 , mind az a_1 együttható nulla. Ekkor a következő modellt kapjuk:

$$a_2 y^{(2)}(t) = b_0 u(t) , \quad y(t_0) = 0 , \quad y^{(1)}(t_0) = 0 .$$

A tag átviteli függvénye a következő alakú

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2} = \frac{1}{\frac{a_2}{b_0} s^2} = \frac{1}{T_I^2 s^2} .$$

A kapott alakból könnyen belátható, hogy ez a tag úgy viselkedik, mint két, egymásután sorosan kapcsolt, egyaránt T_I paraméterrel rendelkező integráló tag. Ennek megfelelően az átmeneti függvénye gyorsulás jellegű lesz, míg a súlyfüggvénye sebességugrás jellegű.

5.6. Magasabb rendű tagok

A három, vagy annál nagyobb deriválási fokszámmal rendelkező tagokat összevonva tárgyaljuk a következőkben. Induljunk ki az általános bemenet – kimenet modellből:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) ,$$

ahol

$$n \geq 3, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \dots = y(t_0) = 0 .$$

Tegyük fel, hogy az a_0 együttható biztosan nem zérus, és általában tételezzük ezt fel a többi együtthatóra is részben triviális okok miatt, részben pedig egyszerűsítésként. Ekkor a következő alakra írhatjuk át a rendszert:

$$\frac{a_n}{a_0} y^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_0} y^{(n-1)}(t) + \dots + \frac{a_1}{a_0} y^{(1)}(t) + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t) ,$$

mely egyenlet a másodrendű rendszerek esetében bevezetett időállandók általánosításával az alábbi lesz:

$$T_n y^{(n)}(t) + T_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + T_1 y^{(1)}(t) + y(t) = K u(t) .$$

Ebből az átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{K}{T_n s^n + T_{n-1} s^{n-1} + \dots + T_1 s + 1} .$$

Mint látható, az általános n -ed rendű tag karakterisztikus polinomja is n -ed rendű, így annak megoldása során n darab pólust kapunk, melyek lehetnek egyaránt valósak, illetve komplex konjugált gyökpárok. Ha meg tudjuk határozni a pólusokat, akkor könnyen belátható, hogy a pólusok jellegének függvényében a tag felbontható elsőrendű (valós pólusok) és másodrendű (komplex pólusok) tagok szorzatára. Ennek alapján az általánosított vizsgálatnál figyelembe vehetjük az első és másodrendű rendszerek bemutatásánál leírtakat.

A magasabb rendű tagok átmeneti függvénye a következő módon írható fel:

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} \right) ,$$

$$y(t) = K(1(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}) ,$$

ahol p_1, \dots, p_n a tag pólusai, A_1, \dots, A_n pedig a parciális törtté történő átalakításakor kapott együtthatók. A választ tehát két részre bonthatjuk fel:

$$y(t) = K + K \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} ,$$

ahol az első tag az állandósult állapotát adja meg a tagnak, a második kifejezés pedig az induló állapotból az állandósult állapotba átvezető szakasz viselkedését írja le. A

másodrendű rendszerek általánosított vizsgálatánál beláttuk, hogy az állandósult állapot csak akkor alakul ki, ha valamennyi pólusra igaz, hogy azok vagy negatív valós, vagy negatív valósrésztű komplex értékű számok. Ha ez teljesül az adott n -ed rendű rendszerre, akkor az átmeneti függvény vagy aszimptotikusan simulva (valamennyi gyök negatív valós), vagy csökkenő amplitúdójú lengésekkel (van a gyökök között negatív valós résztű komplex gyökpár) áll be az erősítés által meghatározott értékre. Ha a pólusok között van olyan, amelyik nullával egyenlő, akkor a tag viselkedése arra a másodrendű tag viselkedésére hasonlít, melynél csak a két deriváló tag szerepelt a kimeneti oldalon, vagyis az a_0 együttható értéke 0. Az ilyen tagokat, mint több tárolás integráló tagokat vizsgálhatjuk. Ha a pólusok között van nulla valósrésztű gyökpár, akkor a kimeneten egy állandó szinuszos jellegű lengés alakul ki, mint azt a zérus csillapítási tényezőjű másodrendű tagoknál láttuk. Végül, ha a pólusok között van pozitív valós vagy pozitív valós résztű gyökpár, akkor a tag a másodrendű rendszereknél leírt csillapítatlan kimenettel válaszol az egységugrás bemenetre.

Hasonló következtetésre jutunk a súlyfüggvény vizsgálata esetén is. A megfelelő összefüggések itt a következők:

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \left(\frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \right),$$

$$y(t) = K(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}).$$

A kapott válaszfüggvénynek megfelelően a súlyfüggvény is csak akkor áll vissza a kiindulási értékére, ha valamennyi pólus negatív valós vagy negatív valósrésztű komplex értékű szám. Az egyes esetek az átmeneti függvénynél leírt módon származtathatók a másodrendű rendszerek általánosításával.

5.7. Differenciáló tagok

A dinamikus tagok között különleges helyett foglalnak el azok tagok, ahol a kimenet tisztán a bemenet megváltozásától, vagyis deriváltjától függ. A legegyszerűbb ilyen tag a következő modellel jellemezhető:

$$a_0 y = b_1 u^{(1)}$$

A felírt modell nem felel meg az oksági szabálynak, tehát ilyen működésnek megfelelő fizikai rendszert nem lehet alkotni. A későbbi általánosításhoz vizsgáljuk meg ennek a tagnak a tulajdonságait.

Tételezzük fel, hogy egyik együttható sem nulla, és alakítsuk át a modellt a következő módon:

$$y = \frac{b_1}{a_0} u^{(1)} = T_D u^{(1)},$$

ahol a T_D paraméter a differenciálási időállandó. A tag átviteli függvénye:

$$G(s) = T_D s .$$

Az átmeneti függvény:

$$Y(s) = G(s)U(s) = T_D s \frac{1}{s} = T_D \quad \Rightarrow \quad y(t) = T_D \delta(t) ,$$

tehát a kimeneten a bemenet deriváltja, egy T_D területű impulzus jelenik meg. Ugyanezt a levezetést elvégezve a súlyfüggvény esetében is, a kimeneten a Dirac-impulzus deriváltját kapjuk, míg a sebességugrás esetében ugrásfüggvény jelenik meg.

Módosítsuk a differenciáló tag modelljét úgy, hogy az a gyakorlatban elvileg kivitelezhető legyen:

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_1 u^{(1)} .$$

Feltételezve itt is, hogy egyik együttható sem nulla, alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{a_1}{a_0} y^{(1)} + y = \frac{b_1}{a_0} u^{(1)} ,$$

$$T y^{(1)} + y = T_D u^{(1)} .$$

Az átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} ,$$

vagyis a tag egy tiszta differenciáló és egy elsőrendű arányos tag eredőjeként fogható fel.

Az átmeneti függvény segítségével vizsgáljuk meg a tag működését:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} \frac{1}{s} = \frac{T_D}{T_1 s + 1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} .$$

Mint látható, a $t = 0$ időpontban van egy impulzusszerű elfutást tapasztalunk, majd a tag visszaáll a kiindulási értékre. Ha a T_1 paraméter értékét elegendően kicsinek választjuk, akkor a tag viselkedése jó közelítéssel emlékeztet a tiszta differenciáló tag működésére, hiszen a kezdő időpontbeli elfutás nagy, a lecsengés pedig gyors lesz.

A súlyfüggvény esetében a következő összefüggéseket kapjuk:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{T_D s}{T_1 s + 1} 1 = \frac{T_D}{T_1} - \frac{T_D}{T_1} \frac{1}{T_1 s + 1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{T_D}{T_1} \delta(t) - \frac{T_D}{T_1^2} e^{-\frac{t}{T_1}} ,$$

tehát a $t = 0$ időpontban az impulzus tag miatt van egy pozitív irányú elfutás, amit közvetlenül utána az exponenciális tag negatív előjele miatt egy ellenkező irányú elfutás követ, így közelítve az egységimpulzus deriváltját.

5.8. Feladatok dinamikus tagok vizsgálatának témaköréből

1. Elsőrendű tag átmeneti függvénye

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag átmeneti függvényét!

$$6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 4u(t) .$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{4}{6s+2} = \frac{2}{3s+1}$$

Paraméterek: erősítés $K = 2$, időállandó $\tau = 3s$

$$\text{Bemenő jel: } u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Kimenet meghatározása az operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s(3s+1)}$$

Kimenet meghatározása az időtartományban:

$$Y(s) = \frac{2}{s(3s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{3s+1}$$

$$2 = A(3s+1) + Bs \Rightarrow A = 2, B = -6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{6}{3s+1} = 2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{3}} \right)$$

$$y(t) = 2 \left(1(t) - e^{-\frac{t}{3}} \right)$$

Az átmeneti függvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 \quad y(0) = 1 - 1 = 0$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = 2(1 - 0) = 2 \quad (= K)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2 \left(\frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) \Rightarrow \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 2 \cdot \frac{1}{3} \quad \left(= K \frac{1}{\tau} \right)$$

2. Elsőrendű tag átmeneti függvénye, ha bemenő jelnek a deriváltja is szerepel

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag átmeneti függvényét!

$$6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2u^{(1)}(t) + 4u(t)$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{2s+4}{6s+2} = \frac{s+2}{3s+1}$$

Paraméterek: erősítés $K = 2$, időállandó $\tau = 3s$, számlálóbéli időállandó: $T_{sz} = 0,5s$

$$\text{Bemenő jel: } u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Kimenet meghatározása az operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{3s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+2}{s(3s+1)}$$

Kimenet meghatározása az időtartományban:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(3s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{3s+1}$$

$$s+2 = A(3s+1) + Bs \Rightarrow A = 2, B = -5$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{5}{3s+1} = 2 \left(\frac{1}{s} - \frac{5}{6s + \frac{1}{3}} \right)$$

$$y(t) = 2 \left(1(t) - \frac{5}{6} e^{-\frac{t}{3}} \right)$$

Az átmeneti függvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 \quad y(0) = 2 \left(1 - \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad K \frac{T_{sz}}{\tau}$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = 2(1 - 0) = 2 \quad (= K)$$

3. Visszacsatolt elsőrendű tag átmeneti függvénye

Legyen az elsőrendű tag átviteli függvénye: $G(s) = \frac{1}{s+1}$. Csatlolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg a visszacsatolt rendszer átmeneti függvényét!

A megoldás menete:

A tag paraméterek: erősítés $K = 1$, időállandó $\tau = 1s$

A visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

A visszacsatolt rendszer paraméterei: $G_e(s) = \frac{0,5}{0,5s+1}$ $K_e = 0,5$ $\tau_e = 0,5$

Átmeneti függvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{0,5}{0,5s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{0,5}{s(0,5s + 1)}$$

$$y(t) = 0,5 \left(1(t) - e^{-\frac{t}{0,5}} \right) = 0,5(1(t) - e^{-2t})$$

4. Párhuzamosan csatolt elsőrendű tagok átmeneti függvénye

Legyen adott két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvénnyel

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s + 1}.$$

Csatolja párhuzamosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport bemenet – kimenet modelljét és átmeneti függvényét!

A megoldás menete:

A párhuzamosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{4s + 1} = \frac{6s + 3}{4s^2 + 5s + 1}$$

A tagcsoport eredő bemenet – kimenet modellje:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6s + 3}{4s^2 + 5s + 1},$$

$$4s^2 Y(s) + 5s Y(s) + Y(s) = 6s U(s) + 3U(s),$$

$$4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + y(t) = 6u^{(1)}(t) + 3u(t).$$

A párhuzamosan csatolt elsőrendű rendszerek eredőjeként tehát olyan másodrendű rendszer alakul ki, melynek a számlálójában elsőfokú polinom szerepel. A visszacsatolt rendszer paraméterei: $G_e(s) = \frac{3(2s+1)}{4s^2+5s+1}$ $K_e = 3$, $T_e = 2$, $\zeta = 1,25$, $T_{sz} = 2$

(A másodrendű rendszerek paramétereinek értelmezése az azokat bemutató fejezetben található.)

Átmeneti függvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{6s + 3}{4s^2 + 5s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{6s + 3}{s(4s^2 + 5s + 1)}$$

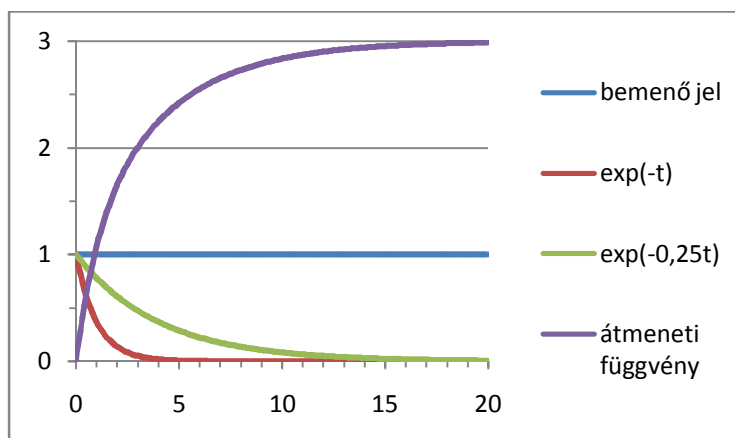
$$Y(s) = \frac{6s + 3}{s(4s + 1)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{4s + 1}$$

$$A = \left. \frac{6s + 3}{(4s + 1)(s + 1)} \right|_{s=0} = 3 \quad B = \left. \frac{6s + 3}{s(4s + 1)} \right|_{s=-1} = -1 \quad C = \left. \frac{6s + 3}{s(s + 1)} \right|_{s=-0,25} = -8$$

$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{-1}{s + 1} + \frac{-8}{4s + 1} = 3 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3s + 1} - \frac{2}{3s + 0,25} \right)$$

$$y(t) = 3 \left(1(t) - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-0,25t} \right) = 3 - e^{-t} - 2e^{-0,25t} \quad t \geq 0$$

Az átmeneti függvény diagramja:



5. Sorosan csatolt elsőrendű tagok átmeneti függvénye

Legyen adott két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvénnyel:

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s + 1}.$$

Csatolja sorosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport bemenet – kimenet modelljét és átmeneti függvényét!

A megoldás menete:

A sorosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{2}{4s + 1} = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1}$$

A sorosan csatolt elsőrendű rendszerek eredőjeként tehát olyan másodrendű rendszer alakul ki, melynek a számlálójában nulladfokú polinom, azaz konstans szerepel.

A tagcsoport eredő bemenet – kimenet modellje:

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1},$$

$$4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + y(t) = 2u(t).$$

A visszacsatolt rendszer paraméterei: $K_e = 2$, $T_e = 2$, $\zeta = 1,25$.

(A másodrendű rendszerek paramétereinek értelmezése az azokat bemutató fejezetben található.)

Átmeneti függvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s(4s^2 + 5s + 1)}$$

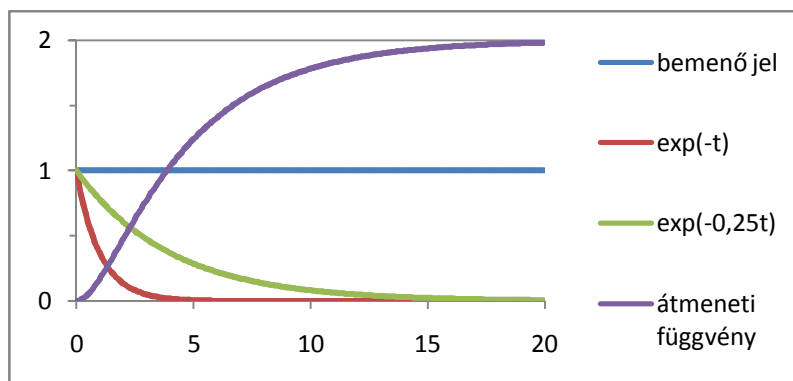
$$Y(s) = \frac{0,5}{s(s + 0,25)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 0,25}$$

$$A = \frac{0,5}{(s + 0,25)(s + 1)} \Big|_{s=0} = 2 \quad B = \frac{0,5}{s(s + 0,25)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{3} \quad C = \frac{0,5}{s(s + 1)} \Big|_{s=-0,25} = -2\frac{2}{3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s + 1} + \frac{-2\frac{2}{3}}{s + 0,25} = 2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} - \frac{4}{3} \frac{1}{s + 0,25} \right)$$

$$y(t) = 2 \left(1(t) + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-0,25t} \right) = 2 + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{8}{3} e^{-0,25t} \quad t \geq 0$$

Az átmeneti függvény diagramja:



6. Elsőrendű tag súlyfüggvénye

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag átmeneti függvényét!

$$6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 4u(t)$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{4}{6s+2} = \frac{2}{3s+1}$$

Paraméterek: erősítés $K = 2$, időállandó $\tau = 3s$

Bemenő jel: $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

Kimenet meghatározása operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot 1 = \frac{2}{3} \frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

Kimenet meghatározása időtartományban:

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{3}}$$

A súlyfüggvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 : \quad y(0) = \frac{2}{3} e^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(= \frac{K}{\tau} \right)$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = \frac{2}{3} e^{-\infty} = 0$$

7. *Elsőrendű tag súlyfüggvénye, ha a bemenő jelnek a deriváltja is szerepel*

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag átmeneti függvényét!

$$6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2u^{(1)}(t) + 4u(t)$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{2s+4}{6s+2} = \frac{s+2}{3s+1}$$

Paraméterek: erősítés $K = 2$, időállandó $\tau = 3s$, számlálóbeli időállandó: $T_{sz} = 1s$

Bemenő jel: $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

Kimenet meghatározása operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{3s+1} \cdot 1 = \frac{s+2}{3s+1}$$

Kimenet meghatározása időtartományban:

$$Y(s) = \frac{s+2}{3s+1} = \frac{\frac{1}{3}(3s+1)}{3s+1} + \frac{\frac{5}{3}}{3s+1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} \delta(t) + \frac{5}{6} e^{-\frac{t}{3}}$$

Az átmeneti függvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 \quad y(0) \Rightarrow \infty$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = 0$$

8. *Visszacsatolt elsőrendű tag súlyfüggvénye*

Legyen első rendű tag átviteli függvénye: $G(s) = \frac{1}{s+1}$. Csatolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg a visszacsatolt rendszer súlyfüggvényét!

A megoldás menete:

A tag átviteli függvénye: $G(s) = \frac{1}{s+1}$

Paraméterek: erősítés $K = 1$, időállandó $\tau = 1$ s

A visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

A visszacsatolt rendszer paraméterei: $G_e(s) = \frac{0,5}{0,5s+1}$ $K_e = 0,5$ $\tau_e = 0,5$

Átmeneti függvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{0,5}{0,5s+1} \cdot 1 = \frac{1}{s+0,5}$$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{0,5}}$$

9. *Párhuzamosan csatolt elsőrendű tagok súlyfüggvénye*

Legyen $G_1(s)$ és $G_2(s)$ két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvényekkel

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Csatolja párhuzamosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport súlyfüggvényét!

A megoldás menete:

Az első tag átviteli függvénye: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $K = 1, \tau = 1$

A második tag átviteli függvénye: $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$ $K = 2, \tau = 4$

A párhuzamosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{4s+1} = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1}$$

$$K_e = 3, \quad T_e = 2, \quad \zeta = 1,25, \quad T_{sz} = 6$$

Súlyfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1} \cdot 1$$

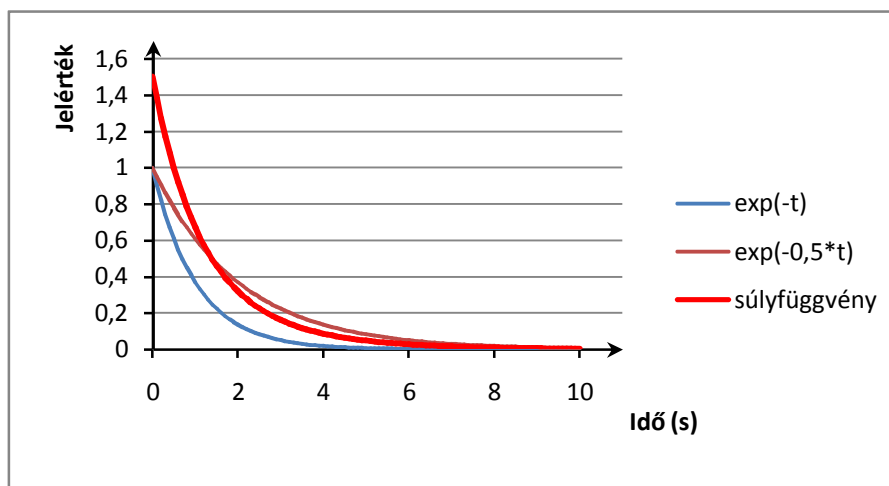
$$Y(s) = \frac{6s + 3}{(4s + 1)(s + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{4s + 1}$$

$$A = \frac{6s + 3}{4s + 1} \Big|_{s=-1} = 1 \quad B = \frac{6s + 3}{s + 1} \Big|_{s=-0,25} = 2$$

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} + 0,5 \frac{1}{s + 0,25}$$

$$y(t) = e^{-t} - 0,5e^{-0,25t} \quad t \geq 0$$

A súlyfüggvény diagramja:



10. Sorosan csatolt elsőrendű tagok súlyfüggvénye

Legyen $G_1(s)$ és $G_2(s)$ két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvénnyel

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s + 1}$$

Csatolja sorosan a két tagot és adja meg a kapott tagcsoport súlyfüggvényét!

A megoldás menete:

Az első tag átviteli függvénye: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $K_1 = 1, \tau_1 = 1$

A második tag átviteli függvénye: $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$ $K_2 = 2, \tau_2 = 4$

A sorosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{2}{4s + 1} = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1}$$

$$K_e = 2, \quad T_e = 2, \quad \zeta = 1,25$$

Súlyfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1} \cdot 1$$

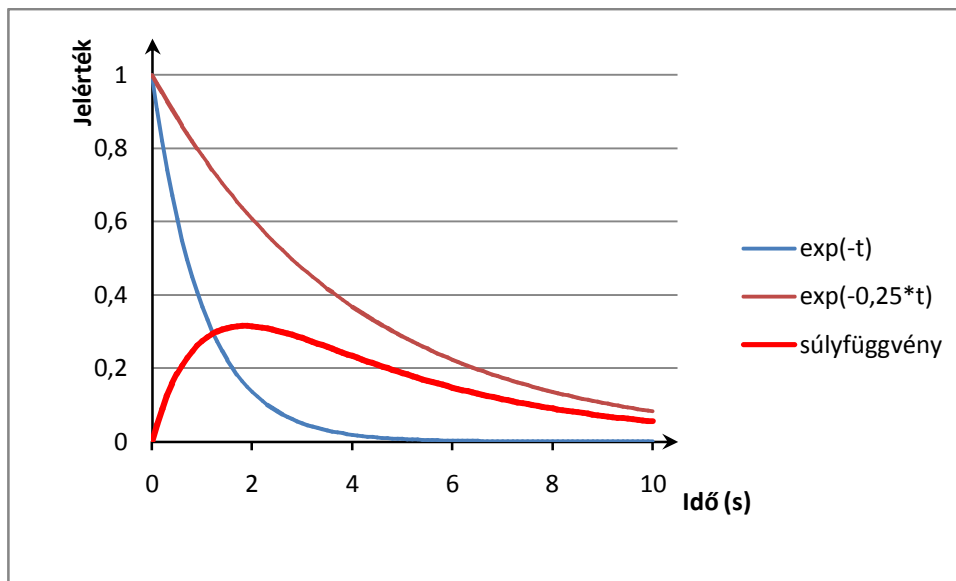
$$Y(s) = \frac{0,5}{(s + 0,25)(s + 1)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 0,25}$$

$$A = \frac{0,5}{s + 0,25} \Big|_{s=-1} = -\frac{2}{3} \quad B = \frac{0,5}{s(s + 0,25)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

$$Y(s) = \frac{-\frac{2}{3}}{s + 1} + \frac{\frac{2}{3}}{s + 0,25}$$

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-0,25t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

A súlyfüggvény diagramja:



11. Elsőrendű tag sebességugrás válaszfüggvénye

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag sebességugrás válaszfüggvényét!

$$\text{I/O modell: } 6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 4u(t)$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{4}{6s+2} = \frac{2}{3s+1} \quad K = 2, \tau = 3s$$

$$\text{Bemenő jel: } u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Kimenet meghatározása operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{3s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{3s^3 + s^2}$$

Kimenet meghatározása időtartományban:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(3s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{3s+1}$$

$$A = \frac{2}{3s+1} \Big|_{s=0} = 2 \quad C = \frac{2}{s^2} \Big|_{s=-\frac{1}{3}} = 18$$

$$2 = 2(3s+1) + Bs(3s+1) + 18s^2 \Rightarrow B = -6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{6}{s} + 18 \frac{1}{3s+1} = 2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} + 3 \frac{1}{s+\frac{1}{3}} \right)$$

$$y(t) = 2 \left(v(t) - 3 \cdot 1(t) + 3e^{-\frac{t}{3}} \right) = 2t - 6 + 6e^{-\frac{t}{3}} \quad t \geq 0$$

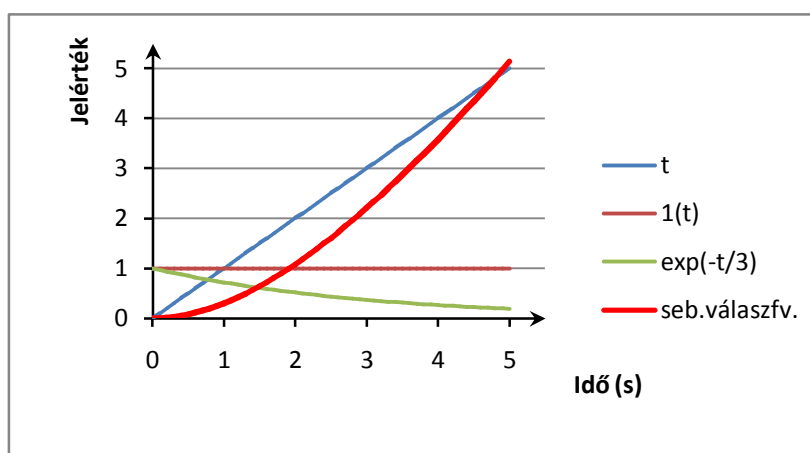
A sebességugrás válaszfüggvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 \quad y(0) = 0 - 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 0$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = 2(\infty - 3 + 0) \Rightarrow \infty$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2 \left(1 - 0 - e^{-\frac{t}{3}} \right) \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=10(t \gg \tau)} = 2 \quad (= K)$$



12. Elsőrendű tag sebességugrás válaszfüggvénye, ha a bemenő jelnek a deriváltja is szerepel

Határozza meg az alábbi bemenet – kimenet modellel jellemzett tag sebességugrás válaszfüggvényét!

$$\text{I/O modell: } 6y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2u^{(1)}(t) + 4u(t)$$

A megoldás menete:

$$\text{Átviteli függvény: } G(s) = \frac{2s+4}{6s+2} = \frac{s+2}{3s+1} \quad K = 2, \tau = 3s, T_{sz} = 1s$$

$$\text{Bemenő jel: } u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

Kimenet meghatározása operátor tartományban:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+2}{3s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s+2}{3s^3+s^2}$$

Kimenet meghatározása időtartományban:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2(3s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{3s+1}$$

$$A = \left. \frac{s+2}{3s+1} \right|_{s=0} = 2 \quad C = \left. \frac{s+2}{s^2} \right|_{s=-\frac{1}{3}} = 15$$

$$s+2 = 2(3s+1) + Bs(3s+1) + 15s^2 \Rightarrow B = -5$$

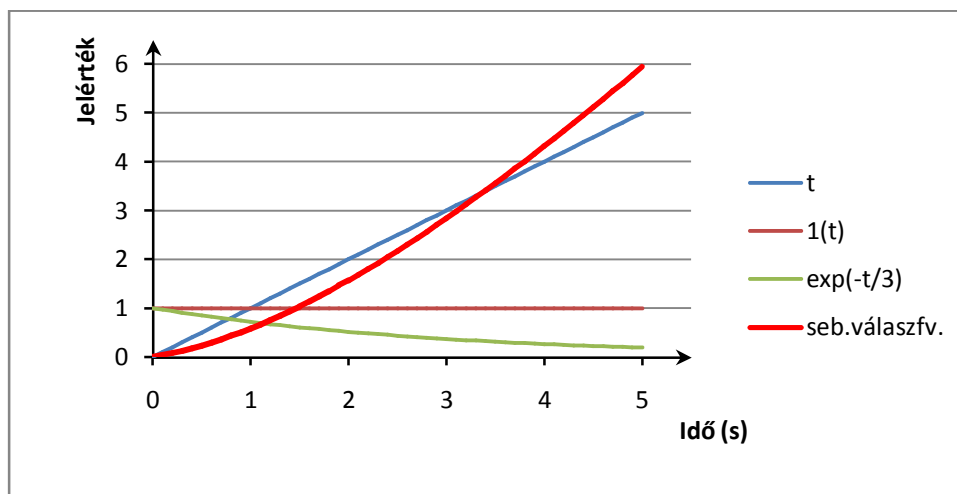
$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{5}{s} + \frac{15}{3s+1} = 2\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s+\frac{1}{3}}$$

$$y(t) = 2v(t) - 5 \cdot 1(t) + 5e^{-\frac{t}{3}} = 2t - 5 + 5e^{-\frac{t}{3}}, \quad t \geq 0.$$

A sebességugrás válaszfüggvény viselkedésének vizsgálata:

$$t = 0 \quad y(0) = 0 - 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 0,$$

$$t \rightarrow \infty \quad y(\infty) = 2(\infty - 2,5 + 0) \Rightarrow \infty.$$



13. Visszacsatolt elsőrendű tag sebességugrás válaszfüggvénye

Legyen első rendű tag átviteli függvénye: $G(s) = \frac{1}{s+1}$. Csatolja vissza negatívan a tagot, és határozza meg a visszacsatolt rendszer átmeneti függvényét!

A megoldás menete:

A tag átviteli függvénye: $G(s) = \frac{1}{s+1}$ $K = 1, \tau = 1s$

A visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

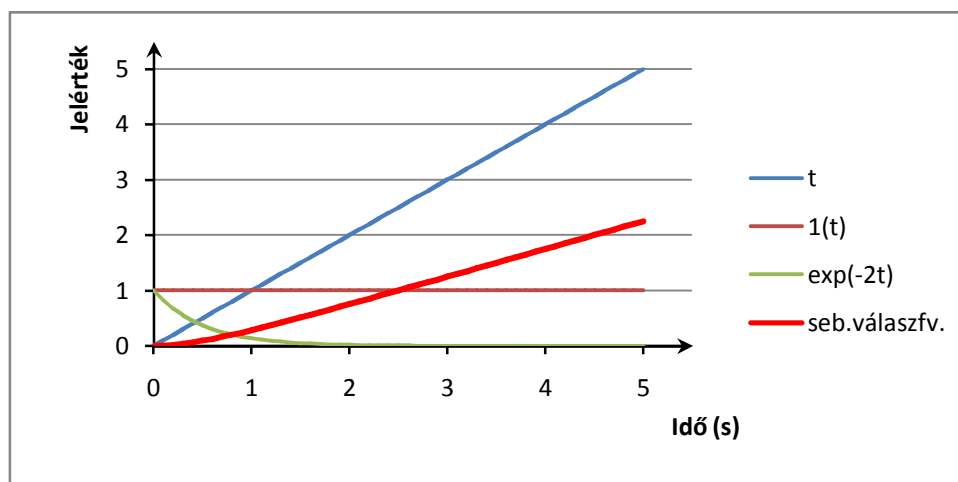
$$G_e(s) = \frac{1}{s+2} \quad K_e = 0,5 \quad \tau_e = 0,5$$

Sebességugrás válaszfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3 + 2s^2}$$

$$Y(s) = \frac{0,5}{s^2} - \frac{0,25}{s} + \frac{0,25}{s+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = 0,5v(t) - 0,25 \cdot 1(t) + 0,25e^{-2t} = 0,5t - 0,25 + 0,25e^{-2t} \quad t \geq 0$$



14. Párhuzamosan csatolt elsőrendű tagok sebességugrás válaszfüggvénye

Legyen adott két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvényekkel

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Csatolja párhuzamosan a két tagot, és adja meg a kapott tagcsoport sebességugrás válaszfüggvényét!

A megoldás menete:

Az első tag átviteli függvénye: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $K = 1, \tau = 1$

A második tag átviteli függvénye: $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$ $K = 2, \tau = 4$

A párhuzamosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{4s+1} = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1}$$

$$K_e = 3, \quad T_e = 2, \quad \zeta = 1,25, \quad T_{sz} = 6$$

Sebességugrás válaszfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{6s+3}{4s^2+5s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{6s+3}{4s^4+5s^3+s^2}$$

$$Y(s) = \frac{6s+3}{s^2(4s+1)(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{4s+1}$$

$$A = \left. \frac{6s+3}{(4s+1)(s+1)} \right|_{s=0} = 3 \quad C = \left. \frac{6s+3}{s^2(4s+1)} \right|_{s=-1} = 1 \quad D = \left. \frac{6s+3}{s^2(s+1)} \right|_{s=-0,25} = 32$$

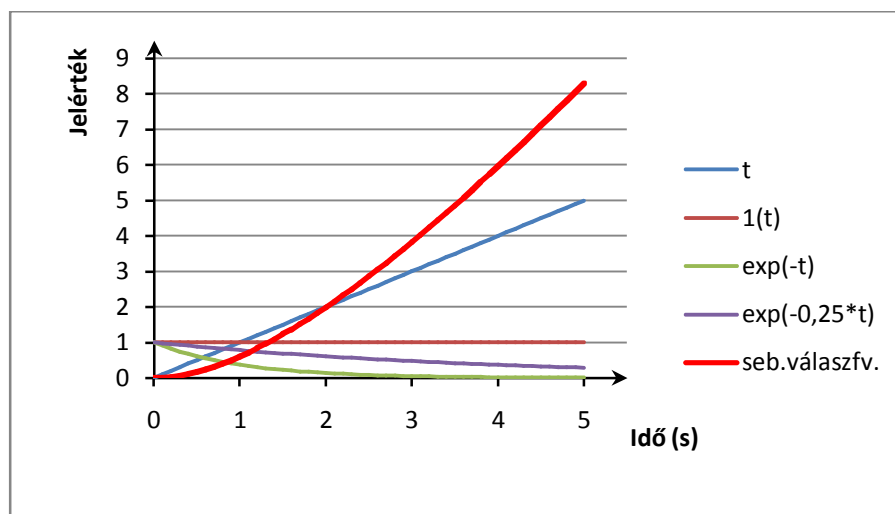
$$6s+3 = 3(s+1)(4s+1) + Bs(s+1)(4s+1) + s^2(s+1)(4s+1) + 32s^2(s+1)(4s+1)$$

$$\Rightarrow B = -9$$

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{9}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{32}{4s+1}$$

$$y(t) = 3v(t) - 9 \cdot 1(t) + e^{-t} + 8e^{-0,25t} = 3t - 9 + e^{-t} + 8e^{-0,25t}, \quad t \geq 0.$$

A sebességugrás válaszfüggvény diagramja:



15. Sorosan csatolt elsőrendű tagok sebességugrás válaszfüggvénye

Legyen adott két elsőrendű tag az alábbi átviteli függvénnyel

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}.$$

Csatolja sorosan a két tagot, és adja meg a kapott tagcsoport sebességugrás válaszfüggvényét!

A megoldás menete:

Az első tag átviteli függvénye: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ $K_1 = 1, \tau_1 = 1$

A második tag átviteli függvénye: $G_2(s) = \frac{2}{4s+1}$ $K_2 = 2, \tau_2 = 4$

A sorosan csatolt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{4s+1} = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1}$$

Sebességugrás válaszfüggvény:

$$Y(s) = G_e(s)U(s) = \frac{2}{4s^2 + 5s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^2(4s^2 + 5s + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(4s+1)(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{4s+1}$$

$$A = \frac{2}{(4s+1)(s+1)} \Big|_{s=0} = 2 \quad C = \frac{2}{s^2(4s+1)} \Big|_{s=-1} = -\frac{2}{3} \quad D = \frac{2}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-0,25} = 42\frac{2}{3}$$

$$2 = 2(s+1)(4s+1) + Bs(s+1)(4s+1) - \frac{2}{3}s^2(s+1)(4s+1) + 42\frac{2}{3}s^2(s+1)(4s+1)$$

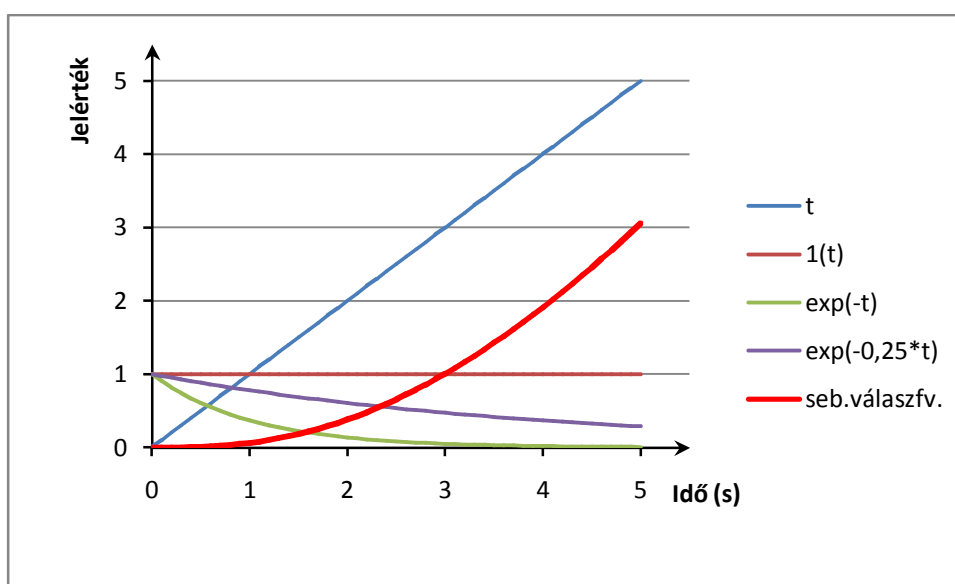
$$\Rightarrow B = -10$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{10}{s} - \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{42\frac{2}{3}}{4s+1}$$

$$y(t) = 2v(t) - 10 \cdot 1(t) - \frac{2}{3}e^{-t} + 10\frac{2}{3}e^{-0,25t} =$$

$$= 2t - 10 - \frac{2}{3}e^{-t} + 10\frac{2}{3}e^{-0,25t}, \quad t \geq 0$$

A sebességugrás válaszfüggvény diagramja:



6. Stabilitásvizsgálat

Az irányítástechnikai rendszerek működésének egyik legfontosabb kritériuma a stabilitás. Bár a stabilitást, mint fogalmat a hétköznapi életben is használjuk, de a műszaki szempontból történő vizsgálatához célszerű pontos definíciókat megfogalmazni a pontos értelmezéshez és az ezeken alapuló vizsgálatok elvégzéséhez. A következőkben – maradva a bemenet-kimenet modellek vizsgálatánál – először a folytonos idejű rendszerekre vonatkozó legfontosabb stabilitás definíciókat adjuk meg, majd a stabilitás elvi értelmezésével és a vizsgálatára vonatkozó legfontosabb módszerekkel foglalkozunk. A fejezet végén itt is példákkal segítjük a feladatok megoldásának elsajátítását.

A stabilitás szemléltetésére álljon itt a következő egyszerű példa. Helyezünk egy golyót egy tökéletesen félgömb alakú edény aljába, majd egy tetszőleges irányban, adott mértékig térítsük ki golyót. Elengedés után, a golyó néhány oda-vissza gurulás után visszatér az eredeti helyzetébe. Fordítsuk meg ezt az edényt, és helyezzük rá így a golyót. Ekkor, feltéve, hogy megtaláltuk az egyensúlyi pontot, ha ebből eltávolítjuk, az elgurul. Végül, ha ezt a golyót egy asztalra helyezzük, majd itt azt elmozdítjuk, akkor a golyó nem tér ugyan vissza az eredeti helyzetébe, de nem is távolodik el attól. Az első helyzetet könnyen azonosíthatjuk a stabil állapottal, míg a másodikat az instabilitással vagy labilis helyzettel. Ugyanakkor a fizikai példa azt is megmutatja, hogy a stabilitásnak is vannak korlátai (itt az edény széle), és az instabil állapotban sem a végtelenbe tart a kimenet, mint azt az elvi vizsgálatoknál jelezzük. A harmadik eset azonban egy köztes állapot, melyet stabilnak biztosan nem tekinthetünk, hiszen a rendszer nem tért vissza a zavarás után az eredeti állapotába, de azt a fajta labilitást sem mutatta, amikor a kiindulási helyzetétől tetszőleges mértékben eltávolodott.

6.1. Stabilitásdefiníciók

6.1.1. Korlátos bemenet – korlátos kimenet (BIBO) stabilitás definíciója

Egy rendszert *korlátos bemenet – korlátos kimenet* (röviden *BIBO*) *stabil*nak nevezünk, ha korlátos bemenőjelet alkalmazunk egy tetszőleges vizsgálati időintervallumban:

$$|u(t)| < M_1, \quad -\infty < t_0 \leq t < \infty,$$

akkor a tag kimenetén megjelenő jel is korlátos:

$$|y(t)| < M_2, \quad t_0 \leq t < \infty,$$

ahol $M_1, M_2 < \infty$ tetszőleges pozitív értékek és t_0 a kezdeti időpont. A BIBO rövidítés a *bounded input, bounded output* angol kifejezésből származik.

A definíciónak megfelelően tehát, ha a tagot véges nagyságú bemenet éri, és a rá adott válasza is egy korláton belül marad, akkor azt már, legalábbis BIBO értelemben stabilnak nevezhetjük.

Belátható, hogy egy rendszer akkor és csak akkor BIBO stabil, ha

$$\int_0^{\infty} |h(t)dt| < M < \infty ,$$

tehát a súlyfüggvényének abszolút integrálja korlátos.

Ennek a tételnek az alkalmazásával már elméletileg van lehetőségünk a stabilitás vizsgálatára, azonban a gyakorlatban ennél egyszerűbb módszerekkel is eldönthetjük azt.

A BIBO stabilitás viszonylag gyenge stabilitást definiál, hiszen csak annyit vár el a rendszertől, hogy véges mértékű zavarás esetén a kimenete is korlátok között maradjon. Ennél szigorúbb stabilitás definícióra is szükség van a rendszerek működésének vizsgálatához, ez az *aszimptotikus stabilitás*.

Az aszimptotikus stabilitás értelmezéséhez először is értelmezzük a *nulla bemeneti állapotot*. Legyen egy n -ed rendű, lineáris időinvariáns rendszer bemenete zérus, ($u(t) = 0$, $t_0 \leq t < \infty$), a kimenete pedig a t_0 időponthoz tartozó kezdeti feltételek miatt valamilyen $y(t)$ időfüggvény. Ekkor a kimenetet a következő módon adhatjuk meg a kezdeti feltételek függvényében:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) y^{(k)}(t_0) ,$$

ahol $g_k(t)$ jelöli az $y^{(k)}(t_0)$ kezdeti feltételektől függő, a nulla bemenet melletti válasz $(k+1)$ -edik komponensét.

Ezt a nulla bemeneti állapotot legkönnyebben, mint a magára hagyott rendszer esetét értelmezhetjük. Olyan rendszert vizsgálunk, ami valamilyen meghibásodás miatt kikerült az irányítás alól, és így működik tovább az irányítás megszűnésének pillanatában érvényes jellemzőinek függvényében.

6.1.2. Az aszimptotikus stabilitás definíciója

Egy lineáris, időinvariáns rendszert tetszőleges, nem minden esetben zérus kezdeti feltételek esetén aszimptotikusan stabilnak nevezünk, ha megválasztható a kezdeti értékek függvényében egy olyan M korlát, hogy a kimenet abszolút értéke ezt ne lépje át:

$$\exists M \left(y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) \right) > 0 \Rightarrow |y(t)| \leq M < \infty , \quad \forall t \geq t_0 ,$$

és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 .$$

A stabilitás nyilvánvaló feltétele, hogy a $g_k(t)$ válaszkomponensek összege véges legyen, hiszen a kezdeti feltételek végesek:

$$|y(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) y^{(k)}(t_0) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)| \cdot |y^{(k)}(t_0)| \leq \max_i |y^{(i)}(t_0)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(t)| .$$

Vizsgáljuk meg a stabilitást a kiindulási bemenet – kimenet modell alapján. Induljunk ki ehhez a modell általános alakjából:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) .$$

Az így felírt modell matematikai szempontból egy inhomogén differenciálegyenlet, amit a matematikai analízisben tanultaknak megfelelően úgy oldunk meg, hogy a homogén differenciálegyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. A homogén differenciálegyenlet esetén az egyenlet jobb oldala nullával egyenlő, így a modell a következő alakú lesz:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0 .$$

Ez viszont fizikai szempontból megegyezik az aszimptotikus stabilitásvizsgálat nulla bemeneti esetének. Az inhomogén rész megoldásával pedig, ha létezik, akkor az új egyensúlyi állapot jellemzőit határozzuk meg. A homogén egyenlet általános megoldását a következő alakban keressük:

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} ,$$

ahol p_1, \dots, p_n a homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökei, a c_i értékek pedig konstansok. Az aszimptotikus stabilitás feltétele, hogy a kimenet zérushoz tartson:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 .$$

Ez feltétel a megoldás általános alakja szerint akkor fog teljesülni, ha az exponenciális tag kitevője a $-\infty$ -be tart. Miután az idő megállapodás szerint nem vesz fel negatív értéket, ezért ez akkor fog teljesülni, ha p_1, \dots, p_n értékek mindegyike vagy negatív valós, vagy negatív valós részű komplex konjugált gyökpár:

$$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0 \quad \forall p_i, \quad i = 1, \dots, n .$$

Belátható az is, hogy a homogén egyenlet általános megoldása tulajdonképpen a rendszer súlyfüggvénye, hiszen

$$Y(s) = G(s)U(s) ,$$

ha

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 ,$$

akkor

$$Y(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) ,$$

azaz a stabilitás a súlyfüggvény segítségével is megfogalmazható:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 .$$

Ennek megfelelően, ha a stabilitást az átviteli függvény segítségével operátor tartományban akarjuk vizsgálni, akkor ehhez az alábbi átviteli függvény nevezőjének a gyökei, vagyis a pólusokat kell ellenőrizni:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)},$$

ahol a p_1, \dots, p_n értékek a nevező polinomjának a gyökei, vagyis a pólusok, míg a z_1, \dots, z_m értékek a számláló polinomjának a gyökei, vagyis a zérushelyek. Mivel az átviteli függvény pólusai megfelelnek a homogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeinek, így a stabilitás vizsgálat elvégezhető ezek segítségével is. A magára hagyott rendszer tehát aszimptotikusan stabil, ha a pólusai a komplex számsík baloldalián helyezkednek el, vagyis mindegyik pólus vagy negatív valós, vagy negatív valós részű komplex gyök.

6.1.3. Aszimptotikusan stabil rendszer viselkedése egységimpulzus bemenet esetén

Egységimpulzus bemenet hatására a rendszer kimenetén a súlyfüggvény jelenik meg válaszként. Az előző pontban levezetetteknek megfelelően a súlyfüggvényt a következő levezetés eredményeként kaphatjuk meg. Legyen a tag bemenet – kimenet modellje a következő:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t).$$

Ekkor az átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}.$$

A súlyfüggvény

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1,$$

$$Y(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)),$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(K \cdot \left(\frac{C_1}{s - p_1} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \right) \right) = \\ &= K(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}). \end{aligned}$$

Az általános megoldás alapján, ha valamennyi p_i pólus negatív valós gyök, akkor a súlyfüggvény egy kezdeti elfutás után aszimptotikusan simulva áll vissza az eredeti értékére. Ha a pólusok között van negatív valós részű gyökpár, akkor a beállítás csökkenő amplitúdójú lengésekkel játszódik le. Az ilyen viselkedésű tagokat aszimptotikusan stabilnak tekintjük. Ha a pólusok között van olyan, amelynek értéke nullával egyenlő, akkor a súlyfüggvény a paraméterek által meghatározott értékre áll be, ha a pólusok között

nulla valós részű komplex gyökpár van, akkor a kimeneten egy állandó amplitúdójú lengés jelenik meg. Ebben a két esetben csak a BIBO stabilitás feltétele teljesül, hiszen a tag kimenete nem áll vissza a kiindulási értékre, de nem is távolodik attól tetszőleges mértékben. Végül, ha a pólusok között akárcsak egy pozitív valós, vagy pozitív valós részű komplex gyökpár van, akkor a kimenet vagy exponenciális elfutással, vagy növekvő amplitúdójú lengésekkel a végtelenbe tart, és így természetesen a tagot instablnak tekintjük.

6.1.4. Aszimptotikusan stabil rendszer viselkedése egységugrás bemenet esetén

Egységugrás bemenet hatására a rendszer kimenetén az átmeneti függvény jelenik meg válaszként. A súlyfüggvény levezetése alapján az átmeneti függvény a következők alapján írható fel. A tag modellje és átviteli függvénye:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t), \quad G(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}.$$

Az átmeneti függvény

$$\begin{aligned} u(t) = 1(t) &\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}, \\ Y(s) = G(s)U(s) &\Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{s} \Rightarrow \\ y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{s(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} \right) &= \\ = \mathcal{L}^{-1} \left(K \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{C_1}{s - p_1} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} \right) \right) &= \\ = K(1(t) + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}) &. \end{aligned}$$

Az átmeneti függvény lefutására hasonló vizsgálat végezhető el a pólusok előjelének függvényében, mint a súlyfüggvény esetében. A két függvény menete közti lényegi különbség, hogy míg a súlyfüggvény aszimptotikusan stabil esetben a kiindulási értékre áll vissza, addig az átmeneti függvény az erősítés, azaz az arányossági tényező által meghatározott értékre áll be:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K, \quad \text{ha } \forall p_i: \operatorname{Re}\{p_i\} < 0.$$

A beállítás jellegét ebben az esetben is az határozza meg, hogy a gyökök mindegyike negatív valós-e, vagy van-e köztük komplex gyökpár is. Nulla vagy nulla valós részű gyökpár esetén az átmeneti függvény viselkedése nagyon hasonló lesz a súlyfüggvényéhez. Instabil tag esetén pedig szintén hasonló lesz a két válaszfüggvény lefutása.

Összefoglalva:

BIBO stabil rendszerek esetében korlátos bemenetre a kimenet is korlátos.

Aszimptotikusan stabil rendszer esetében a kimenet nullához tart, ha a rendszert nem zérus kezdeti feltételek mellett magára hagyjuk, vagy egységimpulzusra adott válaszát vizsgáljuk. Egységugrás bemenet esetén a kimenet az erősítés által meghatározott végértékhez tart.

A két stabilitás összehasonlításából látható, hogy az asimptotikus stabilitás az erősebb fogalom. Ha egy jelformáló tagra vagy tagcsoportra igazolható, hogy az asimptotikusan stabil rendszer, akkor ebből következően BIBO stabilitás is teljesül. Ugyanakkor egy rendszer BIBO stabilitásából nem következik az asimptotikusan stabilitása.

6.2. Stabilitásvizsgálati módszerek

Bár a stabilitásdefiníciókból következően az átviteli függvény pólusai alapján egyértelműen eldönthető egy tag vagy tagcsoport stabilitása, a pólusok meghatározása gyakorlatilag csak első vagy másodrendű rendszer, illetve ezek tiszta soros kapcsolata esetén végezhető el közvetlenül. Magasabb rendű rendszerek esetében vagy a pólusok meghatározását kell valamilyen numerikus módszer segítségével megoldani, vagy más módszerek segítségével kell a közvetlenül a stabilitás tényére következtetni. A következőkben ezekből a módszerekből mutatunk be néhányat.

6.2.1. Routh-Hurwitz kritérium

A Routh-Hurwitz stabilitásvizsgálati eljárás egy módszer család, ami hasonló jellegű megoldásokat foglal össze. Közös jellemzőjük, hogy alkalmazásukhoz fel kell írni a vizsgálandó rendszer (tag vagy tagcsoport) *eredő átviteli függvényét*, és ennek a nevezőjében található polinom együtthatói alapján dönthetünk a stabilitásról. Itt a Hurwitz determinánson alapuló módszert mutatjuk be.

Első lépésként írjuk fel a vizsgálandó rendszer eredő átviteli függvényét! Legyen ez általános esetben a következő:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} .$$

Az asimptotikus stabilitáshoz a következő két feltételnek kell teljesülnie:

1. feltétel: Legyen a nevező valamennyi együtthatója pozitív:

$$\forall a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n .$$

2. feltétel: A nevező együtthatóinak felhasználásával írjuk fel a következő determinánst:

$$H_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

A rendszer stabilitásának másik feltétele, hogy az így kapott determináns főátlójára támaszkodó aldeterminánsok mindegyikére pozitív értéket kell kapni. A vizsgálandó aldeterminánsok a következők lesznek:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0,$$

⋮

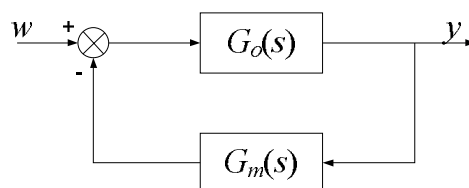
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix} > 0.$$

Ha az aldeterminánsok valamelyike negatív, akkor a vizsgálatot nem kell tovább végezni, mert a rendszer instabil lesz. Elvégezhető a vizsgálat paraméteresen is. Ekkor valamennyi lépésre meghatározzuk, hogy a kérdéses paraméter milyen értékei mellett lesz a vizsgált rendszer stabil, majd ezeket a tartományokat összevetve döntünk arról a legszűkebb tartományról, melyről véve a paraméter értékeit a rendszer biztosan aszimptotikusan stabil lesz.

6.2.2. Nyquist-, illetve Bode-féle stabilitási kritérium

A rendszerek stabilitásának vizsgálata elvégezhető frekvenciatartományban is. A vizsgálatot ekkor a *visszacsatolt rendszerek* stabilitására nézve vizsgáljuk. Mindkét módszer esetében az alapelv, hogy a visszacsatolt rendszer stabilitásáról döntünk az alkalmas helyen felvágott kör frekvenciatartománybeli vizsgálata alapján. A két eljárás a tagok frekvenciatartománybeli ábrázolási módjaiból adódóan tér el.

Induljunk ki a 6.1. ábrán látható zárt körből:



6.1. ábra. Zárt kör

A visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvénye a következő lesz:

$$G_e(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)G_m(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_v(s)} \quad , \quad G_v(s) = G_o(s)G_m(s) \quad .$$

A karakterisztikus egyenlet, melyből a pólusokat meghatározhatjuk:

$$1 + G_v(s) = 0 \quad .$$

Áttérve frekvenciatartományba

$$1 + G_v(j\omega) = 0 \quad .$$

Ezt a kifejezést a következő módon értelmezhetjük: megvizsgálandó, hogy létezik-e a zárt rendszernek csillapítatlan szinuszos rezgésű állapota, vagyis:

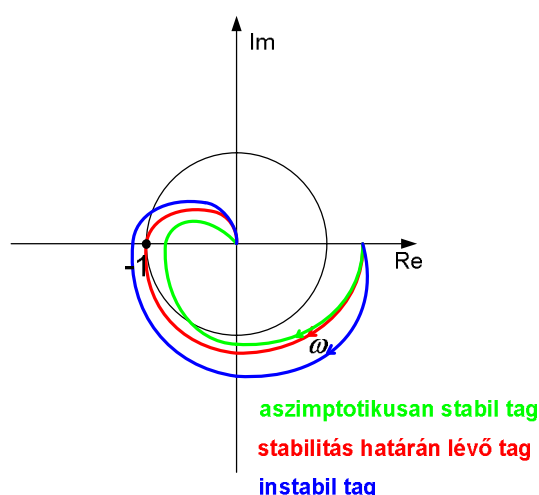
$$\exists \omega_0: G_v(j\omega_0) = -1 \quad .$$

Amennyiben létezik ilyen frekvencia, akkor ilyen ω_0 frekvenciájú $w(t)$ jellel gerjesztve a rendszert a $y(t)$ kimeneten csillapítatlan lengéseket kapunk.

Ennek alapján a *Nyquist-kritérium* a következő lesz:

- Ha a *felnyitott kör* amplitúdó-fázis görbéje – miközben a frekvencia $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változik – éppen áthalad a komplex számsík valós tengelyének a -1 pontján, azaz létezik olyan ω_0 frekvencia, melyre $G(j\omega_0) = -1$, akkor a *visszacsatolt kör* a stabilitás határán van.
- Ha a *felnyitott kör* amplitúdó-fázis görbéje nem metszi a valós tengelyt, vagy ez a metszéspont a -1 és 0 között van, akkor a *visszacsatolt kör* aszimptotikusan stabil.
- Ha a *felnyitott kör* amplitúdó-fázis görbéje a valós tengelyt a -1 ponttól balra metszi, akkor a *visszacsatolt kör* instabil.

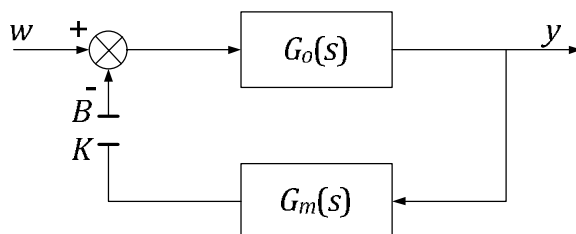
A Nyquist-kritérium szemléltetése a 6.2. ábrán látható:



6.2. ábra. A stabilitás vizsgálat Nyquist-dígarmon

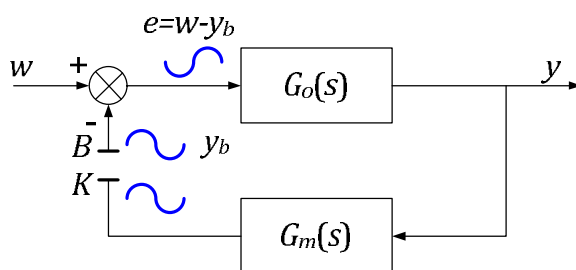
A frekvenciatartománybeli stabilitás kritériumok vázlatos magyarázata a következő:

Induljunk ki a visszacsatolt körből, melyet a B - K pontok között felvágunk (6.3. ábra), és tételezzük fel, hogy az így kapott felnyitott kör Nyquist-diagramja éppen a -1 ponton megy át.



6.3. ábra. A Nyquist-féle stabilitás értelmezése

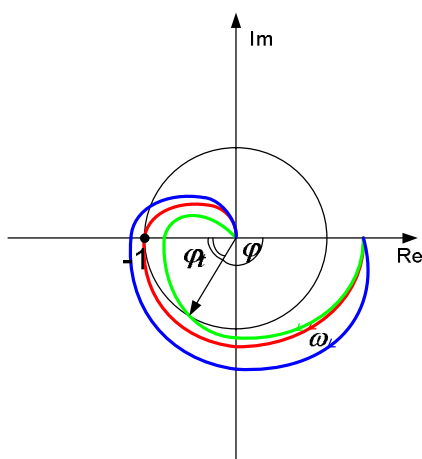
Legyen a $w(t) = 0$, és gerjesszük a rendszer a B pontban ω_0 frekvenciájú szinuszos y_b jellel. Ekkor a különbségképző után az $e = -y_b$ jelet kapjuk, majd a K ponton ismét az y_b jel jelenik meg, hiszen $G_o(j\omega)G_m(j\omega) = -1$. A jelekkel kiegészített hatásvázlat a 6.4. ábrán látszik.



6.4. ábra. A Nyquist-féle stabilitás értelmezése (folyt.)

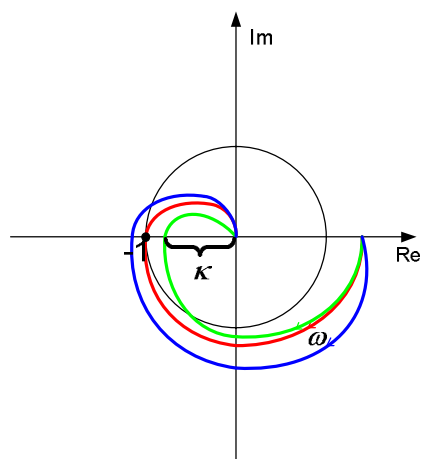
Ha ismét összekötjük a rendszert, akkor ez a rezgés (elvileg) is fennmarad. Ha a vizsgált jel nem periodikus, mint például az egységugrás jel, akkor is felbontható a Fourier sorbafejtéssel olyan szinuszos és koszinuszos összetevőre, melyek között ott van a kritikus ω_0 frekvenciájú jel.

Vezessük be a fázistartalék fogalmát a következő módon. Vizsgáljuk meg, hogy az amplitúdó-fázis jelleggörbe hol metszi az egység sugarú kört, illetve, hogy az ebbe a pontba mutató irányvektornak mekkora lesz a valós tengellyel bezárt szöge (6.5. ábra). Vegyük a 180° és a kapott szög közötti különbséget. Az így kapott értéket *fázistartaléknak* nevezzük. Ha a fázistartalék pozitív, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil, ha nulla, akkor a stabilitás határán van, ha negatív a fázistartalék, akkor instabil a zárt kör. Gyakorlati szabályként a fázistartalékot célszerű 30° -nak választani.



6.5. ábra. A fázistartalék értelmezése

A rendszer működésének egy másik jellemzője az erősítési tartalék. A κ erősítési tartalék alatt a jelleggörbe és a valós tengely metszéspontja, valamint az origó közötti távolságot értjük a 6.6. ábrának megfelelően:



6.6. ábra. Az erősítési tartalék értelmezése

Ha ez távolság 1-nél kisebb, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil, ha egyenlő 1-gyel, akkor a stabilitás határán van, ha nagyobb 1-nél, akkor instabil.

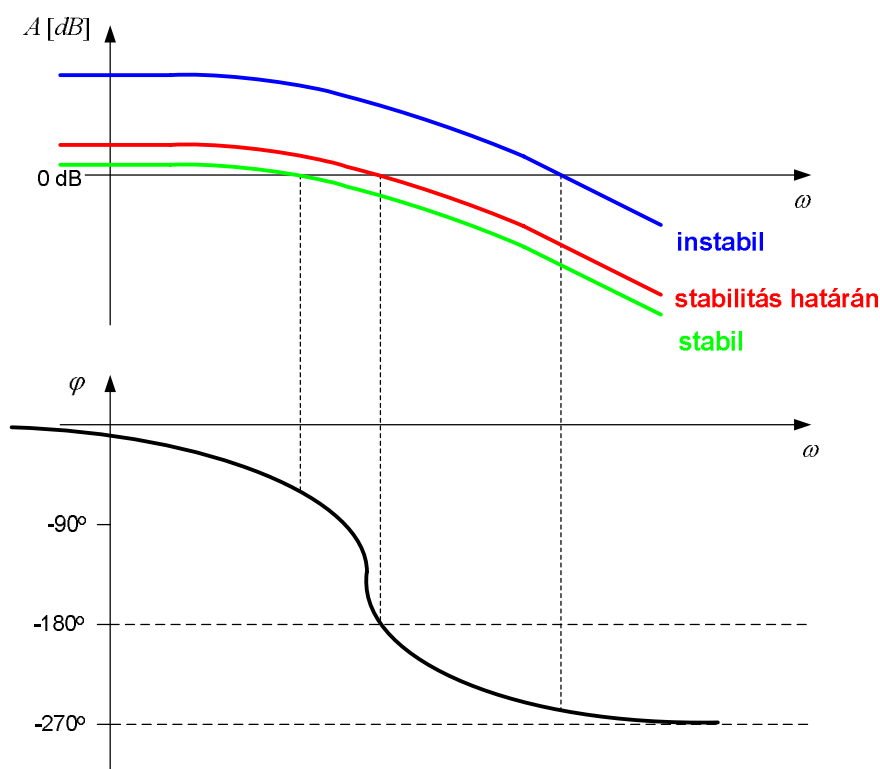
A rendszerek frekvenciatartományban történő vizsgálatát a Nyquist diagramban történő ábrázolás mellett előnyei miatt gyakran Bode diagramban végezzük el. A Nyquist-féle ábrázolással szemben a Bode diagramban az amplitúdót és a fázisszöveget külön ábrázoljuk a frekvencia függvényében. A Nyquist diagramhoz kötődő stabilitási kritérium könnyen értelmezhető a Bode diagramban is, megkapva így a stabilitás Bode-féle kritériumát. Az értelmezéshez induljunk ki abból, hogy a Nyquist kritériumot esetében azt vizsgáljuk, hogy a jelleggörbe és az egységsugarú kör metszéspontjához húzott vektornak mekkora az irányszöge. Ha ez pontosan 180° , akkor a vizsgált visszacsatolt rendszer a stabilitás határán van, ha annál kisebb, akkor stabil, ha nagyobb, akkor instabil. Az ehhez a

metszésponthoz húzott irányvektor hossza 1, így az ehhez a ponthoz tartozó amplitúdóviszony is egységnyi. A Bode-féle ábrázolásnál alkalmazott logaritmizálás miatt, az egységnyi amplitúdóviszonynak a 0 dB-es érték felel meg, vagyis a stabilitásvizsgálat első lépéseként meghatározzuk, hogy milyen frekvenciaértéknél metszi a jelleggörbe a frekvenciatengelyt. Amennyiben a tagcsoport erősítése 1, és ezért a görbe simul a 0 dB értékhez, akkor a metszéspontot az aszimptóták metszéspontja alapján határozzuk meg, ez lesz a sarokfrekvencia. Második lépésként megnézzük, hogy ehhez a frekvenciaértékhez milyen fázisszög érték tartozik. Ennek alapján a stabilitást a Bode-diagram segítségével a következő kritérium alapján állapíthatjuk meg.

Bode-kritérium

Határozzuk meg, hogy az amplitúdóviszony lefutása milyen frekvenciaértéknél lesz pontosan 0 dB. Állapítsuk meg, hogy ehhez a frekvenciaértékhez milyen fázisszög tartozik. A kapott fázisszög értéke alapján a visszacsatolt rendszer stabilitásáról a következő megállapításokat tehetjük:

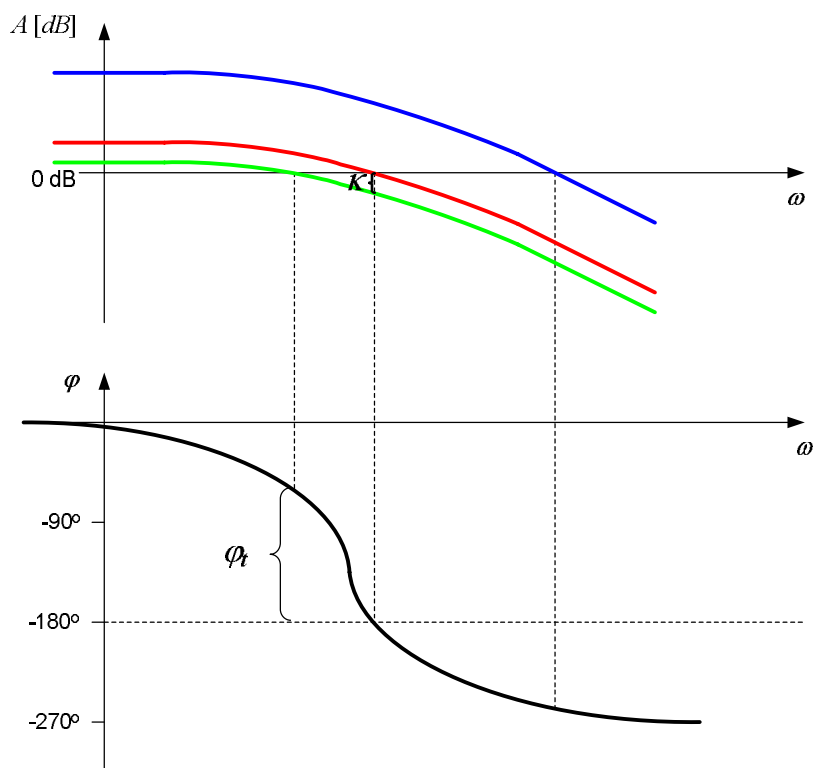
- ha a fázisszög értéke nagyobb, mint -180° , akkor a visszacsatolt rendszer stabil;
- ha pontosan egyenlő -180° -kal, akkor a stabilitáshatárán van;
- ha kisebb, mint -180° , akkor instabil lesz a rendszer viselkedése.



6.7. ábra. A Bode-féle stabilitási kritérium

A 6.7. ábra egyrészt bemutatja a stabilitás meghatározásának menetét, másrészt példát láthatunk stabil, stabilitás határán és instabil rendszerek jelleggörbéire. Abban az esetben,

ha a visszacsatolt kör eredő erősítése 1, és az amplitúdó jelleggörbéje nem metszi a frekvencia tengelyt, akkor a már említett sarokfrekvencia meghatározásával kapjuk meg a frekvencia kritikus értékét.



6.8. ábra. A fázis- és erősítési tartalék értelmezése Bode diagramon

A Bode diagramban történő stabilitás meghatározásnál is értelmezhetjük az erősítési, illetve a fázistartalék fogalmát. Az ábrának megfelelően a κ erősítési tartalék megadja azt maximális értékét dB-ben kifejezve, amivel növelve a visszacsatolt kör erősítését, a rendszer éppen a stabilitás határára jut. Meghatározásához először nézzük meg, hogy a fázisgörbe milyen frekvencia értéknél lesz pontosan -180° -kal egyenlő, majd nézzük meg, hogy ehhez a frekvenciaértékhez milyen amplitúdóviszony tartozik. Az erősítési tartalék a kapott amplitúdóviszony és a 0 dB -es érték közti távolság lesz. A fázistartalékot a stabilitásvizsgálatnál kapott fázisszög érték és a -180° közti távolság meghatározásával kapjuk meg.

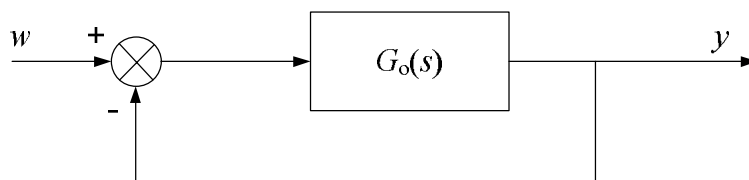
6.2.3. Gyökhelygörbe

A stabilitásvizsgálatnak egy különleges esete a gyökhelygörbe módszer. A cél ebben az esetben is alapvetően a visszacsatolt kör stabilitásának eldöntése, de ezt a rendszer valamely paraméterének egy adott tartományról felvett értékei függvényében végezzük el. További előnye a módszernek, hogy a pólusok adott paraméterértékhez tartozó komplex síkbeli helye alapján következtethetünk a transziens viselkedésre. A módszer alkalmazható

egy bemenetű – egy kimenetű és több menetű – több kimenetű rendszerekre. A gyökhelygörbe definíciója a következő:

A gyökhelygörbe a *zárt rendszer* pólusainak mértani helye a komplex síkon, miközben a rendszer valamely paraméterét nulla és végtelen között változtatjuk.

A gyökhelygörbe értelmezéséhez és tulajdonságainak levezetéséhez induljunk ki a 6.9. ábrából:



6.9. ábra. A gyökhelygörbe levezetési ábrája

Legyen a $G_o(s)$ tag átviteli függvénye:

$$G_o(s) = \frac{K(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)},$$

ahol K a tag erősítése, z_1, \dots, z_m a tag zérushelyei, pedig a p_1, \dots, p_n pólusai. A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) + K(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m)},$$

amelyből a karakterisztikus egyenlet:

$$(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) + K(s - z_1) \cdot \dots \cdot (s - z_m) = 0.$$

A gyökhelygörbe tehát a zárt kör pólusainak helye a komplex síkon, miközben az erősítést változtatjuk 0 és ∞ között. Az oksági szabálynak megfelelő fizikai rendszerek esetében a karakterisztikus polinom fokszáma megegyezik a felnyitott kör karakterisztikus polinomjának a fokszámával, azaz mindkettő n -ed fokú polinom lesz, melynek az erősítés függvényében történő megoldása szolgáltatja a gyökhelygörbét. A pólusok meghatározása magasabb fokszámú rendszerek esetében csak numerikus algoritmus segítségével lehetséges, de első és másodfokú rendszerekre könnyen meghatározható. A gyökhelygörbe felvázolását és értelmezését a következő tulajdonságok segítik:

1. A gyökhelygörbének annyi ága van, mint amennyi a zárt rendszer pólusainak száma.
2. A gyökhelygörbe mindig szimmetrikus a valós tengelyre nézve.
3. Legyen a pólusok száma n , a zérushelyek száma m a felnyitott körben, ekkor
 - ha $n > m$, akkor a gyökhelygörbe a felnyitott kör pólusaiból indul ki, és m számú ág a felnyitott kör zérushelyeibe, $n - m$ számú ág a végtelenbe tart;

- ha $n = m$, akkor valamennyi ág a felnyitott kör zérushelyeibe tart (a gyökhelygörcbe teljesen véges tartományban van);
 - a gyökhelygörcbe matematikailag alkalmazható a fizikailag nem reális $n < m$ esetre is, ekkor zárt kör pólusainak száma m , és $m - n$ számú ág a végtelenből indul ki.
4. A valós tengelyen akkor és csak akkor lehetnek gyökhelygörcbe szakaszok, ha a vizsgált ponttól jobbra a pólusok és a zérushelyek együttes száma páratlan.
5. A gyökhelygörcbe aszimptótáinak irányszögét a következő kifejezés segítségével lehet meghatározni:

$$\alpha = \frac{\pm l \cdot 180^\circ}{n - m}, \quad l = 1, 3, 5, \dots$$

6. A gyökhelygörcbe aszimptótái a valós tengelyt az alábbi összefüggés által meghatározott ún. súlypontban metszik. Jelölje p_i a felnyitott kör i -edik pólusát, z_j a felnyitott kör j -edik zérushelyét. Ekkor a súlypont értéke:

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

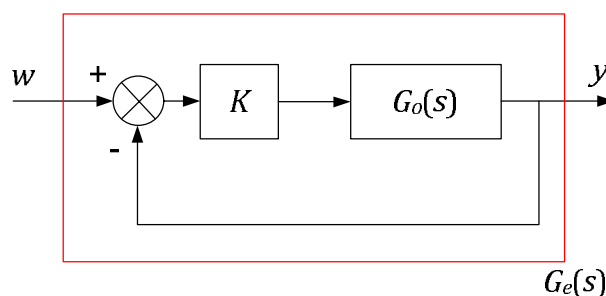
7. A gyökhelygörcbe és a képzetes tengely metszéspontja, vagyis a stabilitás határát jelentő erősítési értékhez tartozó pólusok a korábban ismertett Hurwitz determináns segítségével határozhatók meg.
8. A gyökhelygörcbe kilépése a valós tengelyből – vagyis a valós tengelynek az az x pontja, ahol többszörös gyököket kapunk – a következő egyenlet segítségével határozható meg:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{x - z_j} = 0$$

Ezek a tulajdonságok, bár némelyik pont esetében heurisztikusnak tűnnek, azonban tételként is megfogalmazhatók és így bizonyíthatóak is.

A következőkben néhány egyszerű példával mutatjuk be az első és másodfokú rendszerek esetében számolással, egy harmadrendű rendszer esetében becsléssel a gyökhelygörcbe meghatározását, illetve szemléltetjük a felsorolt tulajdonságait.

Legyen a vizsgálandó rendszer 6.10. ábrának megfelelő.



6.10. ábra. A gyökhelygörcbe példáinak kiinduló hatásvázlata

A visszacsatolt körben a K erősítés értékét változtatjuk 0 és ∞ között, a $G_o(s)$ átviteli függvény általános alakja pedig a következő:

$$G_o(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0},$$

ahol $n = 1, 2, 3$ és $m = 0, 1$.

Az eredő átviteli függvény:

$$\begin{aligned} G_e(s) &= \frac{K G_o(s)}{1 + K G_o(s)} = \frac{K(b_m s^m + \dots + b_0)}{a_n s^n + \dots + a_0 + K(b_m s^m + \dots + b_0)} = \\ &= \frac{K b_m s^m + \dots + K b_0}{a_n s^n + \dots + (a_m + K b_m) s^m + \dots + (a_0 + K b_0)}, \end{aligned}$$

így a rendszer eredő erősítése

$$K_e = \frac{K b_0}{a_0 + K b_0}.$$

Megjegyzés: a példánál az általános a_i, b_j együtthatók helyett a tagra jellemző paramétereket alkalmazzuk.

1. Legyen $n = 1, m = 0$ és $a_0 = 0$.

Ekkor a felnyitott kör átviteli függvénye a T_I időállandójú ideális integráló tag modellje lesz, melyet visszacsatolva a következőt kapjuk:

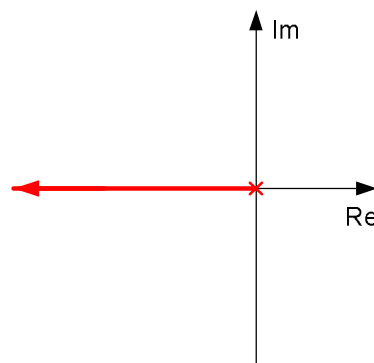
$$G_o(s) = \frac{1}{T_I s} \Rightarrow G_e(s) = \frac{K G_o(s)}{1 + K G_o(s)} = \frac{K}{T_I s + K}.$$

Belátható, hogy

$$K = 0 \Rightarrow s = 0,$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow -\infty,$$

tehát a gyökhelygörcbe képe 6.11. ábrán látható.



6.11. ábra. Integráló tag gyökhelygörcbéje

2. Legyen $n = 1$, $m = 0$ és $a_0 \neq 0$.

Ekkor az átviteli függvény az egységnyi erősítésű, τ időállandójú arányos elsőrendű rendszerek működését modellezi, és a visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye a következő:

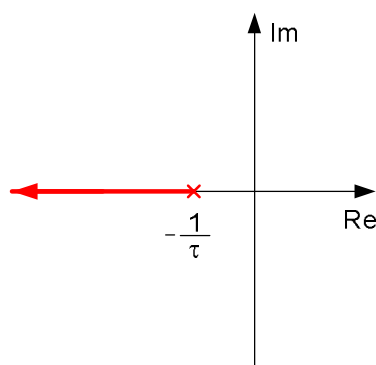
$$G_0(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K G_0(s)}{1 + K G_0(s)} = \frac{K}{\tau s + 1 + K}.$$

Belátható, hogy

$$K = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{\tau},$$

$$K \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad s \rightarrow -\infty,$$

tehát a gyökhelygörbe képe az alábbi lesz:



6.11. ábra. Az elsőrendű tag gyökhelygörbéje

3. Legyen $n = 1$, $m = 1$ és $a_0 \neq 0$

Ekkor az átviteli függvény nevezőjében és számlálójában is egy elsőfokú polinom szerepel, és így a visszacsatolt körben az erősítés a nevezőben a polinom mindkét együtthatójának értékét befolyásolja:

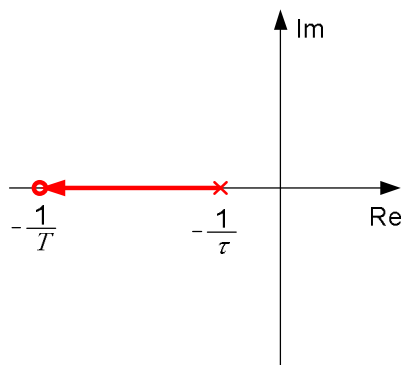
$$G_0(s) = \frac{T s + 1}{\tau s + 1} \quad \Rightarrow \quad G_e(s) = \frac{K G_0(s)}{1 + K G_0(s)} = \frac{K(T s + 1)}{(\tau + K T) s + 1 + K}.$$

Belátható, hogy

$$K = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{\tau},$$

$$K \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad s \rightarrow -\frac{1}{T}, \quad \left\{ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{-(1 + K)}{\tau + K T} = -\frac{1}{T} \right\},$$

tehát a gyökhelygörbe, az előző két esethez hasonlóan a felnyitott kör pólusából indul ki, de a felnyitott kör zérushelyébe tart. A gyökhelygörbe grafikonja a következő ($\tau > T$):



6.11. ábra. Az elsőrendű tag gyökhelygörbéje, ha a számláló fokszáma 1

4. Legyen $n = 2$, $m = 0$ és $a_0 \neq 0$ $\zeta > 1$.

Ekkor a másodrendű tag két elsőfokú sorba kapcsolásának eredőjeként írható fel (az egyszerűsítés kedvéért tegyük fel, hogy a $b_0/a_0 = 1$):

$$G_0(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K G_0(s)}{1 + K G_0(s)} = \frac{K}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 + K}.$$

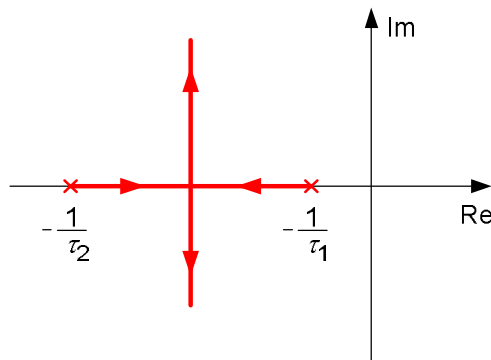
Belátható, hogy

$$K = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{\tau_1}; \quad s_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s_{1,2} \rightarrow -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2} \pm j\infty,$$

$$\left(s_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + K)}}{2\tau_1\tau_2} \right),$$

tehát a gyökhelygörbe képe a 6.3. ábrán látható.

6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($\zeta \geq 1$)

Mint a gyökhelygörbe menetéből látható, az ágak párhuzamosak a képzetes tengellyel, így az erősítés bármilyen mértékű növelése esetén sem lesz a tag instabil.

5. Legyen $n = 2$, $m = 0$ és $a_0 \neq 0$ $\zeta < 1$.

Ekkor a másodrendű tag pólusa negatív valós részű konjugált komplex gyökpár lesz (az egyszerűsítés kedvéért itt is tegyük fel, hogy a $b_0/a_0 = 1$):

$$G_0(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K G_0(s)}{1 + K G_0(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (1 + K)\omega_n^2}.$$

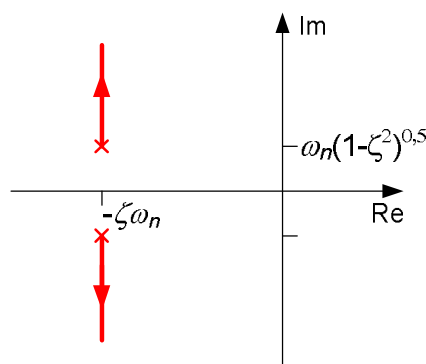
Belátható, hogy

$$K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s_{1,2} \rightarrow -\zeta\omega_n \pm j\infty,$$

$$\left(s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2(1 + K)}}{2} \right),$$

tehát a gyökhelygörbe képe 6.13. ábrán látható.



6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($0 < \zeta < 1$)

azaz a tag stabilitása ebben az esetben sem változik.

6. Legyen $n = 2$, $m = 1$ és $a_0 \neq 0$ $\zeta > 1$.

Ekkor a másodrendű tag ismét két elsőrendű tag sorba kapcsolásának eredőjeként írható fel és a számlálóban is megjelenik egy első fokú polinom (az egyszerűsítés kedvéért itt is tegyük fel, hogy a $b_0/a_0 = 1$):

$$G_0(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{Ts + 1}{(\tau_1s + 1)(\tau_2s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{KG_0(s)}{1 + KG_0(s)} = \frac{K(Ts + 1)}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + KT)s + 1 + K}.$$

Belátható, hogy

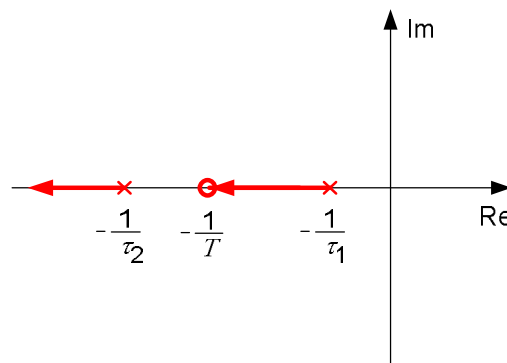
$$K = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s_1 \rightarrow -\infty; \quad s_2 \rightarrow -\frac{1}{T},$$

$$\left(s_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2 + KT) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + KT)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + K)}}{2\tau_1\tau_2} \right).$$

A gyökhelygörbe tényleges menete jelentős mértékben attól függ, hogy a nevezőben és a számlálóban szereplő időállandók értékei hogyan aránylanak egymáshoz.

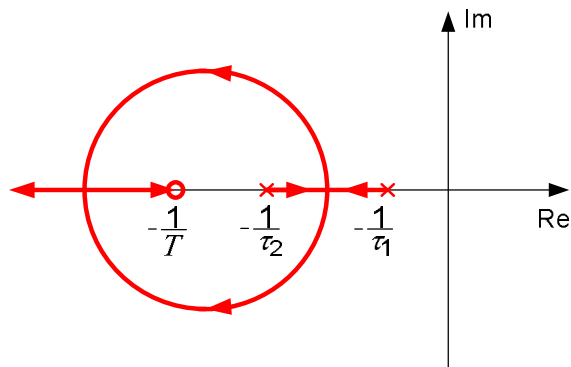
- Ha a három időállandó közötti arány $\tau_1 > T > \tau_2$, akkor a gyökhelygörbe képe a 6.13. ábrán látható.



6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($\tau_1 > T > \tau_2$, a számláló első fokú polinom)

tehát az erősítés értékének tetszőleges növelése mellett is valós pólusokat kapunk, azaz a tag túlszillapított marad és működése elsőrendű tagéhoz lesz hasonló.

- Ha a három időállandó közötti arány $\tau_1 > \tau_2 > T$, akkor a gyökhelygörbe képe a 6.13 ábrának megfelelő lesz:

6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($\tau_1 > \tau_2 > T$, a számláló első fokú polinom)

Ebben az esetben az erősítés növelésének hatására a tag előbb alulesillapított lesz (a pólusok komplexek lesznek), majd újra valós pólusokat kapunk és a tag működése ebben az esetben is az elsőrendű tagéra hasonlít.

7. Legyen $n = 2$, $m = 1$ és $a_0 \neq 0$ $\zeta < 1$.

Ekkor a másodrendű tag pólusa ismét negatív valós részű konjugált komplex gyökpár lesz (az egyszerűsítés kedvéért itt is tegyük fel, hogy a $b_0/a_0 = 1$):

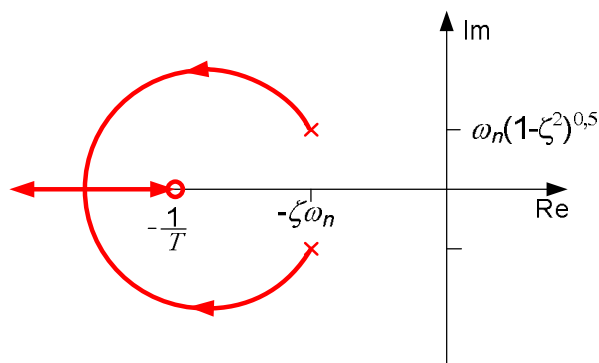
$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2(Ts + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{KG_0(s)}{1 + KG_0(s)} = \frac{K\omega_n^2(Ts + 1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + KT\omega_n^2)s + (1 + K)\omega_n^2}.$$

Belátható, hogy

$$K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s_1 \rightarrow -\infty; s_2 \rightarrow -\frac{1}{T}$$

6.14. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($0 < \zeta < 1$, a számláló első fokú polinom)

8. Legyen $n = 3$, $m = 0$ és $a_0 \neq 0$.

Legyen a feladat egy harmadrendű tag gyökhelygörbéjének felvázolása. Tegyük fel, hogy a harmadrendű tag három elsőrendű tag sorbakapcsolásából származik:

$$G_0(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{K G_0(s)}{1 + K G_0(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K}.$$

Belátható, hogy

$$K = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\frac{1}{\tau_2}, \quad s_3 = -\frac{1}{\tau_3},$$

$$K \rightarrow \infty \Rightarrow s_{1,2} \rightarrow \infty \pm j\infty; \quad s_3 \rightarrow -\infty,$$

hiszen az aszimptoták irányyszöge:

$$\alpha = \pm \frac{l \cdot 180^\circ}{n - m} \Rightarrow$$

$$l = 1: \alpha = \pm \frac{180^\circ}{3} = \pm 60^\circ; \quad l = 3: \alpha = \frac{3 \cdot 180^\circ}{3} = 180^\circ;$$

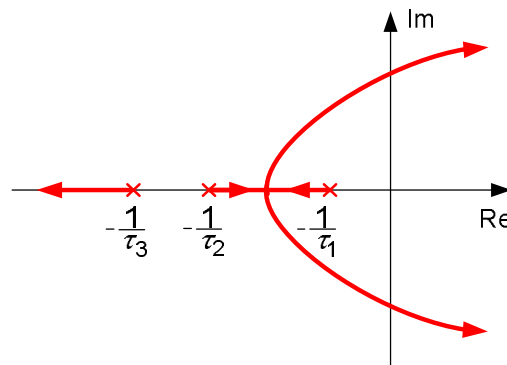
az aszimptoták metszéspontja:

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{\tau_i}\right)}{3},$$

a gyökhelygörbe kilépési pontja a valós tengelyből:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{x - \left(-\frac{1}{\tau_i}\right)} = 0.$$

Így a gyökhelygörbe vázlatos képe, ha $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$:



6.15. ábra. Harmadrendű tag gyökhelygörbéje ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$)

Példaként legyen a tag ($G_0(s)$) és a visszacsatolt kör ($G_e(s)$) átviteli függvénye:

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$G_e(s) = \frac{KG_0(s)}{1+KG_0(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)+K} = \frac{K}{s^3+6s^2+11s+6+K},$$

tehát a felnyitott kör pólusai rendre a $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$ pontokban vannak.

A gyökhelygörbének tehát három ága lesz, melyek a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. Miután az eredő átviteli függvény számlálójában egy konstans szerepel, így a zérushelyek száma nulla, ezért valamennyi ág a végtelenbe fog tartani. Az ágak aszimptotáinak irányszöge:

$$\alpha = \pm \frac{l \cdot 180^\circ}{n-m} \Rightarrow l=1: \alpha = \pm \frac{180^\circ}{3} = \pm 60^\circ; \quad l=3: \alpha = \frac{3 \cdot 180^\circ}{3} = 180^\circ.$$

A valós tengelyen $]-\infty, -3]$ és $[-2, -1]$ tartományon lesznek gyökhelygörbe szakaszok.

A képzetes tengely metszéspontja, vagyis az erősítés értéke a stabilitás határán a Hurwitz kritérium alapján:

1. feltétel: a nevező minden együtthatója legyen pozitív: $\forall a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ teljesül, a_0 -ra $K > -6$ esetén teljesül.

2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6+K & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6+K \end{vmatrix}.$$

A főátlóhoz tartozó al-determinánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_2| = |2| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6+K \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 - 1 \cdot (6+K) \Rightarrow K < 60,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 6+K & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6+K \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 6 & 6+K \end{vmatrix} - (6+K) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6+K \end{vmatrix} =$$

$$= (6+K)(66 - (6+K)) = (6+K)(60-K) \Rightarrow -6 < K < 60.$$

A kapott feltételek alapján $K=60$ esetén lesz a visszacsatolt kör a stabilitás határán.

Az aszimptoták metszéspontja:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 p_i}{3} = \frac{(-1) + (-2) + (-3)}{3} = -2$$

a valós tengely -2 pontjában lesz.

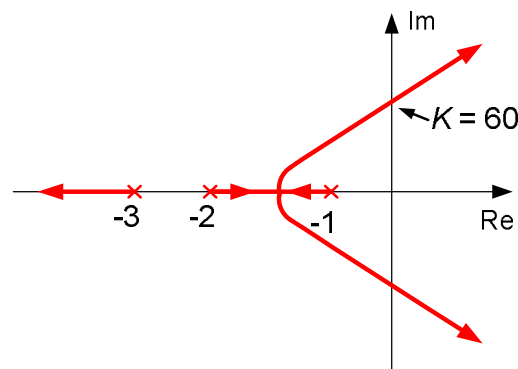
A gyökhelygörcbe kilépési pontja a valós tengelyből:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{x - p_i} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = 0$$

$$3x^2 + 12x + 11 = 0$$

$$x_1 = -2,58 \quad x_2 = -1,42 .$$

A korábbi megállapításunknak megfelelően csak x_2 lehet a megoldás, így a gyökhelygörcbe a 6.16. á :



6.16. ábra. A példa harmadrendű tagjának gyökhelygörcbéje ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$)

6.3. Feladatok stabilitásvizsgálat témaköréből

1. Pólusok közvetlen meghatározása

a) Döntse el az alábbi tagokról, hogy stabilak-e aszimptotikus, illetve BIBO értelemben!

$$- G_1(s) = \frac{2s^2 - 1}{4s^2 - 8} .$$

A megoldás menete:

Az átviteli függvény nevezője alapján a pólusok:

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{2} .$$

Miután az egyik pólus nagyobb nullánál, így a tag instabil.

$$- G_2(s) = \frac{2s + 1}{4s^2 + 2s + 6} .$$

A megoldás menete:

Az átviteli függvény nevezője alapján a pólusok:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{23}}{4} .$$

Miután a pólusok valós része negatív, így a tag stabil.

$$- G_3(s) = \frac{(s+1)^3}{4s^2 + 2s + 2} .$$

A megoldás menete:

Miután az átviteli függvény számlálójának a fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, így a tag nem realizálható (nem felel meg valós fizikai rendszer átviteli függvényének).

$$- G_4(s) = \frac{4s}{s^2 + 6s} .$$

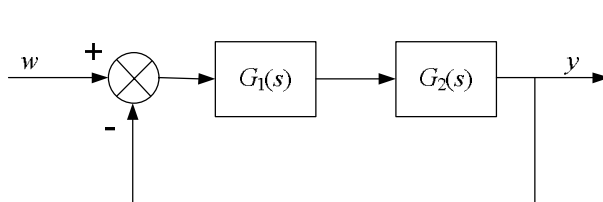
A megoldás menete:

Az átviteli függvény nevezője alapján a pólusok:

$$p_1 = 0 , \quad p_2 = -6 .$$

Miután az egyik pólus az origóban van, de a másik kisebb nullánál, így a tag a stabilitás határán van.

- b) Döntse el az alábbi tagcsoportokról, hogy stabilak-e aszimptotikus, illetve BIBO értelemben!



$$G_1(s) = 1 + \frac{1}{s} \quad G_2(s) = \frac{1}{2s + 1} .$$

A megoldás menete:

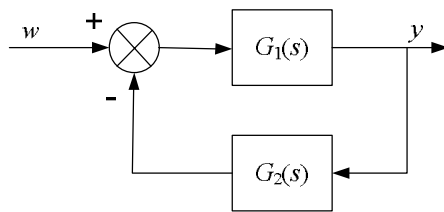
A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{s + 1}{2s^2 + 2s + 1} .$$

Az átviteli függvény nevezője alapján a pólusok:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{1}{2} .$$

Miután a pólusok valós része negatív, így a visszacsatolt kör stabil.



$$G_1(s) = 1 + \frac{1}{s} \quad G_2(s) = \frac{1}{2s + 1} .$$

A megoldás menete:

A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{2s^2 + 2s + 1} .$$

Az átviteli függvény nevezője alapján a pólusok:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{1}{2} .$$

Miután a pólusok valós része negatív, így a visszacsatolt kör stabil.

2. Stabilitás meghatározása Routh-Hurwitz kritérium (Hurwitz determináns) alapján

a) Döntse el az alábbi tagról, hogy aszimptotikus stabil-e!

$$G(s) = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} .$$

A megoldás menete:

Hurwitz kritérium alapján:

1. feltétel: a nevező minden együtthatója pozitív: $\forall a_i > 0, \quad i = 0,1,2,3$ teljesül.
2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

A főátlóhoz tartozó aldeterminánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_2| = |2| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2 > 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \\ &= a_2(a_1 a_0 - a_2 \cdot 0) - a_0(a_3 a_0 - 0) + 0(a_3 a_2 - a_1 \cdot 0) \\ &= a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3, \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 4^2 \cdot 1 = 8 > 0.$$

Tehát a Hurwitz kritérium mindkét feltétele teljesült, azaz minden együttható pozitív és a főátlóhoz tartozó valamennyi aldetermináns (beleértve a teljes mátrix determinánsát) pozitív, így a tag aszimptotikusan stabil és ebből következően BIBO értelemben is stabil.

- b) Csatolja vissza negatívan az alábbi tagot és döntse el, hogy a kapott rendszer aszimptotikus stabil-e!

$$G(s) = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

A megoldás menete:

A visszacsatolás után kapott zárt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}}{1 + \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}} = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 8}.$$

Hurwitz kritérium alapján:

1. feltétel: a nevező minden együtthatója pozitív: $\forall a_i > 0, i = 0,1,2,3$ teljesül.
2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

A főátlóhoz tartozó aldeterminánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_2| = |2| > 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -2 \neq 0 .$$

Miután a Δ_2 aldeterminánsra nem teljesül az előírt feltétel, ezért a Δ_3 aldetermináns ellenőrzése nélkül belátható, hogy a visszacsatolt kör nem lesz aszimptotikusan stabil.

c) Döntse el az alábbi tagról, hogy milyen k érték esetén lesz aszimptotikus stabil!

$$G(s) = \frac{4}{s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + k} .$$

A megoldás menete:

Hurwitz kritérium alapján:

1. feltétel: a nevező minden együtthatója pozitív: $\forall a_i > 0$, $i = 1,2,3,4$ esetén teljesül, az a_0 együttható esetén a $k > 0$ feltételt kell előírni.
2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{4 \times 4} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} .$$

A főátlóhoz tartozó aldeterminánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_3| = |5| > 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3(a_2 a_1 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = 5(2 \cdot 3 - k \cdot 5) - 3^2 \cdot 1$$

$$=$$

$$= 21 - 25k > 0 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{21}{25} = 0,84 ,$$

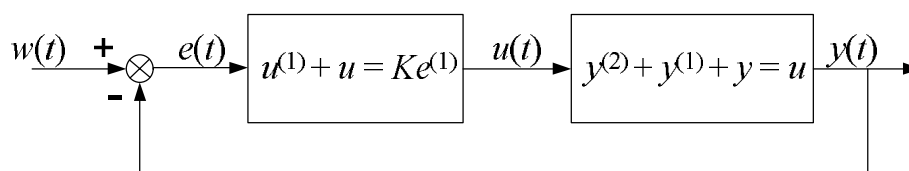
$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_4 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3 a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3^2 - a_1^2 a_4 a_0 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k - k^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 1 \cdot k =$$

$$= k(21 - 25k) > 0 ,$$

innen vagy a $k > 0$ és $k < \frac{21}{25}$ vagy a $k < 0$ és $k > \frac{21}{25}$ lehet matematikai szempontból megoldás. Összevetve az 1. feltételben és a 2. feltételben meghatározott valamennyi megszorítást, csak a $0 < k < 0,84$ tartományban felvett értékekre lesz stabil a rendszer.

d) Tekintse az alábbi rendszert!



Adja meg, hogy milyen K értékre lesz a rendszer aszimptotikusan stabil!

A megoldás menete:

A két átviteli függvény:

$$G_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{Ks}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+s+1}.$$

Az zárt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{Ks}{s^3+2s^2+(2+K)s+1}.$$

A zárt kör stabilitásának vizsgálata a Hurwitz determináns segítségével:

1. feltétel: a nevező együtthatója pozitív: $\forall a_i > 0$, $i = 0,2,3$ esetén teljesül, az a_1 együttható esetén a $K > -2$ feltételt kell előírni.
2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+K & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A főátlóhoz tartozó aldeterminánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_2| = |2| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2+K \end{vmatrix} = 2 \cdot (2+K) - 1 \cdot 1 = 3 + 2K > 0$$

$$\Rightarrow K > -1,5,$$

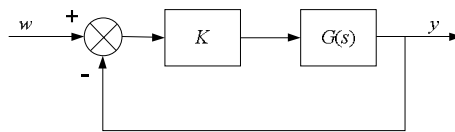
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 = 2(2 + K) - 1 > 0$$

$$\Rightarrow K > -1,5 .$$

Összevetve a feltételeket azt kapjuk, hogy a rendszer stabil, ha $K > -1,5$ feltétel teljesül, ebből fizikai értelmezést figyelembe véve arra következtethetünk, hogy tetszőleges pozitív K értékre a rendszer stabil marad.

3. Stabilitásvizsgálat gyökhelygörbe segítségével

a) Határozza meg az alábbi visszacsatolt kör gyökhelygörbéjét!



$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} .$$

A megoldás menete:

A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{2K}{s^2 + 5s + 4 + 2K} .$$

Az átviteli függvény nevezője alapján a felnyitott kör pólusai:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -4 .$$

A gyökhelygörbének tehát két ága lesz, melyek a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. Az erősítés növelésével mind a két ág a végtelenbe tart.

A gyökhelygörbének a valós tengelyen a $[-4, -1]$ tartományban van szakasza.

Az ágak aszimptotáinak irányyszöge:

$$l = 1: \alpha = \pm \frac{180^\circ}{2} = \pm 90^\circ .$$

A gyökhelygörbe ágai tehát párhuzamosak a képzetes tengellyel, így a tag tetszőleges erősítés mellett megőrzi a stabilitását.

Határozzuk meg a kritikus csillapításhoz tartozó K erősítés értékét!

Kritikus csillapítása ott lesz a rendszernek, ahol a visszacsatolt kör ζ_e eredő csillapítási tényezőjének az értéke 1. A gyökhelygörbén ez a pont ott található, ahol a két pólus egybeesik, azaz kétszeres gyököt kapunk, vagyis ahol a gyökhelygörbe kilép a valós tengelyből. Ebben a pontban a pólusokat

meghatározó képletben a diszkrimináns értéke 0 lesz, amiből K értéke meghatározható:

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4 + 2K)}}{2}$$

$$25 - 4(4 + 2K) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1,125 .$$

Ekkor a visszacsatolt rendszer eredő erősítése, vagyis a hurok átviteli tényező értéke:

$$G_e(s) = \frac{2 \cdot 1,125}{s^2 + 5s + 4 + 2 \cdot 1,125} \quad \Rightarrow \quad K_e = 0,36 .$$

Milyen K értéknél lesz az eredő erősítés $K_e = 1$? Belátható, hogy ez csak $K \rightarrow \infty$ esetén teljesül.

Milyen K értéknél lesz az átmeneti függvény eltérése a bemenettől 5%, vagy annál kisebb? Ez azt jelenti, hogy az eredő erősítésnek legalább 0,95-nek kell lennie, így

$$K_e = 0,95 = \frac{2K}{4 + 2K} \quad \Rightarrow \quad K = 38 .$$

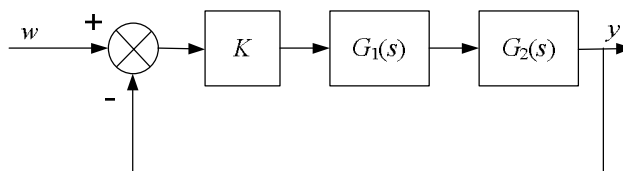
Ekkor a visszacsatolt rendszer további paraméterei:

$$G_e(s) = \frac{76}{s^2 + 5s + 80} ,$$

$$G_e(s) = \frac{K_e \omega_{n,e}^2}{s^2 + 2\zeta_e \omega_{n,e} s + \omega_{n,e}^2} = \frac{0,95 \cdot 80}{s^2 + 5s + 80} \quad \Rightarrow \quad \omega_{n,e} = 8,94 \quad \zeta_e = 0,28 ,$$

tehát a tag a kicsi eredő csillapítási tényező miatt jelentős túllendüléssel, de a nagy természetes frekvencia miatt viszonylag gyorsan beáll az erősítés által meghatározott végértékre.

b) Határozza meg az alábbi visszacsatolt kör gyökhegyörbét!



$$G_1(s) = 1 + \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{2s + 1} .$$

A megoldás menete:

A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{K(s + 1)}{2s^2 + (K + 1)s + K} .$$

Az átviteli függvény nevezője alapján a felnyitott kör pólusai és zérushelye:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{2}, \quad z = -1.$$

A visszacsatolt kör pólusai K függvényében:

$$p_{v,1,2} = \frac{-(K+1) \pm \sqrt{(K+1)^2 - 4 \cdot 2K}}{2 \cdot 2} = \frac{-(K+1) \pm \sqrt{K^2 - 6K + 1}}{4}.$$

A gyökhelygörbének tehát két ága lesz, melyek a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. Az erősítés növelésével az egyik ág a $-\infty$ -be, a másik a felnyitott kör zérushelyébe tart.

A gyökhelygörbének a valós tengelyen a $]-\infty, -1]$ és a $[-0,5, 0]$ tartományokban vannak szakaszai.

A gyökhelygörbe ott kilép a valós tengelyből, ahol a pólusokat meghatározó képlet diszkriminánsa zérus:

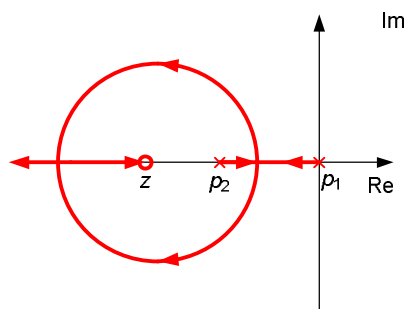
$$K^2 - 6K + 1 = 0 \Rightarrow K_1 = 0,17 \text{ és } K_2 = 5,83.$$

A valós tengelyen meghatározott gyökhelygörbe szakaszok alapján K_1 kilépési pont lesz, míg a K_2 visszatérési pont. A pontok koordinátái:

$$s_1 = -0,29 \text{ és } s_2 = -1,71.$$

A levezetés alapján belátható, hogy a visszacsatolt kör tetszőleges K érték mellett stabil.

A gyökhelygörbe menete:



c) Határozza meg az alábbi tag gyökhelygörcéjét!

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+9s+25)}.$$

A megoldás menete:

A visszacsatolt kör eredő átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+9s+25)+K} = \frac{K}{s^3+10s^2+34s+25+K}$$

Az átviteli függvény nevezője alapján a felnyitott kör pólusai:

$$p_1 = -1, \quad p_{2,3} = -4,5 \pm j2,18$$

A gyökhelygörbének tehát három ága lesz, melyek a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. Az erősítés növelésével mind a három ág a végtelenbe tart.

A gyökhelygörbének a valós tengelyen a $]-\infty, -1]$ tartományban van szakasza.

Az ágak aszimptotáinak irányszöge:

$$l = 1: \alpha = \pm \frac{180^\circ}{3} = \pm 60^\circ; \quad l = 3: \alpha = \frac{3 \cdot 180^\circ}{3} = 180^\circ$$

A képzetes tengely metszéspontja vagyis az erősítés értéke a stabilitás határán a Hurwitz kritérium alapján:

1. feltétel: a nevező minden együtthatója legyen pozitív: $\forall a_i > 0, \quad i = 1,2,3$ teljesül, a_0 -ra $K > -25$ esetén teljesül.
2. feltétel: a Hurwitz determináns ellenőrzése:

A Hurwitz determináns:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 25+K & 0 \\ 1 & 34 & 0 \\ 0 & 10 & 25+K \end{vmatrix}$$

A főátlóhoz tartozó al-determinánsok ellenőrzése

$$\Delta_1 = |a_2| = |10| > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 25+K \\ 1 & 34 \end{vmatrix} = 10 \cdot 34 - 1 \cdot (25+K) \\ \Rightarrow K < 315$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 25+K & 0 \\ 1 & 34 & 0 \\ 0 & 10 & 25+K \end{vmatrix} = \\ = 10 \begin{vmatrix} 34 & 0 \\ 10 & 25+K \end{vmatrix} - (25+K) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25+K \end{vmatrix} = \\ = (25+K)(315-K) \quad \Rightarrow \quad -25 < K < 315$$

A kapott feltételek alapján $K = 315$ esetén lesz a visszacsatolt kör a stabilitás határán.

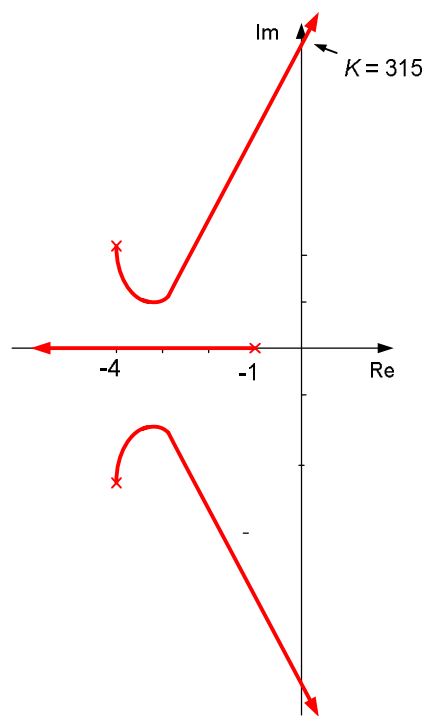
Az aszimptoták metszéspontja:

$$\frac{\sum_{i=1}^3 p_i}{3} = \frac{(-1) + (-4,5 + j2,18) + (-4,5 - j2,18)}{3} = -3,33$$

a valós tengely $-3,33$ pontjában lesz.

A gyökhelygörbe kilépési pontja a valós tengelyből: miután egy valós gyök és egy konjugált komplex gyökpár felel meg a pólusoknak, így nincs többszörös gyök, nincs kilépési pont.

A gyökhelygörbe menete:



7. Mintavételes rendszerek

Az informatikai eszközök fejlődése, megbízhatóságuk növekedése lehetővé tette az egyre szélesebb körű alkalmazásukat a folyamatirányítás területén is. Ezek a rendszerek azonban – a minél szélesebb körű kihasználásuk érdekében – már nem folyamatosan felügyelik az irányított folyamatot, hanem csak a folyamat tulajdonságainak függvényében meghatározott időközönként kapnak információt az irányítandó jellemzőről, illetve avatkoznak be a folyamat működésébe.

E fejezet célja a mintavételes rendszerek leírási lehetőségeinek és legfontosabb tulajdonságainak rövid áttekintése.

7.1. Jelek osztályozása

A folyamatirányításban szereplő jeleket különböző szempontok szerint osztályozhatjuk. A legfontosabb csoportok:

- értékészlet szerint
 - folytonos
 - diszkrét (szakaszos)
- időbeli lefolyás szerint
 - folyamatos
 - diszkrét / mintázott
- meghatározottság szerint
 - determinisztikus (egyértelműen meghatározott)
 - sztochasztikus (véletlenszerű)
- megjelenési forma szerint
 - analóg
 - digitális

A fizikai rendszerek legtöbbször jele a folytonos-folyamatos jelek osztályába tartozik. Ugyanakkor a zajok és zavarások hozzáadódása miatt, ezeket a jeleket sztochasztikusnak, azaz véletlenszerűnek tekinthetjük. A számítógépes folyamatirányításban a folyamatos információból a megadott időközönként elvégzett mintavételezés miatt diszkrét idejű jel lesz. Másrészt, míg a fizikai jel az értelmezési tartományának bármely értékét felveheti, addig a számítógépes számábrázolás véges hosszúsága miatt, a feldolgozott jel már csak kitüntetett értékeknek felelhet meg.

7.2. Mintavételes rendszerek leírása

Mint a bevezetőben is szó volt róla, a továbbiakban mintavételes szabályozás alatt általában a számítógép által irányított rendszereket értjük. Ténylegesen azonban tágabb

fogalomról van szó: minden olyan rendszert mintavételes szabályozásnak tekintünk, ahol a folyamat időállandói és a mintavételezés gyakorisága összemérhetőek.

A mintavételező eljárásokat a következő szempontok alapján lehet csoportosítani:

- mintavételezési idő szerint
 - lineáris, rögzített lefolyású mintavételezésről beszélünk, ha a mintavételezés azonos időközönként történik;
 - nemlineáris, jeltől függő mintavételezés esetében a mintavételezési időköz a jel valamely tulajdonságától, pl. amplitúdójától vagy deriváltjától függ;
 - véletlenszerű vagy statisztikai mintavételezésnél a következő mintavétel időpontja véletlenszerű;
- a mintavételezés időtartama alapján
 - véges idejű, vagyis maga a mintavételezés egy meghatározható időtartamig történik;
 - pillanatszerű, azaz elméletileg 0 idő alatt játszódik le a mintavételezés.

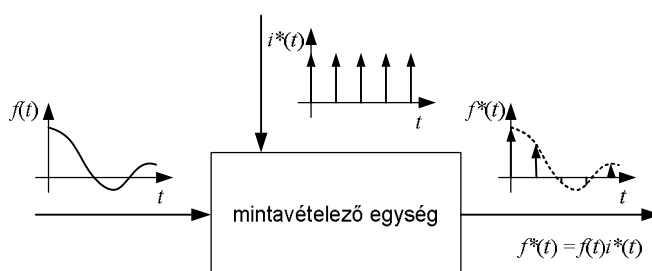
A következőkben lineáris, vagyis rögzített lefolyású, állandó mintavételezési periódusidővel rendelkező mintavételes rendszereket tárgyalunk, és feltételezzük, hogy a mintavételezés pillanatszerűen játszódik le. Ha kettő vagy több mintavételező van a vizsgált rendszerben, akkor azok ún. szinkron módban dolgoznak, vagyis a mintavételezés azonos időközönként és azonos időpontban egyszerre történik valamennyi mintavételező esetében.

A mintavételezés lefolyását a matematikai leírhatóság érdekében a következő módon értelmezhetjük:

- Legyen adott egy $f(t)$ folytonos-folyamatos jel, melyet állandó, T_0 periódusidővel mintavételezünk. Tételezzük fel, hogy maga a mintavételezés Θ ideig tart. A mintavételező egységből kijövő jel az ún. fizikai mintavételezés eredménye, mely a mintavételezés Θ időtartama alatt követi az eredeti folytonos-folyamatos $f(t)$ jelet, majd a következő mintavételezés kezdetéig nulla lesz az értéke.
- Alakítsuk át a fizikai mintavételezés eredményeként kapott szabálytalan négyszög impulzusnak tekinthető jelsorozatot úgy, hogy vegyük állandónak a jel értékét a mintavételezés időtartama alatt. Ennek megfelelően tekintsünk el a jel Θ időtartam alatti változásától, azaz legyen ez időtartam alatt a jelértéke egyenlő a mintavételezés kezdetekor felvett értékkel. Így egy szabályos, a mintavételezés időpontjában felvett jelértéktől függő amplitúdójú négyszögimpulzus függvényt kapunk.
- Noha az egyes négyszögimpulzusok amplitúdója arányos a mintavételezési időpontokhoz tartozó jelek értékével, de ez az arányosság megmarad akkor is, ha a négyszögimpulzusok területét vesszük figyelembe, hiszen a mintavételezés Θ

időtartama minden egyes esetben azonos. Ha azonban a jelet a matematikai kezelhetőség érdekében impulzusszerű jellé alakítjuk át, tehát feltételezzük, hogy a mintavételezés időtartama minden határon túl csökkenthető, akkor a terület csak úgy maradhat állandó, ha ennek az impulzusszerű jelnek az amplitúdója viszont a végtelenbe tart. Ezt az eljárást matematikai mintavételezésnek nevezzük.

Összefoglalva: a mintavételező eljárást impulzussorozat amplitúdó modulációjának tekinthetjük. A mintavételező egység egyik bemenetére a mintavételezendő jel kerül, a másik bemenetre pedig az $i^*(t)$ egységimpulzus sorozat. A rendszer felépítése a 7.1. ábrán látható.



7.1. ábra. A mintavételezés elvi folyamatábrája

A kimeneten olyan impulzusok jelennek meg, melyek területe arányos a bemenő folytonos jel mintavételezési időpontokban felvett értékeivel. (Mióután a területet nehéz ábrázolni, ezért rajzban inkább a nyíl magasságával utalunk a jelértékre.)

Az egyik bemenő jel tehát a folytonos-folyamatos $f(t)$ függvény, melyről feltesszük, hogy a vizsgálat kezdete előtt zérus volt az értéke:

$$f(t), \quad f(t) = 0, \text{ ha } t < 0,$$

a másik bemenet a moduláló jel, vagyis az egységimpulzus sorozat:

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

A mintavételező egység kimenetén pedig a modulált impulzussorozat jelenik meg:

$$f^*(t) = f(t) \cdot i^*(t).$$

A mintavételezett jelre kapott összefüggés a következő módon írhatjuk át:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \\ &= f(t)\delta(t - 0T_0) + f(t)\delta(t - 1T_0) + \dots + f(t)\delta(t - nT_0) + \dots \end{aligned}$$

Mióután az egységimpulzus a $t - nT_0$ időpont kivételével mindenhol zérus, így a kifejezés a következő alakra írható át:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)\delta(t - nT_0) .$$

Következő lépésként Laplace transzformáljuk a kapott kifejezést:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)e^{-nT_0s} .$$

A kapott képlet az $f(t)$ függvény ún. diszkrét Laplace transzformáltját meghatározó kifejezés.

Vezessük be a komplex s változó helyett az ugyancsak komplex z változót, és így megkapjuk a mintavételezett függvény z -transzformáltját:

$$z = e^{Ts} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)z^{-n} .$$

A transzformálhatóság feltétele:

$$|f(nT_0)| \leq M e^{-\alpha nT_0} \quad n \geq n_0 \quad M, \alpha, n_0 > 0 .$$

A levezetés eredményeként kapott képlet egyszerű alakú, de végtelen sort tartalmaz, és az összegképlet felírása nem mindig könnyű. Léteznek más transzformációs képletek is, mint például a komplex függvényteni levezetés eredményeként kapott általános képlet, vagy az alábbi, csak egyszeres pólusokat tartalmazó rendszerek esetében alkalmazható összefüggés:

$$F(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T_0}} ,$$

ahol

$$F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)} \quad \text{a jel Laplace transzformáltja racionális tört alakban,}$$

P a pólusok száma,

p_i az i -dik pólus ($i = 0, 1, 2, \dots, P$),

$F_z(p_i) = F_z(s)|_{s=p_i}$ a számláló polinomjának értéke az $s = p_i$ helyen,

$F_p'(p_i) = \left. \frac{dF_p(s)}{ds} \right|_{s=p_i}$ a nevező polinomja deriváltjának értéke az $s = p_i$ helyen.

Fontos megjegyezni, hogy a z -transzformáció elvégzéséhez felhasznált definiáló képlettől függetlenül, a kapott összefüggés csak a mintavételezési időpontokban van kapcsolatban az eredeti függvénnyel. Ennek következményeként előfordulhat, hogy a mintavételezési időpontokban azonos értéket felvevő függvényeknek azonos lesz a z -

transzformáltja, másrészt az inverz z-transzformáció csak a mintavételezési időpontokhoz tartozó értékeket adja vissza.

Az inverz z-transzformáció képlete:

$$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz .$$

A gyakorlatban az invertálást a következő módokon hajthatjuk végre:

Az egyik lehetőség, hogy az átalakítandó átviteli függvényt olyan egyszerű alakokra, részlettörtekre bontjuk fel, amelyeknek az inverzét már megtaláljuk táblázatban. A módszer előnye, hogy zárt alakú képletet szolgáltat, így tetszőleges mintavételezési időponthoz tartozó érték azonnal meghatározható. Hátránya, hogy a racionális törtfüggvény alakra hozás nem mindig egyszerű.

Egy másik lehetőséget kínál a negatív kitevős hatványsorba fejtés. Ennek értelmezéséhez használjuk fel a következőket:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \delta(t - nT_0) = \\ &= f(0T_0) \delta(t - 0T_0) + f(1T_0) \delta(t - 1T_0) + \dots f(nT_0) \delta(t - nT_0) + \dots , \\ F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) z^{-n} = f(0T_0) z^0 + f(1T_0) z^{-1} + \dots f(nT_0) z^{-n} + \dots \end{aligned}$$

Az impulzussorozatnak és z-transzformáltjának kifejtett alakjaiból látható, hogy a két kifejezésben szereplő, az impulzusok nagyságára utaló együtthatók megegyeznek, míg a z negatív kitevős hatványai pedig az egységimpulzusok megfelelő mintavételi időpontokhoz tartozó z-transzformáltjainak felelnek meg. Az eljárás előnye, hogy amennyiben a vizsgált jel z-transzformáltja racionális törtfüggvény formájában adott, akkor a negatív kitevős hatványsor – tetszőleges fokszámú polinomok esetében – polinomosztással, akár algoritmizálhatóan is előállítható. Hátránya, hogy ha egy adott mintavételezési időponthoz tartozó jelértéket akarjuk meghatározni, akkor valamennyi, az adott időpont előtti értéket ki kell számítani. Kimenőjelek esetében a racionális törtfüggvény forma előállítását lehetővé teszi, hogy a folytonos időtartományhoz hasonlóan, a diszkrét időtartományban is értelmezhető a tag vagy tagcsoport operátor tartománybeli modellje, és ennek, valamint a bemenő jel z-transzformáltjának segítségével a kimenő jel z-transzformáltja meghatározható.

A z-transzformáció elvégzése során, a Laplace-transzformációhoz hasonlóan, különböző tételeket kell figyelembe venni. Ezeket a szabályokat a 7.1. táblázatban foglaltuk össze.

7.1. táblázat. A z-transzformációra vonatkozó főbb összefüggések

Összefüggés	Időfüggvény / Laplace transzformált	z-transzformált
Laplace transzformáció értelmezése	$f(nT_0)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \cdot z^{-n}$
egyszeres pólusoknál		$F(z) = \sum_{i=1}^p \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}}$
Inverz Laplace transzformáció	$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) \cdot z^{n-1} dz$	$F(z)$
Áttérés az s és z-sík között definíció szerint	$s \rightarrow \frac{1}{T_0} \ln z$	$z \rightarrow e^{sT_0}$
előrefelé vett differenciák	$s \rightarrow \frac{z-1}{T_0}$	$z \rightarrow 1 + sT_0$
visszafelé vett differenciák	$s \rightarrow \frac{z-1}{zT_0}$	$z \rightarrow \frac{1}{1 - sT_0}$
Tustin módszer	$s \rightarrow \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}$	$z \rightarrow \frac{1 + sT_0/2}{1 - sT_0/2}$
Linearitás, szuperpozíció	$cf(nT_0)$ $c_1 f_1(nT_0) + c_2 f_2(nT_0)$	$cF(nT_0)$ $c_1 F_1(nT_0) + c_2 F_2(nT_0)$
Differenciahányados visszafelé vett	$\frac{f(nT_0) - f((n-1)T_0)}{T_0}$	$\frac{z-1}{zT_0} F(z)$
előrefelé vett	$\frac{f((n+1)T_0) - f(nT_0)}{T_0}$	$\frac{z-1}{T_0} F(z)$
Eltolási tétel	$f(kT_0 - nT_0)$	$z^{-n} F(z)$
	$f(kT_0 + nT_0)$	$z^m \left(F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(iT_0) \cdot z^{-i} \right)$
Kezdetiérték-tétel		$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z)$
Végérték-tétel		$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$

A Laplace transzformációhoz hasonlóan a z -transzformációnál is megadjuk a fontosabb függvények transzformáltját. A 7.2. táblázat tartalmazza a folytonos és diszkrét időfüggvény alakot, a Laplace- és a z -transzformáltakat, így egyaránt alkalmas a folytonos időtartományhoz tartozó függvényalakból a diszkrét operátortartományban alkalmazható alak előállítására, vagy a z -transzformált alakból kiindulva a diszkrét időtartományi alak előállítására.

7.2. táblázat. Nevezetes függvények z -transzformáltjai

$f(t)$	$F(s)$	$f(nT_0) = f^*(t)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1 ($n=0$); 0 ($n \neq 0$)	1
$\delta(t-kT_h)$	$e^{-kT_h s}$	1 ($n=k$); 0 ($n \neq k$)	$\frac{1}{z^k}$
1(t)	$\frac{1}{s}$	1 vagy 1(n)	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	nT_0	$\frac{zT_0}{(z-1)^2}$
$0,5t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(nT_0)^2}{2}$	$\frac{(z+1)zT_0^2}{2(z-1)^3}$
$t^3/6$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{(nT_0)^3}{6}$	$\frac{T_0^3}{6} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-anT_0}	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
		a^n vagy $a^n \cdot 1(n)$	$\frac{z}{z-a}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$nT_0 e^{-anT_0}$	$\frac{zT_0 e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-anT_0} - e^{-bnT_0}}{b-a}$	$\frac{1}{b-a} \cdot \frac{z(e^{-aT_0} - e^{-bT_0})}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$
$1 - e^{-aT}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-anT_0}$	$\frac{z(1 - e^{-aT_0})}{(z-1)(z - e^{-aT_0})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega nT_0$	$\frac{z \sin(\omega T_0)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_0) + 1}$

$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega n T_0$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_0))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_0) + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-anT_0} \sin \omega n T_0$	$\frac{ze^{-aT_0} \sin(\omega T_0)}{z^2 - 2e^{-aT_0} z \cos(\omega T_0) + e^{-2aT_0}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-anT_0} \cos \omega n T_0$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_0} \cos(\omega T_0)}{z^2 - 2e^{-aT_0} z \cos(\omega T_0) + e^{-2aT_0}}$

7.3. Folytonos bemenet – kimenet modell diszkretizálása

Folytonos időtartományban az alábbi bemenet – kimenet modellt alkalmaztuk a dinamikus tagok illetve tagcsoportok jellemzésére:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t),$$

ahol $y(t)$ – a kimenő jel,

$u(t)$ – a bemenő jel,

$$x^{(i)}(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad x = \{y, u\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

a_i, b_j – konstans együtthatók.

Formailag ez a modell egy n -ed rendű differenciálegyenlet, amit a diszkrét időtartományban való alkalmazáshoz differenciaegyenlet formára kell hozni. Az átalakítás a differenciálhányados differenciahányadosal való közelítésén alapul:

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{\Delta x}{T_0}.$$

Az analízisben tanultaknak megfelelően a differenciálhányadost kétféleképpen írhatjuk fel:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

A kétféle felírási módon alapul a differenciálhányados előrefelé, illetve visszafelé vett közelítésének módszere.

Az előrefelé vett differenciák módszere, vagy Euler módszer a következő módon vezethető le:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t + T_0) - x(t)}{T_0} = \frac{x(kT_0 + T_0) - x(kT_0)}{T_0} = \frac{x((k + 1)T_0) - x(kT_0)}{T_0},$$

tehát a differenciálhányados értékét a $(k+1)$ -edik és k -edik mintavételezési időpontokhoz tartozó jelértékeknek a mintavételezési időközre vonatkoztatott különbségével közelítjük.

Ez a közelítés csak akkor lehetséges, ha a vizsgált rendszer valamennyi mérési adata rendelkezésre áll, azaz a modellt a mérési adatok alapján illesztjük a rendszer viselkedésére.

A differenciálhányados Laplace-transzformáltját és a kapott közelítő alak z -transzformáltját felírva megkapjuk, hogy a közelítés következtében hogyan alakul az áttérés a két – folytonos és diszkrét – operátortartomány között:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) \\ Z\left(\frac{x((k+1)T_0) - x(kT_0)}{T_0}\right) = \frac{zX(z) - X(z)}{T_0} = \frac{z-1}{T_0}X(z) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &\rightarrow \frac{z-1}{T_0} \\ z &\rightarrow 1 + T_0s \end{aligned} .$$

A levezetésnek megfelelően, az előrefelé vett differenciákon alapuló közelítés során a két operátortartomány közötti áttérés, az eredeti definícióban megadott $z = e^{sT_0}$, illetve $s = \frac{1}{T_0} \ln z$ képletekhez képest, jelentősen módosul.

A mérnöki gyakorlatban általánosabb a visszafelé vett differenciák használata, mivel ez on line módon, a rendszer működése közben is alkalmazható. A közelítésnek a levezetése a következő:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x(kT_0 - T_0)}{T_0} = \frac{x(kT_0) - x((k-1)T_0)}{T_0},$$

tehát a differenciálhányados értékét a k -edik és $(k-1)$ -edik mintavételezési időpontokhoz tartozó jelértékeknek – az időintervallum hosszának figyelembe vételével vett – különbségével közelítjük. Ezek az értékek vizsgálat közben is folyamatosan rendelkezésre állnak.

A visszafelé vett differenciák esetében is meghatározhatjuk, hogy a közelítés milyen torzulást okoz a két operátortartomány közötti áttérésben:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) \\ Z\left(\frac{x(kT_0) - x((k+1)T_0)}{T_0}\right) = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T_0} = \frac{z-1}{zT_0}X(z) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &\rightarrow \frac{z-1}{zT_0} \\ z &\rightarrow \frac{1}{1 - T_0s} \end{aligned} .$$

A közelítés tehát ebben az esetben is lényeges eltérés okoz a definíció szerinti transzformációs képletekhez képest, ami az átirított modell tulajdonságainak módosulását fogja okozni.

A szakirodalomban további közelítő képletek is találhatóak a folytonos és a diszkrét operátortartományok közötti áttérés közelítésére. Ezek közül itt az ún. Tustin-módszert, vagy bilineáris közelítésen alapuló eljárást említjük meg. A numerikus integrálásnál használt trapéz módszert alkalmazva végeredményként a következő transzformációs képleteket kapjuk:

$$s \rightarrow \frac{2z-1}{T_0z+1} \quad z \rightarrow \frac{1 + \frac{sT_0}{2}}{1 - \frac{sT_0}{2}}$$

A bemenet – kimenet modellek differenciaegyenlet formájában történő felírását kétféle módon végezhetjük el. A differenciálhányados közelítéséhez hasonlóan ebben az esetben is a különbség a két alak között az, hogy a modell felírásánál a jelent szimbolizáló kT_0 időponti jelértékekhez képest a többi jelérték annál újabb, vagy korábbi. Induljunk ki az alábbi folytonos bemenet – kimenet modellből:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

Ennek a modellnek az előre felé vett differenciákon alapuló közelítése a következő lesz:

$$\begin{aligned} c_n y((k+n)T_0) + c_{n-1} y((k+n-1)T_0) + \dots + c_1 y((k+1)T_0) + c_0 y(kT_0) = \\ = d_m u((k+m)T_0) + \dots + d_0 u(kT_0) \end{aligned}$$

Ez a modell off line módon alkalmazható, tehát a mérés elvégzése után, az adatok illesztésével használható.

A visszafelé vett differenciákon alapuló közelítés:

$$\begin{aligned} e_0 y(kT_0) + e_1 y((k-1)T_0) + \dots + e_{n-1} y((k-n+1)T_0) + e_n y((k-n)T_0) = \\ = f_m u((k-d)T_0) + \dots + f_0 u((k-d-m)T_0) \end{aligned}$$

A modellben alkalmazott d érték a bemenet késleltetését adja meg a kimenetnek képest ($d = n - m$). A kapott modell on line módon, vagyis megfigyelés közben is alkalmazható, hiszen itt a korábban kapott adatokból következtetünk a pillanatnyi értékre.

Mindkét modell esetében az együtthatók eltérő betűvel való jelölése arra utal, hogy az átírás során a konkrét értékük megváltozhat.

A kapott modellek hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a folytonos bemenet – kimenet modell, azaz lineárisak, időinvariánsak, amennyiben az együtthatók konstansok. Az oksági szabály a diszkrét idejű modellnél is érvényes ($n \geq m$), és a differenciaegyenletekhez is meg kell adni a megfelelő számú kezdeti feltételt.

7.4. Differenciaegyenletek megoldása

A diszkrét időtartományban alkalmazott bemenet – kimenet modellek lineáris, állandó együtthatós differenciaegyenletek, melyek megoldására különböző lehetőségeink vannak. Ebben a fejezetben egy egyszerű példa segítségével a különböző lehetőségeket nézzük végig, elsősorban az alkalmazhatóságot szem előtt tartva, így nem részletezve az elméleti hátteret.

7.4.1. Differenciaegyenletek analitikus megoldása

A differenciaegyenletek analitikus megoldása, – hasonlóan a differenciálegyenletekéhez, – két lépésből áll. Először megkeressük a homogén differenciaegyenlet $y_{ho}(k)$ általános megoldását, majd hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy $y_{iho}(k)$ partikuláris megoldását:

$$y(k) = y_{ho}(k) + y_{iho}(k) .$$

(Ebben a részben eltekintünk a T_0 mintavételezési periódusidő feltüntetésétől.)

Oldjuk meg példaként a következő differenciaegyenletet:

$$y(k) + 0,5y(k - 1) = 3 , \quad y(-1) = 4 .$$

1. Az $y_{ho}(k)$ homogén megoldás meghatározása

A homogén differenciaegyenlet:

$$y(k) + 0,5y(k - 1) = 0 .$$

Keressük ennek megoldását egy alkalmas, $y(k) = C\alpha^k$ alakban, ahol a C és az α meghatározandó értékek! Ekkor

$$y(k - 1) = C\alpha^{k-1} .$$

Behelyettesítve a megoldást a homogén egyenletbe:

$$C\alpha^k + 0,5C\alpha^{k-1} = 0 ,$$

$$C\alpha^{k-1}(\alpha + 0,5) = 0 ,$$

innen a $C = 0$ és az $\alpha = 0$ triviális megoldásokat kizárva:

$$\alpha + 0,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -0,5 .$$

Így a differenciaegyenlet homogén általános megoldása:

$$y_{ho}(k) = C(-0,5)^{k-1} .$$

2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése

A kiindulási egyenletünk

$$y(k) + 0,5y(k - 1) = 3$$

alakú volt, melynél a bemeneti oldalon egy konstans szerepelt. Próbáljuk meg ezért a megoldást

$$y_{iho}(k) = A$$

alakban, vagyis konstans formájában keresni. Behelyettesítve a feltételezett megoldást:

$$A + 0,5A = 3 ,$$

$$A = 2$$

értéket kapunk, vagyis tetszőleges mintavételezési időpontban az inhomogén partikuláris megoldás:

$$y_{iho}(k) = 2$$

lesz.

3. A teljes megoldás:

$$y(k) = y_{ho}(k) + y_{iho}(k) = C(-0,5)^k + 2$$

4. A C konstans meghatározása

A C konstans értékének meghatározásához használjuk fel az $y(-1) = 4$ kezdeti feltételt. Legyen $k = -1$:

$$\begin{aligned} y(-1) &= C(-0,5)^{-1} + 2, \\ 4 &= C(-0,5)^{-1} + 2 \quad \Rightarrow \quad C = -1. \end{aligned}$$

Tehát a teljes megoldás

$$y(k) = 2 - (-0,5)^k.$$

A modell az egyes mintavételi időpontokban a következő értékeket veszi fel:

k	$y(k)$	$0,5y(k-1)$	$y(k) + 0,5y(k-1)$
0	1	2	3
1	2,5	0,5	3
2	1,75	1,25	3
3	2,125	0,875	3
⋮			
5	2,031	0,969	3
⋮			
10	1,999	1,001	3

Mint a táblázatból látható, a megoldás konvergál a meghatározott inhomogén partikuláris megoldás felé.

7.4.2. Differenciaegyenlet megoldása z-transzformáció segítségével

Induljunk ki ebben az esetben is az analitikus megoldásnál alkalmazott példából és oldjuk meg a következő differenciaegyenletet z-transzformáció segítségével.

$$y(k) + 0,5y(k-1) = 3 \cdot 1(t), \quad y(-1) = 4.$$

A bemenetről most feltételeztük, hogy az egy a vizsgálat kezdő időpontjában megjelenő, 3 egységnyi amplitúdójú ugrásfüggvény. Végezzük el a z-transzformációt a megadott kezdeti feltételt figyelembe véve:

$$\begin{aligned}
 Y(z) + 0,5(z^{-1}Y(z) + y(-1)) &= 3 \frac{z}{z-1}, \\
 Y(z) + 0,5z^{-1}Y(z) + 0,5 \cdot 4 &= 3 \frac{z}{z-1}, \\
 (1 + 0,5z^{-1})Y(z) &= \frac{z+2}{z-1}, \\
 Y(z) &= \frac{z+2}{(z-1)(1+0,5z^{-1})} = \frac{z^2+2z}{z^2-0,5z-0,5}.
 \end{aligned}$$

Az invertáláshoz alakítsuk át a következő alakra:

$$\begin{aligned}
 \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z+2}{(z-1)(z+0,5)}, \\
 \frac{z+2}{(z-1)(z+0,5)} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+0,5} \quad \Rightarrow \quad A=2, \quad B \Rightarrow -1, \\
 \frac{Y(z)}{z} &= 2 \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+0,5}, \\
 Y(z) &= 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+0,5}.
 \end{aligned}$$

A kapott részlettörtekhez tartozó inverz alakokat a z-transzformációs táblázatból kikeresve:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{z-1} &\Leftrightarrow 1(k) & \frac{z}{z-(-0,5)} &\Leftrightarrow (-0,5)^k, \\
 y(k) &= 2 \cdot 1(k) - (-0,5)^k
 \end{aligned}$$

megoldást kapjuk, ami megfelel az analitikus megoldás eredményének. Mindkét megoldás közös jellemzője, hogy egy tetszőleges k mintavételezési időponthoz tartozó jelértéket egyszerű behelyettesítéssel egy lépésben meghatározhatjuk.

7.4.3. Differenciaegyenlet megoldása iteratív úton

Magasabb fokszámú differenciaegyenletek esetében sem az analitikus út, sem a z-transzformáció alkalmazásával végzett megoldás nem lesz egyszerű. Ilyenkor különböző iteratív megoldásokkal érdemes próbálkozni. Az egyik ilyen lehetőség a differenciaegyenlet lépésről-lépésre történő megoldása. Példaként ebben az esetben is a már vizsgált egyenletet oldjuk meg így:

$$y(k) + 0,5y(k-1) = 3, \quad y(-1) = 4.$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$y(k) = -0,5y(k-1) + 3 .$$

Ismerve a $k = -1$ időponthoz tartozó értéket, határozzuk meg $y(k)$ értékét az egymást követő mintavételi időpontokban:

$$k = 0 \quad y(0) = -0,5y(-1) + 3 = -0,5 \cdot 4 + 3 = 1 ,$$

$$k = 1 \quad y(1) = -0,5y(0) + 3 = -0,5 \cdot 1 + 3 = 2,5 ,$$

$$k = 2 \quad y(2) = -0,5y(1) + 3 = -0,5 \cdot 2,5 + 3 = 1,75 ,$$

$$k = 3 \quad y(3) = -0,5y(2) + 3 = -0,5 \cdot 1,75 + 3 = 2,125 .$$

Összevetve az analitikus, illetve a z -transzformációt alkalmazó megoldásokkal a módszer feltétlen előnye az egyszerűsége, illetve könnyű algoritmizálhatósága. Hátránya viszont, hogy egy lépésben nem kapjuk meg az egy adott mintavételi időponthoz tartozó eredményt, hanem csak a korábbi értékek meghatározása után állítható elő.

7.4.4. Kimenet meghatározása polinom osztással

Ugyancsak iteratív jellegű megoldást jelent, ha előállítjuk a kimeneti jelet negatív kitevős hatványsoros alakban. Ebben az esetben induljunk ki a már eddig használt példából:

$$y(k) + 0,5y(k-1) = 3 , \quad y(-1) = 4$$

Végezzük el a z -transzformációt ebben az esetben is a megadott kezdeti feltételt figyelembe véve:

$$Y(z) + 0,5(z^{-1}Y(z) + y(-1)) = 3 \frac{z}{z-1} ,$$

$$Y(z) = \frac{z+2}{(z-1)(1+0,5z^{-1})} = \frac{z^2+2z}{z^2-0,5z-0,5} .$$

A kapott racionális törtfüggvényt fejtük negatív kitevős hatványsoros alakba polinomosztás segítségével.

$$\begin{array}{r} z^2 + 2z : z^2 - 0,5z - 0,5 = 1z^0 + 2,5z^{-1} + 1,75z^{-2} + 2,125z^{-3} + \dots \\ \underline{-(z^2 - 0,5z - 0,5)} \\ 2,5z + 0,5 \\ \underline{-(2,5z - 1,25 - 1,25z^{-1})} \\ 1,75 + 1,25z^{-1} \\ \underline{-(1,75 - 0,875z^{-1} - 0,875z^{-2})} \\ 2,125z^{-1} + 0,875z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

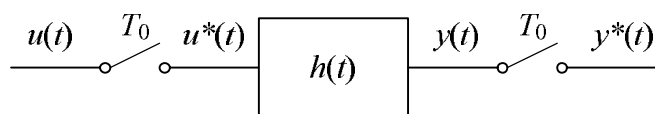
Az eredményt, vagyis a kimenetnek az egyes mintavételi időpontokban felvett értékeit, a kapott polinom együtthatói szolgáltatják. Ennek magyarázata az inverz z-transzformációt bemutató részben található.

7.5. Az impulzus-átviteli függvény

A folytonos időtartományban bevezetett átviteli függvény fogalom a vizsgált rendszer operátor tartománybeli modelljét szolgáltatta. Segítségével egyrészt adott bemenethez meghatározható volt a kimeneti válaszfüggvény, másrészt az együtthatók megfelelő rendezésével értelmezhetők a rendszertulajdonságokat hordozó paraméterek. Az átviteli függvény definíció szerint a kimenet és a bemenet zérus kezdeti feltételek mellett vett Laplace transzformáltjainak hányadosa:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} \Big|_{\text{zérus k.f.}}$$

Az átviteli függvényhez hasonló fogalom mintavételes rendszerek esetében is értelmezhető. Ennek levezetéséhez induljunk ki egy egyszerű mintavételezett tagból, melynél feltételezzük, hogy a tag folyamatos működésű, de a bemenet csak adott mintavételezési időpontokban hat a rendszerre, és a kimenetet is csak ezekben az időpontokban határozzuk meg. A rendszer vázlata a 7.3. ábrán látható.



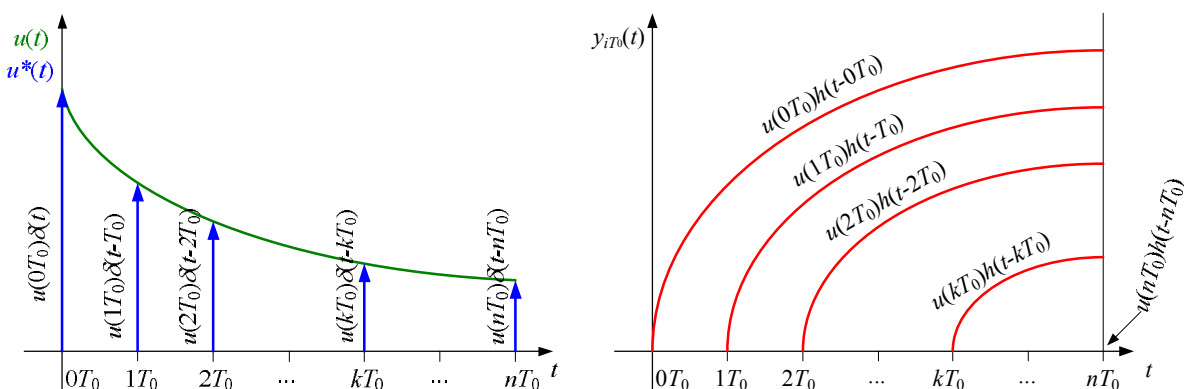
7.3. ábra Mintavételezett bemenetű és kimenetű tag

A 7.3. ábra jelölései a következők:

- $u(t)$ - a folyamatos idejű bemenet,
- $u^*(t)$ - a mintavételezett bemenet,
- $h(t)$ - a folyamatos működésű tag súlyfüggvénye,
- $y(t)$ - a tag folyamatos idejű kimenete,
- $y^*(t)$ - a mintavételezett kimenet,
- T_0 - a mintavételezési periódusidő.

A korábbiaknak megfelelően a két mintavételező szinkronban dolgozik, azaz megegyezik a mintavételezési periódusidejük, és egyszerre történik mind a bemenő jel, mind a kimenet mintavételezése. A tag működésének jellemzésére – a súlyfüggvény és az átviteli függvény közötti ismert kapcsolat alapján – itt a súlyfüggvényt alkalmaztuk.

A mintavételezett bemenet és kimenet értelmezését végezzük el a 7.4. ábra alapján:



7.4. ábra. Mintavételezett bemenet és kimenet közötti kapcsolat

A baloldali ábrán a bemenet mintavételezése látható. A folytonos $u(t)$ bemenetet T_0 időközönként mintavételezve kapjuk meg az mintavételezett $u^*(t)$ bemenő jelet, mely az egyes mintavételi időpontokban megjelenő Dirac-szerű impulzusok sorozatából áll. Az egyes impulzusok területe a bemenő jel adott mintavételezési időpontjában felvett értékének felel meg. Az impulzusszerű bemenetek hatására a kimeneten megjelenő jel összetevőkre bontható fel. A jobb oldali ábrán láthatóak ezek a folytonos jelösszetevők, az $y_{iT_0}(t)$ az iT_0 -dik mintavételezési időpontban a bemenetet érő $u(iT_0)\delta(t-iT_0)$ impulzusra adott folytonos jelösszetevő. Ha a bemeneten impulzusszerű jeleket alkalmazunk a matematikai mintavételezésnek megfelelően, akkor a kimeneten kapott válaszfüggvények súlyfüggvénynek tekinthetők. Így ezeket a folytonos jelösszetevőket, mint súlyfüggvényeket írhatjuk le az $u(iT_0)h(t-iT_0)$ összefüggés segítségével. A kimenet értéke egy adott mintavételezési időpontban e folytonos jelösszetevők adott időponthoz tartozó értékeinek az összege lesz. Egy jelösszetevő értéke egy tetszőleges $n > i$ mintavételezési időpontban $u(iT_0)h(nT_0-iT_0)$ lesz. Ha $n = i$, akkor ennek a jelösszetevőnek az értéke az egyidejű mintavételezés miatt nulla lesz, ha $n < i$ esetében egy későbbi időpontban jelentkező bemenetről van szó, így az ehhez tartozó jelösszetevőt szintén nullának tekinthetjük.

Határozzuk a kimenet értékét egy tetszőleges nT_0 mintavételezési időpontban:

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(nT_0 - kT_0)u(kT_0) .$$

Írjuk fel az $y^*(t)$ mintavételezett kimenet időfüggvényét:

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0)\delta(t - nT_0) .$$

Helyettesítsük be az nT_0 időponthoz tartozó $y(nT_0)$ kimenetre vonatkozó összefüggést:

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(nT_0 - kT_0)u(kT_0)\delta(t - nT_0) ,$$

Vezessünk be egy új, n_k indexváltozót a következő módon: $n_k = n - k$, tehát $n = n_k + k$, így

$$y^*(t) = \sum_{n=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(n_k T_0)u(kT_0)\delta(t - n_k T_0 - kT_0) .$$

A kapott kifejezésnek állítsuk elő a diszkrét Laplace transzformáltját:

$$Y^*(s) = \sum_{n=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(n_k T_0)u(kT_0)e^{-(n_k+k)T_0 s} .$$

Miután $h(n_k T_0) = 0$, ha $n_k < 0$, így az egymásba ágyazott két összegzés szétbontható:

$$Y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n_k T_0)e^{-n_k T_0 s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)e^{-kT_0 s} .$$

Megvizsgálva az így kapott kifejezéseket megállapíthatjuk, hogy a szorzat első tényezője a súlyfüggvény diszkrét Laplace transzformáltjának, vagyis a diszkrét átviteli függvénynek, a második pedig a bemenő jel diszkrét Laplace transzformáltjának felel meg. Így az

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot U^*(s)$$

összefüggést kapjuk. Elvégezve az $z = e^{sT_0}$ behelyettesítést, akkor az alábbi:

$$Y(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} h(n_k T_0)z^{-n_k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)z^{-k} = G(z)U(z)$$

összefüggéshez jutunk, mely alapján definiálhatjuk az impulzus-átviteli függvényt:

$$G(z) = \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{\text{zérus k.f.}} = \left. \frac{\mathcal{Z}(y^*(t))}{\mathcal{Z}(u^*(t))} \right|_{\text{zérus k.f.}} .$$

Az impulzus-átviteli függvény tehát a mintavételezett kimenet és bemenet z -transzformáltjainak hányadosa zérus kezdeti feltételek mellett. Mint ahogy korábban is megjegyeztük, az impulzus-átviteli függvény csak a mintavételezési időpontokban lesz a rendszer modellje, miután csak ezekben a pontokban van kapcsolatban az eredeti folytonos idejű modellel.

Hasonlóan az átviteli függvényhez, az impulzus-átviteli függvényt is racionális törtfüggvény alakban adhatjuk meg, de ahogy a bemenet – kimenet modellnél is felírtuk az előre és visszafelé vett alakot, itt is használhatunk pozitív és negatív kitevős polinomokat:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} =$$

$$= \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + \dots + b_{m-1} z^{-m-d+1} + b_m z^{-m-d}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} .$$

A negatív kitevős alaknak a differenciaegyenletek iteratív úton történő megoldásánál van fontos szerepe.

7.6. Eredő impulzus-átviteli függvény meghatározása

Tagcsoportot tartalmazó mintavételes rendszerek eredő impulzus-átviteli függvényének meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy a mintavételező szervek mely tagok között helyezkednek el. Ennek figyelembe vételével a következőkben megvizsgáljuk, hogy a jelformáló tagok és a mintavételezők különböző sorrendű kapcsolásának milyen hatása van az eredő impulzus-átviteli függvényre. Az egyes esetekben feltételezzük, hogy a tagok folyamatos működésűek, így egyaránt jellemezhetőek a $G(s)$ átviteli függvénnyel, illetve a $h(t)$ súlyfüggvénnyel, és a kimenetükön kapott $y(t)$ jel is folyamatos.

- Mintavételező előtti és utáni jelek:

$$\begin{array}{c} \frac{u(t)}{U(s)} \quad \begin{array}{c} T_0 \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \frac{u^*(t)}{U^*(s)} \\ \hline U(z) \end{array}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} , \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u^*(t)\} .$$

- Kimenő jel mintavételezése:

$$\begin{array}{c} \frac{u(t)}{U(s)} \quad \boxed{h(t) \quad G(s)} \quad \frac{y(t)}{Y(s)} \quad \begin{array}{c} T_0 \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \frac{y^*(t)}{Y^*(s)} \\ \hline Y(z) \end{array}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) , \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \triangleq GU(z) .$$

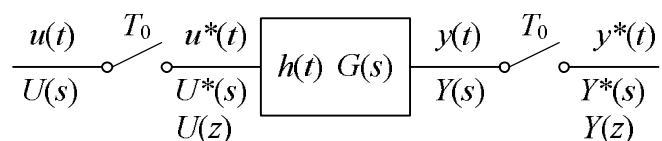
(Megjegyezzük, hogy a szakirodalom széles körben használják a $GU(z)$ rövidítést a Laplace transzformáltak szorzata z -transzformáltjának rövidítésére, de $GU(z) \neq G(z)U(z)$!)

- Bemenő jel mintavételezése:

$$\begin{array}{c} \frac{u(t)}{U(s)} \quad \begin{array}{c} T_0 \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \frac{u^*(t)}{U^*(s)} \quad \boxed{h(t) \quad G(s)} \quad \frac{y(t)}{Y(s)} \\ \hline U(z) \end{array}$$

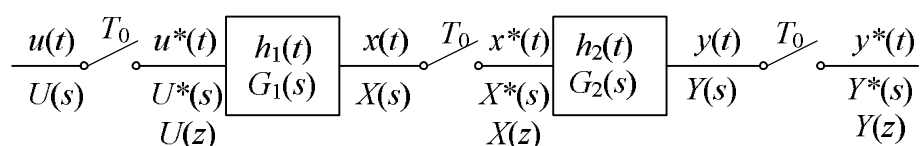
$$Y(s) = G(s)U^*(s) .$$

- Bemenő és kimenő jel egyidejű mintavételezése:



$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s), \quad Y(z) = G(z)U(z) .$$

- Sorba kapcsolt tagok, minden tag előtt és után van mintavételező:



$$X^*(s) = G_1^*(s)U^*(s) , \quad Y^*(s) = G_2^*(s)X^*(s) ,$$

$$X(z) = G_1(z)U(z) , \quad Y(z) = G_2(z)X(z) ,$$

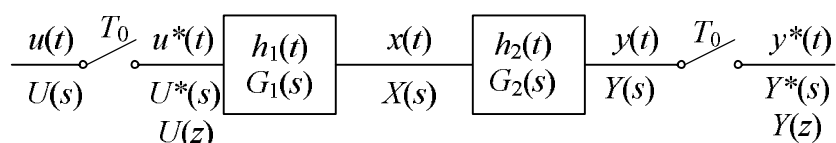
$$Y^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)U^*(s) ,$$

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)U(z) ,$$

$$G_e(z) = G_1(z)G_2(z) .$$

A levezetésnek megfelelően, ha mindenegyes sorba kapcsolt tag előtt és után van mintavételező, akkor az eredő impulzus-átviteli függvény kiszámítása nagyon hasonló a folytonos idejű rendszerek operátortartománybeli eredőjének meghatározásához: az eredő impulzus-átviteli függvényt az egyes tagok impulzus-átviteli függvényeinek szorzataként kapjuk meg.

- Sorba kapcsolt tagok, de a tagok között nincs mintavételező:



$$Y(s) = G_2(s)X(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) ,$$

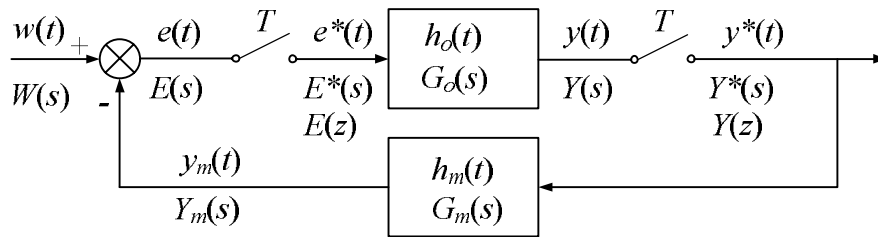
$$Y^*(s) = \mathcal{L}^*\{G_1(s)G_2(s)\}U^*(s) ,$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}U(z) \triangleq G_1G_2(z)U(z) ,$$

$$G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} \triangleq G_1G_2(z) .$$

Ha sorba kapcsolt tagok között nincs mintavételező, akkor az eredő impulzus-átviteli függvényt a tagok átviteli függvényeinek szorzatát z-transzformálva kapjuk meg.

- Visszacatolt kör tagok előtt és után mintavételezővel:



$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s)Y^*(s) ,$$

$$Y(s) = G_o(s)E^*(s) , \quad Y^*(s) = G_o^*(s)E^*(s) ,$$

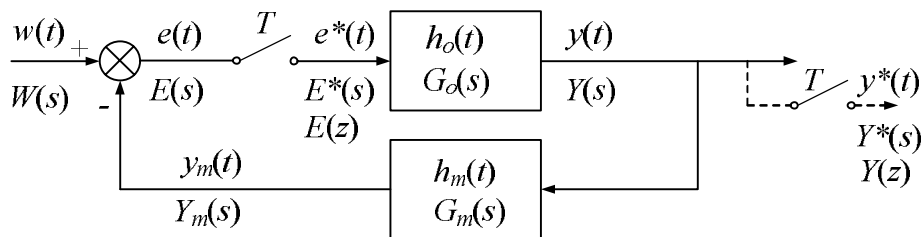
$$Y^*(s) = G_o^*(s)E^*(s) = G_o^*(s)W^*(s) - G_o^*(s)G_m^*(s)Y^*(s) ,$$

$$G_e^*(s) = \frac{Y^*(s)}{W^*(s)} = \frac{G_o^*(s)}{1 + G_o^*(s)G_m^*(s)} ,$$

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)G_m(z)} .$$

Ha a visszacsatolt kör minden jelformáló tagja előtt és után van mintavételező, akkor az eredő átviteli függvényt a folytonos esethez hasonlóan határozzuk meg. Tehát az előremenő ág eredő impulzus-átviteli függvényét elosztjuk az előremenő ág eredő impulzus-átviteli és a visszatérő ág eredő impulzus-átviteli függvénye szorzatának 1-gyel növelt értékével.

- Visszacatolt kör, de a visszacsatolásnál nincs mintavételezés:



$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s)Y(s) = W(s) - G_o(s)G_m(s)E^*(s) .$$

Diszkrét Laplace transzformálva a kapott kifejezést, majd kifejezve $E^*(s)$ -t:

$$E^*(s) = W^*(s) - \mathcal{L}^*\{G_o(s)G_m(s)\}E^*(s) ,$$

$$E^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + \mathcal{L}^*\{G_o(s)G_m(s)\}} .$$

Fejezzük ki $Y^*(s)$ -t, a kimenet diszkrét Laplace-transzformáltját, majd helyettesítsük be az $E^*(s)$ -re kapott kifejezést, és rendezzük át az átviteli függvények kapcsán megszokott alakra:

$$Y^*(s) = G_o^*(s)E^*(s) = G_o^*(s) \frac{W^*(s)}{1 + \mathcal{L}^*\{G_o(s)G_m(s)\}} ,$$

$$\frac{Y^*(s)}{W^*(s)} = \frac{G_o^*(s)}{1 + \mathcal{L}^*\{G_o(s)G_m(s)\}} .$$

A z-transzformáció elvégzése után megkapjuk az eredő impulzus-átviteli függvényt:

$$Y(z) = G_o(z)E(z) = G_o(z) \frac{W(z)}{1 + \mathcal{Z}\{G_o(s)G_m(s)\}} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o G_m(z)} W(z) ,$$

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o G_m(z)} .$$

7.7. Diszkrét idejű rendszerek erősítésének meghatározása

A folytonos idejű rendszereknél az erősítés (arányossági tényező) volt az a paraméter, ami megadta, hogy ugrás jellegű bemenet esetén egy stabil jelformáló tag a bemenő jelet hányszorosára (vagy hányadrészére) változtatja meg a kimeneten. Az alábbi általános bemenet-kimenet modellből levezettük, hogy az erősítés a kimenő és a bemenő jel nulladrendű deriváltjainak együttthatóiból származtatható.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t) .$$

Ennek magyarázata az volt, hogy stacionárius állapotban a jelek változását leíró deriváltak értéke zérus lesz, így a két jel arányát az együttthatók arányával lehet kifejezni:

$$a_0 y_{ss}(t) = b_0 u_{ss}(t) \quad \Rightarrow \quad K = \frac{y_{ss}(t)}{u_{ss}(t)} = \frac{b_0}{a_0} ,$$

ahol az ss index a jel állandósult állapotbeli (steady state) értékére utal. Az erősítés ugyancsak meghatározható az átviteli függvényből, ahol a polinomok konstans tagjainak hányadosaként kapjuk meg az értékét. További lehetőség volt a végérték-tétel alkalmazása, melynek eredményeként – stabil rendszerek egységugrásra adott válaszát vizsgálva – ismét az erősítést kaptuk.

Vizsgáljuk meg, hogy diszkrét idejű rendszerek esetében, hasonló módszereket alkalmazva, milyen eredményt kapunk. Induljunk ki a diszkrét bemenet – kimenet modell visszafelé vett differenciák segítségével felvett alakjából:

$$\begin{aligned} a_0 y(kT_0) + a_1 y((k-1)T_0) + \dots + a_{n-1} y((k-n+1)T_0) + a_n y((k-n)T_0) = \\ = b_m u((k-d)T_0) + \dots + b_0 u((k-d-m)T_0) . \end{aligned}$$

Legyen a bemenet az egységugrás, így ennek értéke tetszőleges mintavételezési időpontban 1 lesz:

$$u((k-d)T_0) = \dots = u((k-d-m)T_0) = 1(kT_0) .$$

Tételezzük fel, hogy a rendszer stabil, így a kimenet a tranziens állapot megszűnte után állandósult értéket vesz fel:

$$y(kT_0) = y((k-1)T_0) = \dots = y((k-n+1)T_0) = a_n y((k-n)T_0) = y_{ss} .$$

Így állandósult állapotban a modell a következő alakú lesz:

$$a_0 y_{ss} + a_1 y_{ss} + \dots + a_{n-1} y_{ss} + a_n y_{ss} = b_m 1((k-d)T_0) + \dots + b_0 1((k-d-m)T_0) .$$

Miután az $1(kT_0)$ függvény értéke minden mintavételezési időpontban 1, így a kimenet:

$$y_{ss} = \frac{b_m + \dots + b_0}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n} 1(kT_0) .$$

Innen általánosítva az erősítést, mint a kimenő jel és a bemenő jel állandósult állapotbeli viszonyát ugrásfüggvény bemenet esetére:

$$K = \frac{y_{ss}}{u} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i}{\sum_{j=0}^n a_j} ,$$

tehát diszkrét idejű rendszerek esetében az erősítést a bemenet-kimenet modellben szereplő polinomok együtthatói összegének hányadosaként lehet meghatározni. A számlálóban a bemeneti oldal együtthatóinak összege, a nevezőben a kimeneti oldal együtthatóinak összege szerepel.

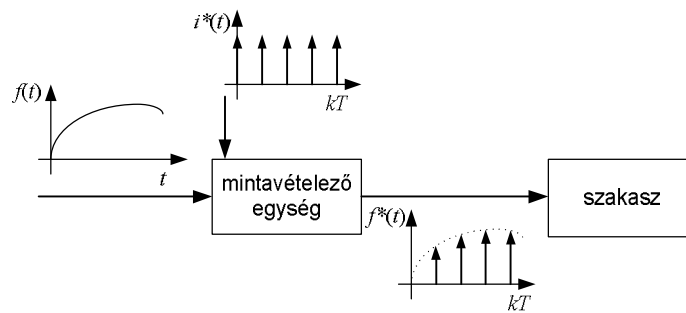
Hasonló eredményre jutunk, ha a végérték-tételt alkalmazzuk. Legyen a bemenet az egységugrás függvény, ekkor:

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1} ,$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = K . \end{aligned}$$

7.8. Tartószervek

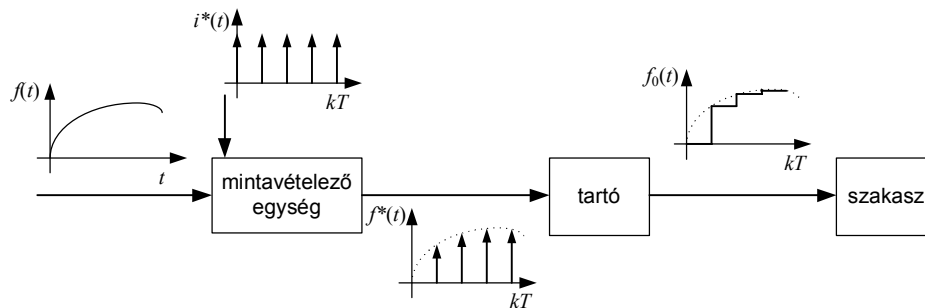
Az eddig tárgyalt esetekben a mintavételezés értelmezésénél leírtaknak megfelelően a bemenő jel impulzusok formájában kerül a jelformáló tag bemenetére. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy például egy szabályzási körben a szabályozó által meghatározott beavatkozó jel, mint impulzus kerül kiküldésre az irányított szakasz felé az adott mintavételi időpontban. Ezután, a következő mintavételi időpontig nincs újabb információ a beavatkozó jel értékére, azaz a kiküldött jel értéke nulla. A leírt rendszer hatásvázlata a 7.5. ábrán látható:



7.5. ábra. Mintavételező tagcsoport hatásvázlata

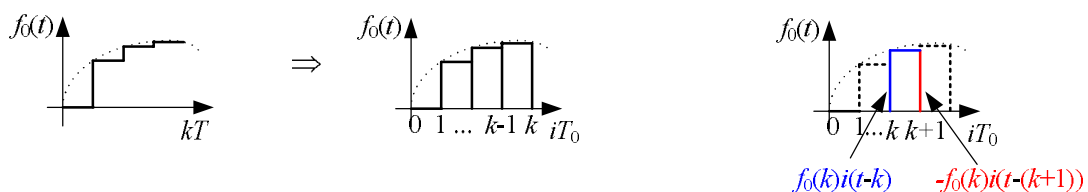
A gyakorlatban léteznek olyan rendszerek, melyeket ilyen impulzusok segítségével lehet irányítani, de általában nem ez a jellemző. Azokban az esetekben, ahol ez az impulzusok kiküldésén alapuló eljárás nem megfelelő, célszerű egy olyan egységet beépíteni, amely az előző mintavételi időponthoz tartozó információt vagy megőrzi a következő mintavételezési időintervallumon, vagy korábbi jelértékeket is figyelembe véve becslés alapján határozza meg a jel értékének esetleges változását erre az intervallumra. Ezeket az egységeket tartószerveknek nevezzük.

A legegyszerűbb esetben a tartószerv feladata, hogy őrizze meg az utolsó mintavételi időponthoz tartozó jel értékét mindaddig, amíg újabb információ nem érkezik. Egy ilyen, ún. nulladrendű tartószervvel kiegészített rendszer vázlata látható a 7.6. ábrán.



7.6. ábra. Tartószervvel kiegészített mintavételező tagcsoport hatásvázlata

A nulladrendű tartószerv leírásához tételezzük fel, hogy az egyes mintavételezési időpontokhoz tartozó jelváltozásokat négyszögimpulzusok segítségével írjuk le. Ennek megfelelően egy adott mintavételezési időpontban megjelenő jelhez tartozik egy, a jelértéknek megfelelő amplitúdójú ugrásfüggvény, mely a következő mintavételezési időpontban egy ugyanolyan amplitúdójú, de negatív előjelű ugrással zárul.



A nulladrendű tartó leírása ennek alapján:

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) (1(t - nT_0) - 1(t - (n+1)T_0)) .$$

Laplace transzformálva a kapott kifejezést:

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) \frac{e^{-nT_0s} - e^{-(n+1)T_0s}}{s} = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) e^{-nT_0s} .$$

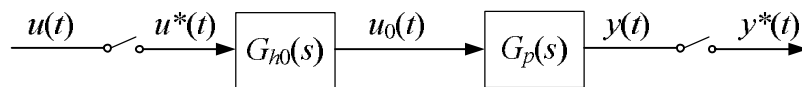
A kapott kifejezésben a $\sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) e^{-nT_0s}$ megfelel a $F^*(s)$ -nek, az $f^*(t)$ függvény diszkrét Laplace transzformáltjának. Így

$$F_0(s) = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s} F^*(s) ,$$

melyből a nulladrendű tartószerv átviteli függvénye meghatározható:

$$G_{h0}(s) = \frac{F_0(s)}{F^*(s)} = \frac{1 - e^{-T_0s}}{s} .$$

Ha a teljes tagsoport – mintavételező, nulladrendű tartó, objektum – eredő átviteli és impulzus-átviteli függvényét írjuk fel, akkor a következőt kapjuk:



– átviteli függvény:

$$G_e^*(s) = \mathcal{L}^* (G_{h0}(s)G_p(s)) ,$$

– impulzus-átviteli függvény:

$$\begin{aligned} G_e(z) &= \mathcal{Z} (G_{h0}(s)G_p(s)) = \mathcal{Z} \left(\frac{1 - e^{-T_0s}}{s} G_p(s) \right) = \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s)}{s} - e^{-T_0s} \frac{G_p(s)}{s} \right) = \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s)}{s} \right) . \end{aligned}$$

Az eredő impulzus-átviteli függvény felírásánál figyelembe vettük, hogy az e^{-T_0s} tényező való szorzás időtartományban egy mintavételi időegységgel való eltolásnak felel meg.

7.9. Mintavételes rendszerek stabilitása

A mintavételes rendszerek stabilitásvizsgálatát a folytonos idejű rendszerekhez hasonlóan végezhetjük el. Ennek megfelelően a következőkben bemutatjuk az ott bevezetett stabilitásdefiníciók, a korlátos bemenet – korlátos kimenet (BIBO) stabilitás, illetve az

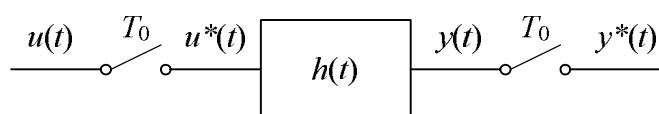
aszimptotikus stabilitás fogalmának diszkrét idejű rendszerekre értelmezett definíciót, illetve az ellenőrzésükre szolgáló tételeket.

7.9.1. Diszkrét BIBO stabilitás

Egy lineáris mintavételező rendszert korlátos bemenet – korlátos kimenet (BIBO) stabilitásának nevezünk, ha korlátos bemenő impulzussorozat hatására keletkező kimenő impulzussorozat is korlátos:

$$u(kT_0) < M_1, \quad k_0 \leq k < \infty \quad \Rightarrow \quad y(kT_0) < M_2, \quad k_0 \leq k < \infty, \quad M_1, M_2 < \infty.$$

Legyen a vizsgálandó rendszer egy mintavételezett bemenettel és kimenettel működő tag, az alábbi ábrának megfelelően:



Az impulzus-átviteli függvény levezetésénél beláttuk, hogy egy tetszőleges, nT_0 mintavételi időponthoz tartozó kimenet, az alábbi összefüggéssel határozható meg:

$$y(nT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) u(nT_0 - kT_0).$$

Legyen az $|u(nT_0 - kT_0)| \leq M_1$ korlátos bemenet, és vegyük mindkét oldal abszolút értékét:

$$|y(nT_0)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) u(nT_0 - kT_0) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| |u(nT_0 - kT_0)| \leq M_1 \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)|,$$

tehát $y(nT_0)$ (vagy $y^*(t)$) korlátos, ha \Rightarrow

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| \leq M_2 < \infty$$

Összefoglalva: A lineáris mintavételező rendszer BIBO stabilitásának elégséges feltétele, hogy a zárt rendszer súlyfüggvényének mintavételezési időpontokban vett abszolút értékeiből alkotott végtelen sor korlátos legyen.

Belátható, hogy a megadott feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétel is. Ennek bizonyítása a következő:

Legyen a bemenet $|u(nT_0 - kT_0)| > 1$, valamint $u(nT_0 - kT_0)$ és $h(kT_0)$ előjelei egyezzenek meg. Így

$$|y(nT_0)| = \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)| |u(nT_0 - kT_0)| \geq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)|,$$

tehát, ha $\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_0)|$ nem korlátos, n tetszőleges értékére, akkor $y(kT_0)$ sem lesz korlátos.

Ha megvizsgáljuk a diszkrét BIBO stabilitás teljesülésére kapott tétel, és a folytonos idejű rendszerekre vonatkozó tétel:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

közötti hasonlóságot, akkor megállapíthatjuk, hogy mind a két esetben a súlyfüggvényre vonatkozó korlátosság ellenőrzésével igazolható a BIBO stabilitás teljesülése. Míg a folytonos időtartományban a súlyfüggvény abszolút integráljának a korlátossága a feltétel, addig a mintavételes rendszerek esetében a BIBO stabilitás eldöntéséhez végtelen sorok konvergenciáját kell vizsgálni.

7.9.2. Aszimptotikus stabilitás

Az aszimptotikus stabilitás bevezetéséhez a folytonos idejű rendszerek esetében értelmeztük a magára hagyott rendszerek fogalmát, vagyis zérus bemenet és adott kezdeti feltételek mellett vizsgáltuk a rendszerek viselkedését. Mintavételes rendszerek esetében hasonló feltételek mellett fogalmazhatjuk meg az aszimptotikus stabilitás definícióját.

Egy lineáris mintavételező rendszert aszimptotikusan stabilnak nevezünk, ha $y(kT_0) = 0$ bemeneti sorozat és $y(-1T_0), y(-2T_0), \dots, y(-(n-1)T_0) \neq 0$ kezdeti feltételek esetén a kimeneti sorozat zérushoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(nT_0) = 0 .$$

Az aszimptotikus stabilitás vizsgálatát az átviteli függvény pólusai alapján végeztük el a folytonos idejű rendszerek esetében. A mintavételes rendszerek esetében is az impulzus-átviteli függvény nevezőjének a gyökeit, vagyis a pólusokat meghatározva tudunk a stabilitásról dönteni a következő tételeknek megfelelően.

Egy mintavételes rendszer akkor és csak akkor *aszimptotikusan stabil*, ha az eredő impulzus-átviteli függvényének valamennyi pólusa abszolút értékben 1-nél kisebb:

$$a \text{ rendszer stabil} \Leftrightarrow \forall p_i : |p_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n ,$$

tehát, a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, valamennyi pólus az origó középpontú, egység sugarú körön belül található.

Egy mintavételes rendszer *a stabilitás határán* van, ha az eredő impulzus-átviteli függvényének van, vagy vannak olyan pólusai, melyeknek az abszolút értéke egyenlő 1-gyel, de ha vannak további pólusai, akkor azok abszolút értékben 1-nél kisebbek:

$$stabilitás \text{ határa} \Leftrightarrow \exists p_k : |p_k| = 1, \quad \forall p_i (i \neq k) : |p_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n .$$

Geometriai szempontból ez a feltétel azt jelenti, hogy az impulzus-átviteli függvénynek van legalább egy olyan pólusa, vagy póluspárja, amely az egységsugarú kör ívén

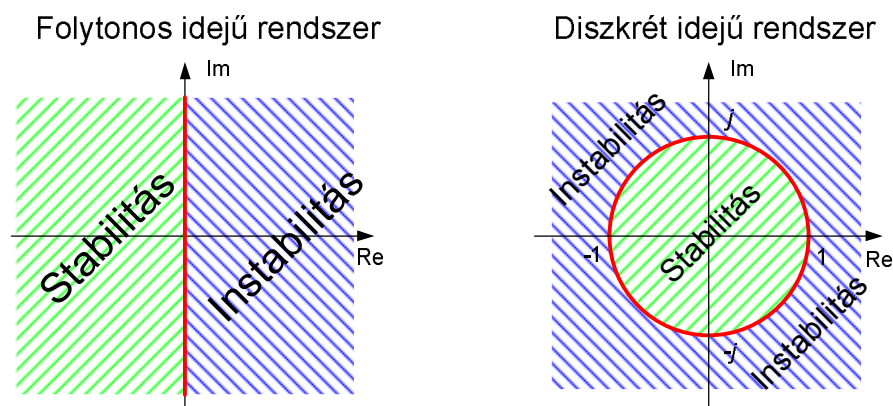
helyezkedik el, és az esetleges további pólusokra igaz, hogy azok az egység sugarú kör belsejében találhatók.

Egy mintavételes rendszer *instabil*, ha az eredő impulzus-átviteli függvényének van legalább egy olyan gyöke vagy gyökkpárja, melynek abszolút értéke nagyobb 1-nél:

$$a \text{ rendszer instabil} \Leftrightarrow \exists p_i : |p_i| > 1, \quad i = 1, \dots, n .$$

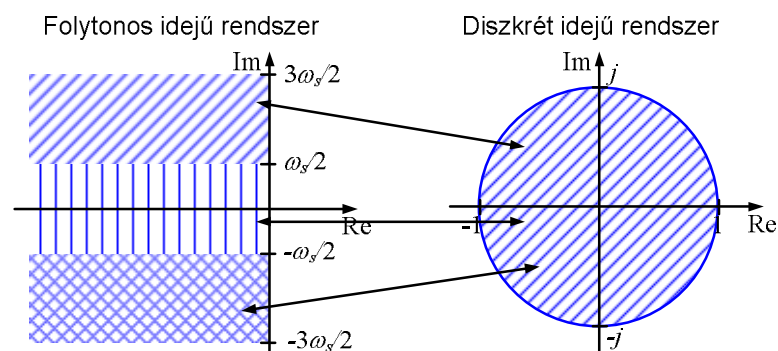
Instabil rendszer esetén, a komplex síkon ábrázolva a pólusokat, legalább egy pólus vagy póluspár az egységsugarú körön kívül van.

Összevetve a folytonos és a diszkrét idejű rendszerek aszimptotikus stabilitására vonatkozó tételeket belátható, hogy a folytonos idejű rendszerek esetében a stabilitási tartománynak megfelelő negatív valós részű pólusokat tartalmazó baloldali félsíkot az origó középpontú egységsugarú kör belsejére képezzük le diszkrét idejű rendszernél. A folytonos idejű rendszereknél a stabilitás határát jelentő képzetes tengely a diszkrét idejű esetben az egységsugarú kör íve lesz, illetve folytonos esetben az instabilitást jelentő jobb oldali (pozitív valós részű pólusokat tartalmazó) félsík diszkrét idejű rendszereknél az egységsugarú körön kívüli területnek feleltethető meg, ahogy ez a 7.7. ábrán látható.



7.7. ábra. Stabilitási tartományok közötti megfeleltetés

A folytonos idejű és a diszkrét idejű rendszer stabilitási tartománya közötti leképezés a mintavételi körfrekvencia függvényében meghatározható sávokban egy-egy értelmű, ahogy ez a 7.8. ábrán látszik.



7.8. ábra. A stabilitási tartományok közötti leképezés

A differenciálhányados differenciahányadossal való közelítésének, így a folytonos időtartományból diszkrét időtartományba való áttérésnek különböző lehetőségeit bemutatva levezettük, hogy a közelítő áttérés következtében az operátortartományok közötti kapcsolat hogyan módosul. A z -transzformáció bevezetésekor definiált összefüggés:

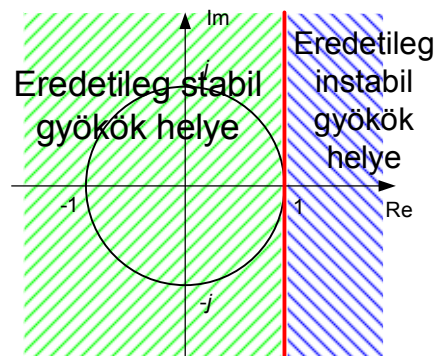
$$z = e^{sT_0} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_0} \ln z$$

közelítő alakja a választott módszer – előre felé vett, illetve visszafelé vett differenciák vagy a Tustin módszer – függvényében más és más lesz. Ennek következtében viszont nemcsak a pólusok helye változik meg, hanem a stabilitási tartomány leképezése is torzul.

Az előre felé vett differenciák (Euler módszer) esetében a következő közelítő képletet kaptuk:

$$z \approx 1 + sT_0 \Leftrightarrow s \approx \frac{z - 1}{T_0} .$$

A módosított leképezés következtében a folytonos idejű rendszerek bal oldali félsíkját, vagyis a stabilitási tartományt a diszkrét idejű rendszerek esetében egy olyan félsíkra képezzük le, melynek határvonala párhuzamos a képzetes tengellyel és a +1 pontban metszi a valós tengelyt. Ennek megfelelően a közelítő leképezés miatt lesznek olyan folytonos idejű modellek, amelyeknek diszkrétizálás után a pólusai az egységsugarú körbe esnek, tehát stabilak maradnak, lesznek olyanok, amelyeknek a pólusai áttérés után az egységsugarú körön kívülre kerülnek, így instabilak lesznek. A folytonos idejű instabil modellek esetében nincs változás: ami instabil volt, az instabil marad a diszkrétizálás után is, míg a stabilitás határán lévő rendszereknél csak a +1 pont közös, egyébként az ilyen rendszerek instabillá válnak. A megváltozott stabilitási tartományok a 7.9. ábrán láthatók. Fontos kiemelni, hogy itt is és a következőkben is a stabilitás megváltozása a rendszert leíró modellekre vonatkozik.

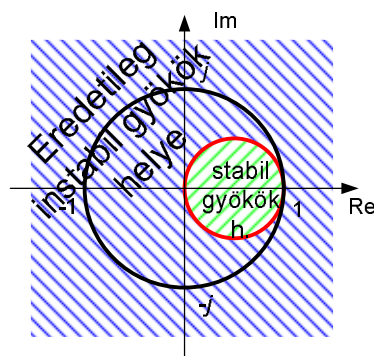


7.9. ábra. A stabilitási tartományok leképezése az előre felé vett differenciák közelítésénél

A visszafelé vett differenciáknál az operátortartományok közötti áttérésre a következő képleteket kaptuk:

$$z \approx \frac{1}{1 - sT_0} \Leftrightarrow s \approx \frac{z - 1}{zT_0} .$$

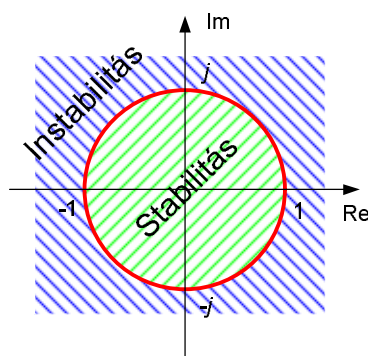
Ez a közelítés azt okozza, hogy a folytonos idejű rendszerek bal oldali félsíkját egy +0,5 középpontú és 0,5 sugarú körbe képezzük le. Ennek megfelelően, a folytonos időtartományban stabil rendszerek stabilak maradnak, viszont az eredetileg instabil rendszerek esetében előfordulhat, hogy a diszkrétizált rendszer pólusai az egységsugarú kör ezen kis körön kívüli részébe esnek, és így az ártírt modelljük stabilná válik, ahogy ez a 7.10. ábrán látszik.



7.10. ábra. A stabilitási tartományok leképezése a visszafelé vett differenciák közelítésénél

A Tustin módszer esetében alkalmazott közelítő képletek nem változtatják meg a stabilitási tartományok leképezését, tehát ebben az esetben nem kell számolni a modell viselkedésének ilyen torzulásával (lásd 7.11. ábra). A pólusok helye azonban itt is eltérhet a definíció szerinti áttérésnél kapott pólusokétól, így a transziens viselkedés jellemzői változhatnak.

$$z \approx \frac{1 + \frac{sT_0}{2}}{1 - \frac{sT_0}{2}} \Leftrightarrow s \approx \frac{2}{zT_0} \frac{z - 1}{z + 1}$$



7.11. ábra. A stabilitási tartományok leképezése a Tustin-módszeren alapuló közelítésnél

7.9.3. Stabilitásvizsgálati módszerek

A folytonos idejű rendszerekhez hasonlóan, a diszkrét idejű rendszerek esetében is a stabilitásra vonatkozó tételek segítségével a pólusok ismeretében egyértelműen eldönthető a vizsgált tag vagy tagcsoport modelljének stabilitása. A problémát ebben az esetben is az jelenti, hogy magasabb fokszámú rendszerek esetében, tehát ha az átviteli függvény nevezőjében lévő polinom harmad- vagy annál magasabb fokú, akkor numerikus eszközök szükségesek a vizsgálathoz. Bár ezek az eszközök az informatika terjedésével általában rendelkezésre állnak, a következőkben példák segítségével bemutatunk két, a diszkrét idejű rendszerek stabilitásának ellenőrzésére szolgáló viszonylag egyszerű módszert.

Jury-teszt

A Jury-teszt a vizsgálandó rendszer eredő átviteli függvénye nevezőjének együtthatói alapján határozza meg a stabilitást.

Legyen az eredő átviteli függvény egy negyedrendű rendszer esetében a következő általános alakú

$$G(z) = \frac{1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} .$$

A teszt menete a következő. Írjuk fel a nevező együtthatóit, majd írjuk fel alá újra, de fordított sorrendben:

$$\begin{array}{cccccc} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ & a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} .$$

Határozzunk meg egy α_4 korrekciós tényezőt, majd ezzel korrigáljuk az egyes együtthatókat:

$$\alpha_4 = \frac{a_0}{a_4} \quad a'_i = a_i - \alpha_4 a_{4-i} \quad i = 4, 3, 2, 1 .$$

Belátható, hogy a korrekció eredményeként az a'_0 együtthatóra nullát kapunk, így az együtthatók száma eggyel csökken. Folytassuk az eljárást az előző lépéshez hasonlóan, tehát írjuk le fordított sorrendben az együtthatókat, majd határozzuk meg a következő korrekciós tényezőt, és végezzük el az együtthatók módosítását. Az ismertett eljárást addig végezzük, míg végül egy korrigált együttható marad:

$$\begin{array}{cccc} a'_4 & a'_3 & a'_2 & a'_1 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{array} \quad \alpha_3 = \frac{a'_1}{a'_4} , \quad a''_i = a'_i - \alpha_3 a'_{4-i} , \quad i = 4, 3, 2 ,$$

$$\begin{array}{ccc} a''_4 & a''_3 & a''_2 \\ a''_2 & a''_3 & a''_4 \end{array} \quad \alpha_2 = \frac{a''_2}{a''_4} , \quad a'''_i = a''_i - \alpha_2 a''_{4-i} , \quad i = 4, 3 ,$$

$$\begin{array}{cc} a'''_4 & a'''_3 \\ a'''_3 & a'''_4 \end{array} \quad \alpha_1 = \frac{a'''_3}{a'''_4} , \quad a''''_i = a'''_i - \alpha_1 a'''_{4-i} , \quad i = 4 .$$

$$a''''_4 .$$

A diszkrét idejű rendszer akkor és csak akkor stabil, ha a korrigált együtthatók közül a legnagyobb indexű, tehát példánkban az

$$a_4 \quad a_4' \quad a_4'' \quad a_4''' \quad a_4''''$$

mindegyike pozitív.

w-teszt

A diszkrét idejű rendszer stabilitásának ellenőrzésére egy másik lehetőséget kínál az ún. w-teszt. Ennél a módszernél azt a tényt használjuk ki, hogy mint azt a Tustin módszer esetében is láttuk, a bilineáris transzformációk nem torzítják a stabilitási tartományokat, azaz a segítségükkel végzett átírások után az eredetileg stabil folytonos idejű modellek stabilak maradnak diszkrétizálás után is, és az instabil modellek esetében sincs változás. Alkalmazva ezt az elvet, a módszer lényege az, hogy

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

egyszerű bilineáris képlet segítségével transzformáljuk az eredő átviteli függvényt, majd a kapott átviteli függvényre alkalmazzuk a Hurwitz-kritériumot.

7.10. Gyakorló feladatok – mintavételes rendszerek

Példák z- és inverz z-transzformációra

16. Határozza meg a következő függvények z-transzformáltjait!

a) $f_1(t) = 1(t)$

I. megoldás

Mivel $f_1(t) = 1$, ha $t \geq 0$, ezért az $f^*(t)$ függvény megegyezik az $i^*(t)$ impulzussorozattal:

$$f_1^*(t) = i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) .$$

Így a diszkrét Laplace transzformált

$$F_1^*(s) = I^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT_0 s} ,$$

a z-transzformált:

$$F_1(z) = I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} .$$

A kapott geometriai sor összegezhető, ha

$$|e^{-T_0s}| = |z^{-1}| < 1$$

akkor

$$I^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_0s}} \quad I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

II. megoldás

Végezzük el a transzformációt az egyszeres pólusok esetén alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján:

$$F(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}}$$

Az $1(t)$ függvény Laplace transzformáltja

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

A kifejezésnek

- egy pólusa van, $P = 1$, a $p_1 = 0$ helyen,
- a számláló polinomja $F_z(s) = 1$, így $F_z(p_1) = 1$,
- a nevező polinomja $F_p(s) = s$, deriváltja $\frac{dF_p(s)}{ds} = 1$, így $F_p'(p_1) = 1$,

tehát

$$F_1(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 \cdot 0}} = \frac{z}{z - 1}$$

b) $f_2(t) = e^{-at}$

I. megoldás

A mintavételezett függvény:

$$f_2^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} \cdot \delta(t - nT_0) .$$

Ebből a diszkrét Laplace transzformált

$$F_2^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} \cdot e^{-nT_0s},$$

a z-transzformált:

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT_0} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT_0} \cdot z^{-1})^n.$$

A kapott geometriai sor összegezhető, ha

$$|e^{-T_0s}| = |z^{-1}| < 1$$

akkor

$$F_2^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-aT_0} e^{T_0s}} \quad F_2(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_0} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

II. megoldás

Végezzük el a transzformációt az egyszeres pólusok esetén alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján:

$$F(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}}$$

Az e^{-at} függvény Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s + a}$$

A kifejezésnek

- egy pólusa van, $P = 1$, a $p_1 = -a$ helyen,
- a számláló polinomja $F_z(s) = 1$, így $F_z(p_1) = 1$,
- a nevező polinomja $F_p(s) = s+a$, deriváltja $\frac{dF_p(s)}{ds} = 1$, így $F_z'(p_1) = 1$,

tehát

$$F_2(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 \cdot (-a)}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

c) $F_3(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

I. megoldás

Tételezzük fel, hogy $a \neq b$, és végezzük el a transzformációt az egyszeres pólusok esetén alkalmazható, zárt alakú kifejezést szolgáltató képlet alapján:

$$F(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}}$$

A kifejezésnek

- két pólusa van, $P = 2$, a $p_1 = -a$ és a $p_2 = -b$ helyen,
- a számláló polinomja $F_z(s) = 1$, így $F_z(p_1) = 1$,
- a nevező polinomja $F_p(s) = s^2 + (a+b)s + ab$, deriváltja $\frac{dF_p(s)}{ds} = 2s + a + b$, így $F_z'(p_1) = b - a$, $F_z'(p_2) = a - b$,

tehát

$$\begin{aligned} F_{3d}(z) &= \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} = \frac{1}{b - a} \cdot \frac{z}{z - e^{-aT_0}} + \frac{1}{a - b} \cdot \frac{z}{z - e^{-bT_0}} = \\ &= \frac{1}{a - b} \cdot \frac{z(e^{-bT_0} - e^{-aT_0})}{z^2 - (e^{-aT_0} + e^{-bT_0})z + e^{-(a+b)T_0}} \end{aligned}$$

A közelítő módszerek hatásának bemutatására, írjuk át e fenti alakot az ott levezetett képletekkel.

II. megoldás – Előrefelé vett differenciák módszere

Alkalmazzuk az előrefelé vett differenciákon alapuló közelítésnél levezetett képletet:

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{T_0} .$$

Ekkor

$$F_3(s) = \frac{1}{(s + a)(s + b)} = \frac{1}{s^2 + (a + b)s + ab} ,$$

behelyettesítve a közelítő képletet:

$$\begin{aligned} F_{3e}(z) &\approx \frac{1}{\left(\frac{z - 1}{T_0}\right)^2 + (a + b)\frac{z - 1}{T_0} + ab} = \\ &= \frac{T_0^2}{z^2 + ((a + b)T_0 - 2)z + abT_0^2 - (a + b)T_0 + 1} \end{aligned}$$

III. megoldás – Visszafelé vett differenciák módszere

Alkalmazzuk a visszafelé vett differenciákon alapuló közelítésnél levezetett képletet:

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{zT_0} .$$

Ekkor

$$F_3(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{s^2 + (a+b)s + ab} ,$$

behelyettesítve a közelítő képletet:

$$\begin{aligned} F_{3v}(z) &\approx \frac{1}{\left(\frac{z-1}{zT_0}\right)^2 + (a+b)\frac{z-1}{zT_0} + ab} = \\ &= \frac{T_0^2 z}{((a+b)T_0 + 1)z^2 + (abT_0 - (a+b)T_0 - 2)z + 1} \end{aligned}$$

IV. megoldás – Tustin módszer módszere

Alkalmazzuk a Tustin módszer bilineáris helyettesítő képletet:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1} .$$

Ekkor

$$F_3(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{s^2 + (a+b)s + ab} ,$$

behelyettesítve a közelítő képletet:

$$\begin{aligned} F_{3T}(z) &\approx \frac{1}{\left(\frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + (a+b)\frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1} + ab} = \\ &= \frac{T_0^2 z^2 + 2T_0^2 z + T_0^2}{(abT_0^2 + 2(a+b)T_0 + 4)z^2 - (8 + (a+b - 2ab)T_0)z + 4 - 2abT_0 + abT_0^2} \end{aligned}$$

Összehasonlítva a definíció alapján elvégzett átírás és a közelítő képletek alkalmazásának eredményeként kapott alakokat megállapíthatjuk, hogy míg a nevező, az eredeti átviteli függvénynek megfelelően, valamennyi esetben másodfokú polinom, addig a számláló fokszáma az alkalmazott módszertől függően eltérő.

d) $f_4(nT_0) = 0,1^{nT_0}$

A mintavételezett függvény:

$$f_4(nT_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0,1^{nT_0} \cdot \delta(t - nT_0) .$$

Behelyettesítve z-transzformáció képletébe:

$$F_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 0,1^{nT_0} \cdot z^{-n} = 1 + 0,1z^{-1} + 0,1^2z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - 0,1z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,1}$$

$$|0,1z^{-1}| < 1$$

e) $f_5(nT_0) = (-4)^{nT_0}$

A mintavételezett függvény:

$$f_5(nT_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{nT_0} \cdot \delta(t - nT_0) .$$

Behelyettesítve z-transzformáció képletébe:

$$F_5(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{nT_0} \cdot z^{-n} = 1 + (-4)z^{-1} + (-4)^2z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - (-4z^{-1})} = \frac{z}{z + 4}$$

$$|-4z^{-1}| < 1$$

f) $f_6(nT_0) = 3\delta(nT_0) + 2\delta((n-3)T_0) - 5\delta((n-4)T_0)$

A z-transzformáció elvégzéséhez használjuk fel az egységimpulzus függvénynek azt a tulajdonságát, hogy az értéke csak az $n = 0$ időpontban nem nulla, és alkalmazzuk az eltolási tételt:

$$F(z) = 3 + 2z^{-3} - 5z^{-4} = \frac{3z^4 + 2z - 5}{z^4}$$

z tetszőleges értékére

g) $f_7(nT_0) = 5 + 3(-4)^{nT_0}$

A mintavételezett függvény:

$$f_7(nT_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (5 + 3(-4)^{nT_0}) \cdot \delta(t - nT_0) .$$

Behelyettesítve z-transzformáció képletébe:

$$F_5(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (5 + 3(-4)^{nT_0}) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(-4)^{nT_0} \cdot z^{-n} =$$

$$= 5 \frac{z}{z - 1} + 3 \frac{z}{z + 4} = \frac{8z^2 + 17z}{z^2 + 3z - 4}$$

$$|-4z^{-1}| < 1 \cap |z^{-1}| < 1 \Rightarrow |-4z^{-1}| < 1$$

17. Határozza meg a következő függvények inverz z-transzformáltjait!

a)

$$F_1(z) = \frac{z}{z + 0,8}$$

Megoldás:

$$F_1(z) = \frac{z}{z + 0,8} = \frac{z}{z - (-0,8)}$$

táblázat alapján:

$$f_1(nT_0) = (-0,8)^{nT_0} 1(nT_0)$$

b)

$$F_2(z) = \frac{z + 4}{z + 0,8}$$

Megoldás:

Hozzuk az invertálandó függvényt a z-transzformációs táblázatban szereplő alakra:

$$F_2(z) = \frac{z + 2}{z + 0,8} = \frac{z}{z - (-0,8)} + \frac{2}{z - (-0,8)} = \frac{z}{z - (-0,8)} + z^{-1} \frac{2z}{z - (-0,8)}$$

táblázat alapján:

$$\begin{aligned} f_2(nT_0) &= (-0,8)^n 1(nT_0) + 2(-0,8)^{n-1} 1((n-1)T_0) = \\ &= 1(0) + (-0,8)^{nT_0} 1((n-1)T_0) + (-2,5)(-0,8)^{nT_0} 1((n-1)T_0) \\ &= \\ &= 1(0) + (1 - 2,5)(-0,8)^{nT_0} 1((n-1)T_0) = \\ &= 1(0) - 1,5(-0,8)^{nT_0} 1((n-1)T_0) \end{aligned}$$

c)

$$F_3(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z + 4)(z - 2)}$$

Megoldás:

Bontsuk fel a függvényt parciális törtre az inverz transzformáció elvégzéséhez!

$$F_3(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z + 4)(z - 2)} = \frac{Az}{z + 4} + \frac{Bz}{z - 2}$$

Parciális törtre bontás elvégezhetőségéhez alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon

$$\frac{F_3(z)}{z} = \frac{z+2}{(z+4)(z-2)} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-2}$$

innen A és B meghatározása:

$$z+2 = A(z-2) + B(z+4)$$

$$A = \left. \frac{z+2}{z-2} \right|_{z=-4} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \left. \frac{z+2}{z+4} \right|_{z=2} = \frac{2}{3}$$

$$F_3(z) = \frac{z^2+2z}{(z+4)(z-2)} = -\frac{1}{3} \frac{z}{z+4} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-2}$$

$$f_3(nT_0) = -\frac{1}{3}(-4)^{nT_0}1(nT_0) + \frac{2}{3}(2)^{nT_0}1(nT_0)$$

d,

$$F_4(z) = \frac{6}{z^4(z+4)}$$

Megoldás:

Alakítsuk át függvényt!

$$F_4(z) = z^{-5} \frac{6z}{z+4}$$

Ebből:

$$f_4(nT_0) = 6(-4)^{n-5}1((n-5)T_0)$$

Példák diszkrét rendszerek kimenetének meghatározására

18. Adja meg kimenet értékét az $n = 4$ mintavételezési időpontban, ha adott a kimenő jel z -transzformáltja:

$$Y(z) = \frac{2}{z^3 - 0,25z}$$

1. Megoldás: Polinomosztás segítségével fejtsük negatív kitevős hatványsorba a racionális törtfüggvény alakot:

$$Y(z) = \frac{2}{z^3 - 0,25z}$$

$$\begin{array}{r}
 2 : z^3 - 0,25z = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + 2 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + 0,5 \cdot z^5 + 0 \cdot z^6 + 0,125 \cdot z^7 + \dots \\
 \underline{2z^0 - 0,5z^2} \\
 0,5z^2 \\
 \underline{0,5z^2 - 0,125z^4} \\
 0,125z^4
 \end{array}$$

Az $y(4)$ értéke megegyezik a z^{-4} tag együtthatójának értékével, azaz $y(4) = 0$.

2. Megoldás: Vegyük észre, hogy az impulzus átviteli függvény nevezőjét fel lehet írni gyöktényező alakban:

$$Y(z) = \frac{2}{z^3 - 0,25z} = \frac{2}{(z - 0,5)z(z + 0,5)},$$

Bontsuk fel a függvényt parciális törtekre az inverz transzformáció elvégzéséhez!

$$Y(z) = \frac{2}{(z - 0,5)z(z + 0,5)} = \frac{A}{z - 0,5} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z + 0,5}$$

innen A , B és C meghatározása:

$$2 = Az(z + 0,5) + B(z + 0,5)(z - 0,5) + Cz(z - 0,5)$$

$$A = \left. \frac{2}{z(z + 0,5)} \right|_{z=0,5} = 4$$

$$B = \left. \frac{2}{(z + 0,5)(z - 0,5)} \right|_{z=0} = -8$$

$$C = \left. \frac{2}{z(z - 0,5)} \right|_{z=-0,5} = 4$$

$$Y(z) = \frac{2}{(z - 0,5)z(z + 0,5)} = \frac{4}{z - 0,5} + \frac{-8}{z} + \frac{4}{z + 0,5}$$

A visszatranszformálás elvégzéséhez alakítsuk át a kifejezést:

$$Y(z) = 4z^{-1} \frac{z}{z - 0,5} - 8z^{-1} + 4z^{-1} \frac{z}{z + 0,5}$$

Innen

$$y(nT_0) = 4(0,5)^{n-1T_0} 1((n-1)T_0) - 8\delta((n-1)T_0) + 4(-0,5)^{n-1T_0} 1((n-1)T_0)$$

A kimenet értékének meghatározása a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban:

$$k = 0 \quad y(0) = 4(0,5)^{-1} 1(-1) - 8\delta(-1) + 4(-0,5)^{-1} 1(-1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$k = 1 \quad y(1) = 4(0,5)^0 1(0) - 8\delta(0) + 4(-0,5)^0 1(0) = 4 - 8 + 4 = 0$$

$$k = 2 \quad y(2) = 4(0,5)^1 1(1) - 8\delta(1) + 4(-0,5)^1 1(1) = 2 - 0 - 2 = 0$$

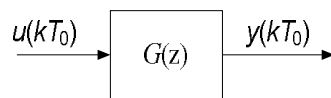
$$k = 3 \quad y(3) = 4(0,5)^2 1(2) - 8\delta(2) + 4(-0,5)^2 1(2) = 1 - 0 + 1 = 2$$

$$k = 4 \quad y(4) = 4(0,5)^3 1(3) - 8\delta(3) + 4(-0,5)^3 1(3) = 0,5 - 0 - 0,5 = 0$$

$$k = 5 \quad y(5) = 4(0,5)^4 1(4) - 8\delta(4) + 4(-0,5)^4 1(4) = 0,25 - 0 + 0,25 = 0,5$$

A két megoldás természetesen ugyanazt az eredményt szolgáltatja, de vegyük észre, hogy a 2. megoldás esetében tetszőleges időpontra kiszámíthatjuk a kimenet értékét más, korábbi időpontokra vonatkozó kimenetértékektől függetlenül.

19. Határozza meg a végérték tétel segítségével azt hova tart az alábbi tag a végtelenben és adja meg a tag erősítését is! Mennyi lesz a kimenet értéke a páratlan sorszámú mintavételezési időpontokban?



$$u(kT_0) = \begin{cases} 2, & 0 \leq k \\ 0 & k < 0 \end{cases}, \quad T_0 = 1s, \quad G(z) = \frac{2}{8z^2 + 2}.$$

Megoldás:

- a) A határérték meghatározása a végérték tétel segítségével:

A bemenet $u(kT_0) = 2 \cdot 1(kT_0)$, így a z-transzformáltja: $U(z) = 2 \frac{z}{z-1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) U(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2}{8z^2 + 2} \cdot \frac{2z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{4}{8z^2 + 2} = \frac{4}{8 + 2} = 0,4. \end{aligned}$$

A pólusok ellenőrzése a határérték kiszámítása előtt(!):

$$8z^2 + 2 = 0 \quad z_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \pm j0,5 \quad |z_{1,2}| = 0,5^2 < 1.$$

A tag erősítése 0,2 lesz.

- b) A páratlan sorszámú mintavételezési időpontok értékének meghatározásához vegyük észre, hogy az impulzus-átviteli függvény nevezőjében szereplő polinomnál hiányzik az elsőfokú tag. Emiatt és az egységugrás jellegű

bemenet miatt a páratlan sorszámú mintavételezési időpontokhoz tartozó kimenetek értékei megegyeznek az őket megelőző páros sorszámú mintavételezési időpontokhoz tartozó kimenetek értékeivel. Erről könnyen meggyőződhetünk akár a differenciaegyenlet megoldásával, akár a kimenet értékeinek polinomosztással történő meghatározásával:

Differenciaegyenlet megoldása:

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2}{8z^2 + 2} = \frac{1}{4z^2 + 1},$$

Ebből a visszafelé vett differenciaegyenlet:

$$4z^2Y(z) + Y(z) = U(z),$$

$$Y(z) = -0,25z^{-2}Y(z) + 0,25z^{-2}U(z),$$

$$y(kT_0) = -0,25y((k-2)T_0) + 0,25u((k-2)T_0).$$

A kimenet értékének meghatározása a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban:

$$k = 0 \quad y(0) = -0,25y(-2) + 0,25u(-2) = 0 + 0 = 0$$

$$k = 1 \quad y(1) = -0,25y(-1) + 0,25u(-1) = 0 + 0 = 0$$

$$k = 2 \quad y(2) = -0,25y(0) + 0,25u(0) = 0 + 0,25 \cdot 2 = 0,5$$

$$k = 3 \quad y(3) = -0,25y(1) + 0,25u(1) = 0 + 0,25 \cdot 2 = 0,5$$

$$k = 4 \quad y(4) = -0,25y(2) + 0,25u(2) = -0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 2 = 0,375$$

$$k = 5 \quad y(5) = -0,25y(3) + 0,25u(3) = -0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 2 = 0,375$$

Polinomosztás elvégzése:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{2}{8z^2 + 2} \frac{2z}{z-1} = \frac{2z}{4z^3 - 4z^2 + z - 1},$$

$$2z: 4z^3 - 4z^2 + z - 1 = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2} + 0,5 \cdot z^{-3} + 0,375 \cdot z^{-4} + 0,375 \cdot z^{-5} + \dots$$

$$\underline{2z - 2 + 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}$$

$$2 - 0,5z^{-1} + 0,5z^{-2}$$

$$\underline{2 - 2z^{-1} + 0,5z^{-2} - 0,5z^{-3}}$$

$$1,5z^{-1} + 0z^{-2} + 0,5z^{-3}$$

$$\underline{1,5z^{-1} - 1,5z^{-2} + 0,375z^{-3} - 0,375z^{-4}}$$

$$1,5z^{-2} + 0,125z^{-3} + 0,375z^{-4}$$

$$\underline{1,5z^2 - 1,5z^3 + 0,375z^4 - 0,375z^5}$$

...

Tehát a keresett kimeneti értékek $y(0) = y(1) = 0$, $y(2) = y(3) = 0,5$,
 $y(4) = y(5) = 0,375$.

Mindkét megoldás esetében, az $y(k+1)$ értéke megegyezik a $y(k)$ értékével, ahol $k = 0, 2, 4, \dots$.

20. Legyen $G(z) = \frac{z}{z-0,5}$ és $U(z) = \frac{z}{z-1}$. Adja meg $y(3)$ értékét, ha $T_0 = 1s$ és $y(-1) = 0$!

Megoldás:

A feladat az alábbi módokon oldható meg:

a) Megoldás a kimenet inverz z -transzformációjával:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z-0,5} \cdot \frac{z}{z-1} = -\frac{z}{z-0,5} + 2\frac{z}{z-1},$$

$$y(kT_0) = 2 \cdot 1(kT_0) - 0,5^{kT_0} 1(kT_0),$$

$$y(3) = 2 - 0,5^3 = 1,875.$$

b) Megoldás a kimenet z -transzformáltjából polinomosztással:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z-0,5} \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{z^2 - 1,5z + 0,5},$$

$$z^2 : z^2 - 1,5z + 0,5 = 1 \cdot z^0 + 1,5 \cdot z^{-1} + 1,75 \cdot z^{-2} + 1,88 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$\underline{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

$$1,5z - 0,5$$

$$\underline{1,5z - 2,25 + 0,75z^{-1}}$$

$$1,75 - 0,75z^{-1}$$

$$\underline{1,75 - 2,63z^{-1} + 0,38z^{-2}}$$

$$1,88z^{-1} - 0,38z^{-2}$$

$$\underline{1,88z^{-1} - 2,82z^{-2} + 0,94z^{-3}}$$

...

Az $y(3)$ értéke megegyezik a z^{-3} tag együtthatójának értékével, azaz $y(3) = 1,88$.

c) Megoldás a differenciaegyenlet felírásával:

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z - 0,5} ,$$

$$zY(z) - 0,5Y(z) = zU(z) ,$$

$$Y(z) = 0,5z^{-1}Y(z) + U(z) ,$$

$$y(kT_0) = 0,5y((k-1)T_0) + u(kT_0) .$$

Felhasználva, hogy az $U(z) = \frac{z}{z-1}$, azaz $u(kT_0) = 1(kT_0)$, így

$$k = 0 \quad y(0) = 0,5y(-1) + u(0) = 0 + 1 = 1$$

$$k = 1 \quad y(1) = 0,5y(0) + u(1) = 0,5 + 1 = 1,5$$

$$k = 2 \quad y(2) = 0,5y(1) + u(2) = 0,75 + 1 = 1,75$$

$$k = 3 \quad y(3) = 0,5y(2) + u(3) = 0,875 + 1 = 1,875$$

Példák folytonos rendszerek diszkrétizálására

21. Végezze el az alábbi bemenet-kimenet modellel jellemzett rendszer diszkrétizálását a tanult módszerekkel, majd a végérték tétellel vizsgálja meg a kapott diszkrét modellek viselkedését:

$$y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 4y(t) = u^{(1)}(t) + 2u(t)$$

Legyen a mintavételezési periódusidő 2s.

Megoldás:

a, diszkrétizálás definíció szerint

Írjuk fel a tag átviteli függvényét:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 5s + 4} .$$

Határozzuk meg a tag pólusait:

$$s^2 + 5s + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -4 .$$

Miután a pólusok negatív valósak, ezért a folytonos tag aszimptotikusan stabil, a csillapítási tényezője egynél nagyobb, így például az átmeneti függvénye

aszimptotikusan simul az erősítés által meghatározott végértékhez ($K = 0,5$, $\zeta = 1,25$, $\omega_h = 2$).

Miután a pólusok egyszeres gyökök, így használható a következő képlet:

$$G(z) = \sum_{i=1}^P \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \frac{z}{z - e^{T_0 p_i}} .$$

A példában:

$$P = 2, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -4 ,$$

$$F_z(s) = s + 2 \quad F_z(p_1) = -1 + 2 = 1 \quad F_z(p_2) = -4 + 2 = -2 ,$$

$$F_p(s) = s^2 + 5s + 4 \quad \frac{dF_p(s)}{ds} = 2s + 5 ,$$

$$F_p'(s) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \quad F_p'(s) = 2 \cdot (-4) + 5 = -3 ,$$

$$G(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z - e^{-1 \cdot 2}} + \frac{-2}{-3} \frac{z}{z - e^{-4 \cdot 2}} = \frac{z^2 - 0,0908z}{z^2 - 0,1357z + 5 \cdot 10^{-5}} .$$

b, Diszkrétizálás z-transzformációs táblázat segítségével

Bontsuk fel a tag átviteli függvényét parciális törtre és kapott kifejezést transzformáljuk diszkrét időtartományba a z-transzformációs táblázat és transzformációra vonatkozó tételek segítségével:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 4} ,$$

$$A = \frac{1}{3} \quad B = \frac{2}{3} ,$$

$$G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{3} \frac{1}{s + 4} .$$

Táblázatból:

$$\frac{1}{s + a} \Leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-aT_0}} .$$

Így

$$G(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z - e^{-2}} + \frac{2}{3} \frac{z}{z - e^{-8}} .$$

Miután a z-transzformációs táblázatban szereplő egyszerűbb tagok z-transzformációja is a definíció alapján készült, így természetesen ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az első esetben. A transzformáció során kihasználtuk az összeadásra és a konstanssal való szorzásra vonatkozó tételeket.

Ha a kapott kifejezést át akarjuk írni az időtartománybeli diszkrét bemenet-kimenet modellre, akkor ezt a következő módon tehetjük meg:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 0,0908z}{z^2 - 0,1357z + 5 \cdot 10^{-5}} ,$$

$$z^2Y(z) - 0,1357zY(z) + 5 \cdot 10^{-5}Y(z) = z^2U(z) - 0,0908zU(z) .$$

Az eltolási tétel alapján

$$\begin{aligned} y((k+2)T_0) - 0,1357y((k+1)T_0) + 5 \cdot 10^{-5}y(kT_0) &= \\ &= u((k+2)T_0) - 0,0908u((k+1)T_0) . \end{aligned}$$

Így megkaptuk a diszkrét bemenet-kimenet modellt, előre felé vett differenciaegyenlet formájában. A visszafelé vett differenciaegyenlet a következő módon állítható elő:

$$z^2Y(z) - 0,1357zY(z) + 5 \cdot 10^{-5}Y(z) = z^2U(z) - 0,0908zU(z) \quad / \cdot z^{-2} ,$$

$$Y(z) - 0,1357z^{-1}Y(z) + 5 \cdot 10^{-5}z^{-2}Y(z) = U(z) - 0,0908z^{-1}U(z) ,$$

$$\begin{aligned} y(kT_0) - 0,1357y((k-1)T_0) + 5 \cdot 10^{-5}y((k-2)T_0) &= \\ &= u(kT_0) - 0,0908u((k-1)T_0) . \end{aligned}$$

c, diszkrétizálás előre felé vett differenciákon alapuló közelítés alapján

Alkalmazzuk az előre felé vett differenciák közelítő képletet az átíráshoz:

$$s \approx \frac{z-1}{T_0} ,$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4} \Leftrightarrow G_e(z) = \frac{\frac{z-1}{T_0} + 2}{\left(\frac{z-1}{T_0}\right)^2 + 5\frac{z-1}{T_0} + 4} = \frac{2z+6}{z^2+8z+7} .$$

d, diszkrétizálás visszafelé vett differenciákon alapuló közelítés alapján

A visszafelé vett differenciák közelítő képletének alkalmazásával a következő alakot kapjuk:

$$s \approx \frac{z-1}{zT_0} ,$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4} \Leftrightarrow G_v(z) = \frac{\frac{z-1}{zT_0} + 2}{\left(\frac{z-1}{zT_0}\right)^2 + 5\frac{z-1}{zT_0} + 4} = \frac{10z^2-2z}{27z^2-12z+1} .$$

e, diszkretizálás Tustin módszerrel

A Tustin módszeren alapuló közelítés eredményeként a következő alakot kapjuk:

$$s \approx \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1},$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4} \Leftrightarrow G_v(z) = \frac{\frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 2}{\left(\frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 5 \frac{2}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z+1} + 4} = \frac{3z^2 + 4z + 1}{10z^2 + 6z}.$$

Mint látható a különböző közelítések egyszerűen számolhatóak voltak, de más és más eredményre vezettek. Vizsgáljuk meg, hogy a különböző alakok hogyan viselkednek egységimpulzus bemenetre, azaz a végérték tétel segítségével nézzük meg a súlyfüggvények alakulását!

Folytonos alak:

$$u(t) = \delta(t) \quad U(s) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+2}{s^2+5s+4} = 0$$

A határérték meghatározása előtt ellenőriztük a pólusok alapján a tag stabilitását!

Definíció alapján átírt alak:

$$u^*(t) = \delta^*(t) \quad U(z) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G_d(z) U(z) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \frac{z^2 - 0,0908z}{z^2 - 0,1357z + 5 \cdot 10^{-5}} = 0. \end{aligned}$$

A határérték kiszámítása előtt természetesen itt is ellenőrizni kell a pólusokat, melyek rendre

$$z_1 = 0, \quad z_2 \approx 0, \quad z_3 = 0,13,$$

miután ezek abszolút értékben 1-nél kisebbek, így a határérték számítás elvégezhető és az eredmény ebben az esetben is nulla.

Előrefelé vett differenciák alapján átírt alak:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G_e(z) U(z) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \frac{2z+6}{z^2+8z+7}.$$

A határérték kiszámítása előtt természetesen itt is ellenőrizni kell a pólusokat, melyek rendre

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -7,$$

miután z_3 abszolút értékben 1-nél nagyobb, így a határérték számítás nem végezhető el, mert a zérus eredmény ellenére a súlyfüggvény végtelenbe tart.

Visszafelé vett differenciák alapján átírt alak:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G_v(z) U(z) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \frac{10z^2 - 2z}{27z^2 - 12z + 1} = 0. \end{aligned}$$

A határérték kiszámítása előtt természetesen itt is ellenőrizni kell a pólusokat, melyek rendre

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1}{3}, \quad z_3 = \frac{1}{9},$$

miután ezek abszolút értékben 1-nél kisebbek, így a határérték számítás elvégezhető és az eredmény ebben az esetben is nulla.

Tustin módszerrel átírt alak:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G_T(z) U(z) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} \frac{3z^2 + 4z + 1}{10z^2 + 6z} = 0. \end{aligned}$$

A pólusok ellenőrzése

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0,6,$$

miután ezek abszolút értékben 1-nél kisebbek, így a határérték számítás elvégezhető és az eredmény ebben az esetben is nulla.

22. Legyen egy tag átviteli függvénye a következő: $G(s) = \frac{2s+6}{4s^3+3s^2+6s+2}$

- Határozza meg az impulzus átviteli függvényt az előrefelé vett differenciákon alapuló közelítéssel, ha $T_0 = 1s$!
- Stabil-e a diszkretizált tag?

Megoldás:

a) Az impulzus-átviteli függvény meghatározása:

előrefelé vett differenciákon alapuló közelítésnél: $s \approx \frac{z-1}{T_0}$,

behelyettesítve ezt a folytonos időtartományhoz tartozó átviteli függvénybe:

$$G(z) \cong \frac{2\left(\frac{z-1}{T_0}\right) + 6}{4\left(\frac{z-1}{T_0}\right)^3 + 3\left(\frac{z-1}{T_0}\right)^2 + 6\left(\frac{z-1}{T_0}\right) + 2} = \frac{2(z-1) + 6}{4(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 6(z-1) + 2} =$$

$$= \frac{2z + 4}{4z^3 - 9z^2 + 12z - 5}.$$

b) Stabilitásvizsgálat Jury-teszt segítségével:

$$\begin{array}{cccc} 4 & -9 & 12 & -5 \\ -5 & 12 & -9 & 4 \\ \hline -9 & & & \\ \frac{-9}{4} & \dots & \dots & \end{array} \quad \alpha_3 = \frac{-5}{4}, \quad \alpha'_3 = a_3 - \alpha_3 a_0 = 4 - (-5) \frac{-5}{4} = \frac{-9}{4}$$

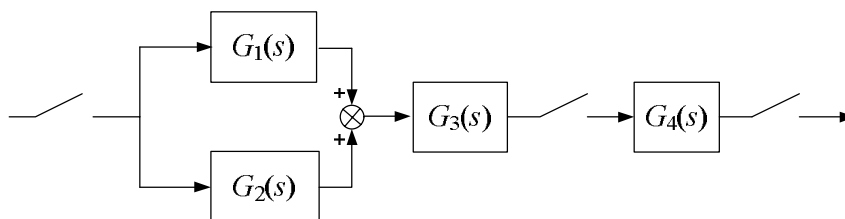
Miután az első korrigált együttható negatív, ezért nem kell a tesztet tovább végezni, és az előrefelé vett diszkretizálással átirrt tag instabil lesz.

Példák eredő átviteli függvényre

23. Adja meg az alábbi rendszerek eredő impulzus átviteli függvényét!

Általános megjegyzés: Az eredő impulzus-átviteli függvények meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy hol van és hol nincs a tagok között mintavételező!

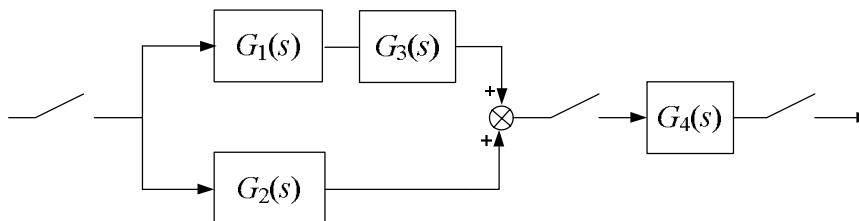
a)



Megoldás: Vegyük észre, hogy az ábrán párhuzamosan, majd sorba kapcsolt tagok vannak.

$$\begin{aligned} G_e(z) &= \mathcal{Z}\{(G_1(s) + G_2(s))G_3(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_4(s)\} = \\ &= (\mathcal{Z}\{G_1(s)G_3(s)\} + \mathcal{Z}\{G_2(s)G_3(s)\}) \cdot \mathcal{Z}\{G_4(s)\} \\ &= (G_1G_3(z) + G_2G_3(z)) \cdot G_4(z). \end{aligned}$$

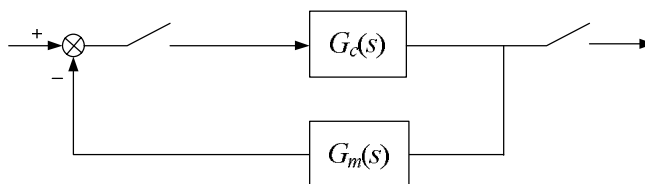
b)



Megoldás: Ebben a példában is soros és párhuzamos kapcsolású tagok szerepelnek, így

$$\begin{aligned} G_e(z) &= (\mathcal{Z}\{G_1(s)G_3(s)\} + \mathcal{Z}\{G_2(s)\}) \cdot \mathcal{Z}\{G_4(s)\} \\ &= (G_1G_3(z) + G_2(z)) \cdot G_4(z). \end{aligned}$$

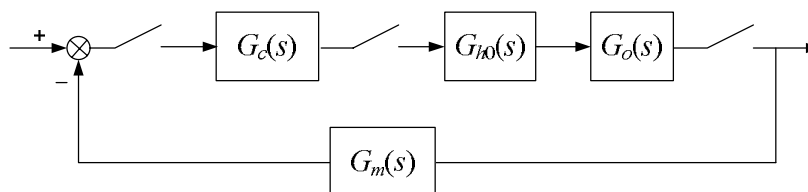
c)



Megoldás: Ebben az esetben avisszacsatolt kör eredőjét kell felírni:

$$G_e(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_c(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_c(s)G_m(s)\}} = \frac{G_c(z)}{1 + G_cG_m(z)}.$$

d)

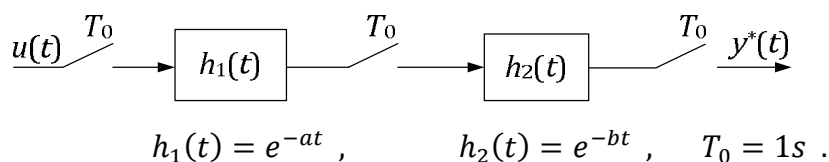


Megoldás: Visszacsatolt kör eredő impulzus-átviteli függvénye, figyelembe véve az előre menő ágbeli tagokat és a köztük lévő mintavételezőket:

$$G_e(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_c(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_o(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_c(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_o(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_m(s)\}} =$$

$$= \frac{G_c(z) \cdot G_{h0}G_c(z)}{1 + G_c(z) \cdot G_{h0}G_c(z) \cdot G_m(z)} .$$

24. Határozza meg a következő tagcsoport eredő impulzus-átviteli függvényét!



Megoldás:

A tagok átviteli függvényei:

$$G_1(s) = \frac{1}{s + a} \quad G_2(s) = \frac{1}{s + b}$$

Az elméleti részben tárgyalt levezetésnek megfelelően, amennyiben minden tag előtt és után van mintavételező egy tagcsoportban, akkor az eredő átviteli függvényt a következő alakban kapjuk meg:

$$G_e(z) = G_1(z)G_2(z) ,$$

tehát az egyes tagok impulzus-átviteli függvényének szorzatként állítjuk elő az eredőt. Így a tag impulzus-átviteli függvényei a z -transzformációs táblázat alapján:

$$G_1(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_0}} , \quad G_2(z) = \frac{z}{z - e^{-bT_0}} ,$$

$$G_e(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_0}} \cdot \frac{z}{z - e^{-bT_0}} = \frac{z^2}{(z - e^{-aT_0})(z - e^{-bT_0})} .$$

Legyen $T_0 = 1s$, $a = 0,693$, $b = 1,386$, ekkor

$$G_e(z) = \frac{z^2}{(z - 0,5)(z - 0,25)} .$$

Vizsgáljuk meg a tagcsoport súlyfüggvényének menetét!

A vizsgálathoz használjuk ki a folytonos időtartományból ismert, az átviteli függvény és a súlyfüggvény között fennálló összefüggést:

$$\mathcal{Z}\{h(kT_0)\} = G(z) \quad \Leftrightarrow \quad h(kT_0) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} .$$

Így

$$G_e(z) = \frac{z^2}{(z-0,5)(z-0,25)} = \frac{2z}{(z-0,5)} + \frac{-z}{(z-0,25)},$$

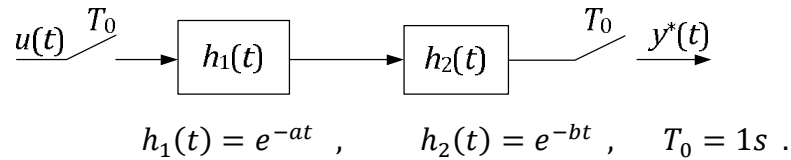
$$h(kT_0) = Z^{-1}\{G_e(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-0,5)}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{-z}{(z-0,25)}\right\} =$$

$$= 2e^{-0,693kT_0} - e^{-1,386kT_0}.$$

A kimenet értékei az első négy mintavételezésnél:

$$\begin{aligned} k=0 & \quad y(0) = 1, \\ k=1 & \quad y(1) = 0,75, \\ k=2 & \quad y(2) = 0,4375, \\ k=3 & \quad y(3) = 0,2344. \\ & \dots \end{aligned}$$

25. Határozza meg a következő tagcsoport eredő impulzus-átviteli függvényét!



Megoldás:

A tagok átviteli függvényei:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+b}.$$

Az elméleti részben tárgyalt levezetésnek megfelelően, amennyiben a tagok között nincs mintavételező, csak előttük és utánuk, akkor az eredő átviteli függvényt a következő alakban kapjuk meg:

$$G_e(z) = Z\{G_1(s)G_2(s)\} \triangleq G_1G_2(z).$$

Tehát az egyes tagok átviteli függvénye szorzatának a z -transzformációjával állítjuk elő az eredő impulzus átviteli függvényt. Így a tagcsoport eredő impulzus átviteli függvénye:

$$G_e(s) = \frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s+b},$$

$$G_e(z) = Z\left\{\frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s+b}\right\} = \frac{1}{a-b} \cdot Z\left\{\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a}\right\} =$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{z}{z-e^{-bT_0}} - \frac{z}{z-e^{-aT_0}}\right).$$

Legyen $T_0 = 1s$, $a = 0,693$, $b = 1,386$, ekkor

$$G_e(z) = -1,44 \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-1,386}} - \frac{z}{z - e^{-0,693}} \right) .$$

Vizsgáljuk meg a tagcsoport súlyfüggvényének menetét!

A vizsgálathoz használjuk ki a folytonos időtartományból ismert, az átviteli függvény és a súlyfüggvény között fennálló összefüggést:

$$\mathcal{Z}\{h(kT_0)\} = G(z) \quad \Leftrightarrow \quad h(kT_0) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} .$$

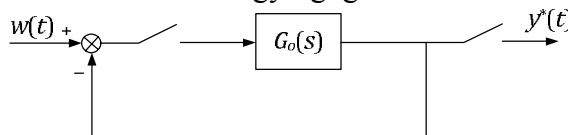
Így

$$\begin{aligned} h(kT_0) &= \mathcal{Z}^{-1}\{G_e(z)\} = -1,44 \cdot \left(\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z - 0,25)}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z - 0,5)}\right\} \right) = \\ &= -1,44 \cdot (e^{-0,693kT_0} - e^{-1,386kT_0}) . \end{aligned}$$

A kimenet értékei az első négy mintavételezésnél:

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad y(0) = 0 , \\ k = 1 & \quad y(1) = 0,3608 , \\ k = 2 & \quad y(2) = 0,27 , \\ k = 3 & \quad y(3) = 0,1575 . \\ & \dots \end{aligned}$$

26. Határozza meg az alábbi visszacsatolt kör egységugrás bemenetre adott választ!



$$G_o(s) = \frac{2}{s(1 + 0,1s)} , \quad w(t) = 1(t) , \quad T_0 = 0,1s .$$

Megoldás:

A zárt kör eredő impulzus-átviteli függvénye:

$$G_e(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} .$$

A tag impulzus-átviteli függvényét adjuk meg a transzformációs táblázat alapján, ehhez alakítsuk át az átviteli függvényt:

$$G_o(s) = \frac{2}{s(1 + 0,1s)} = \frac{20}{s(s + 10)} = 2 \frac{10}{s(s + 10)}$$

táblázatból:

$$\frac{a}{s(s+a)} \Leftrightarrow \frac{z(1-e^{-aT_0})}{(z-1)(z-e^{-aT_0})} ,$$

$$G_o(z) = 2 \frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{1,264z}{z^2 - 1,368z + 0,368} .$$

Az eredő átviteli függvény:

$$G_e(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{\frac{1,264z}{z^2 - 1,368z + 0,368}}{1 + \frac{1,264z}{z^2 - 1,368z + 0,368}} = \frac{1,264z}{z^2 - 0,104z + 0,368} .$$

Az egységugrás bemenetre adott válasz:

$$w(t) = 1(t) , \quad W(z) = \frac{z}{z-1} ,$$

$$Y(z) = G_e(z)W(z) = \frac{1,264z}{z^2 - 0,104z + 0,368} \cdot \frac{z}{z-1} .$$

Rendszer válasza a végtelenben:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G_e(z)W(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1,264z}{z^2 - 0,104z + 0,368} \cdot \frac{z}{z-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1,264z}{z^2 - 0,104z + 0,368} = (\Downarrow) = \frac{1,264}{1 - 0,104 + 0,368} = 1 \end{aligned}$$

pólus ellenőrzés:

$$\begin{aligned} z^2 - 0,104z + 0,368 = 0 \quad z_{1,2} &= 0,052 \pm j0,604 , \\ |0,052 \pm j0,604| &= 0,052^2 + 0,604^2 < 1 . \end{aligned}$$

Mintavételezési időpontokban felvett értékek meghatározása differenciaegyenlet alapján

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1,264z}{z^2 - 0,104z + 0,368} ,$$

ebből

$$z^2 Y(z) - 0,104z Y(z) + 0,368 Y(z) = 1,264z W(z) \quad / \cdot z^{-2} ,$$

$$Y(z) - 0,104z^{-1} Y(z) + 0,368z^{-2} Y(z) = 1,264z^{-1} W(z) ,$$

$$Y(z) = 0,104z^{-1} Y(z) - 0,368z^{-2} Y(z) + 1,264z^{-1} W(z) ,$$

$$y(kT_0) = 0,104y((k-1)T_0) - 0,368y((k-2)T_0) + 1,264w((k-1)T_0) .$$

A bemenő jel:

$$w(kT_0) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} .$$

A kimenet értékei:

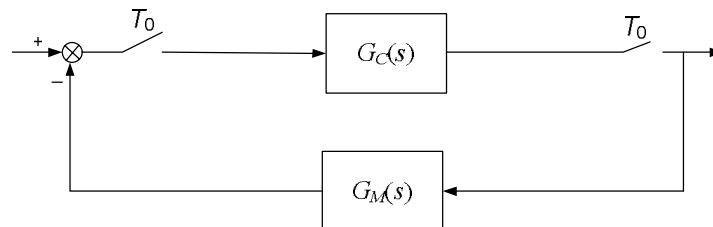
$$k = 0 \quad y(0) = 0,104y(-0,1) - 0,368y(-0,2) + 1,264w(-0,1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$k = 1 \quad y(0,1) = 0,104y(0) - 0,368y(-0,1) + 1,264w(0) = 0 + 0 + 1,264 = 1,264$$

$$k = 2 \quad y(0,2) = 0,104y(0,1) - 0,368y(0) + 1,264w(0,1) = \\ = 0,104 + 0,368 + 1,264 = 1,395$$

$$k = 3 \quad y(0,3) = 0,104y(0,2) - 0,368y(0,1) + 1,264w(0,2) = \\ = 0,104 + 0 + 1,264 = 0,944 .$$

27. Tekintsük az alábbi visszacsatolt kört!



$$G_c(s) = \frac{2}{s} , \quad G_M(s) = \frac{5,772}{2,886s + 1} .$$

- a) A diszkretizálást a z -transzformációs táblázat alapján (azaz a definíció szerint) elvégezve, adja meg a zárt kör eredő impulzus átviteli függvényét, ha $T_0 = 2s$!
- b) Hova tart a tagcsoport súlyfüggvénye?

Megoldás:

- a) Az eredő impulzus átviteli függvény meghatározása:

$$G_e(z) = \frac{\mathcal{Z}\{G_c(s)\}}{1 + \mathcal{Z}\{G_c(s)\}\mathcal{Z}\{G_M(s)\}} ,$$

$$\mathcal{Z}\{G_c(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2 \frac{z}{z-1} ,$$

$$\mathcal{Z}\{G_M(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{5,772}{2,886s + 1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s + 0,346}\right\} = 2\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s + 0,346}\right\} = \\ = 2 \frac{z}{z - e^{-0,346T_0}} = \frac{2z}{z - e^{-0,693}} = \frac{2z}{z - 0,5} ,$$

$$G_e(z) = \frac{\frac{2z}{z-1}}{1 + \frac{2z}{z-1} \cdot \frac{2z}{z-0,5}} = \frac{2z(z-0,5)}{(z-1)(z-0,5) + 4z^2} = \frac{2z^2 - z}{5z^2 - 1,5z + 0,5} .$$

b) A súlyfüggvény határértékének meghatározása:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT_0) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G_e(z) U(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{2z^2 - z}{5z^2 - 1,5z + 0,5} 1 = \frac{(1-1)(2-1)}{1(5-1,5+0,5)} = \frac{0}{4} = 0 , \end{aligned}$$

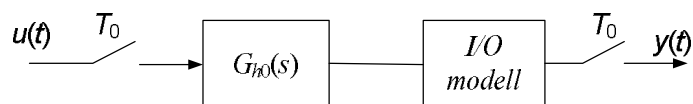
pólusok ellenőrzése a határérték kiszámítása előtt(!):

$$z_1 = 0 \quad z_{2,3} = \frac{1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 10}}{10} = 0,15 \pm j0,28 ,$$

$$|0,15 \pm j0,28| = 0,15^2 + 0,28^2 < 1 .$$

Példák tartószerv alkalmazására

28. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!



$$4y^{(1)}(t) + 5,544y(t) = 2,772u(t) ,$$

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} .$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3$ mintavételezési időpontokban, ha a bemenet:

$$u(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} , \quad y(-0,5) = 0 , \quad T_0 = 0,5s .$$

Megoldás:

Az eredő impulzus-átviteli függvény meghatározása:

Az I/O modell alapján a tag átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{2,772}{4s + 5,544} = \frac{0,693}{s + 1,386} .$$

A tagcsoport eredő impulzus-átviteli függvénye:

$$G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_p(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\},$$

$$G_e(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{0,693}{s(s + 1,386)}\right\} = (1 - z^{-1}) \cdot 0,5 \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{1,386}{s(s + 1,386)}\right\} =$$

$$= \frac{z - 1}{z} 0,5 \frac{z(1 - e^{-1,386T_0})}{(z - 1)(z - e^{-1,386T_0})} = \frac{0,5(1 - e^{-1,386 \cdot 0,5})}{(z - 1)(z - e^{-1,386 \cdot 0,5})} = \frac{0,25}{z - 0,5} .$$

A differenciaegyenlet felírása:

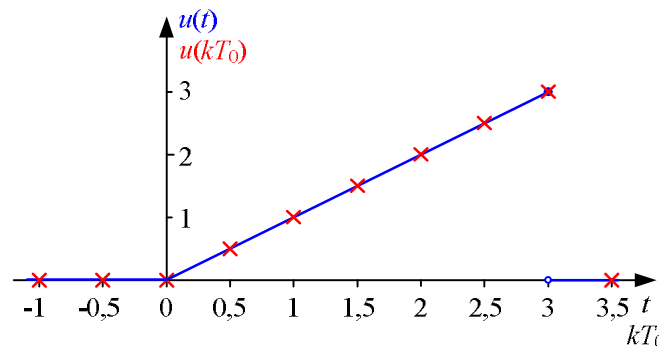
$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,25}{z - 0,5} ,$$

$$zY(z) - 0,5Y(z) = 0,25U(z) ,$$

$$Y(z) = 0,5z^{-1}Y(z) + 0,25z^{-1}U(z) ,$$

$$y(kT_0) = 0,5y((k - 1)T_0) + 0,25u((k - 1)T_0) .$$

A bemenet értékei az egyes mintavételezési időpontokban:



A kimenet értékének meghatározása a $k = 0, 1, 2, 3$ mintavételi pontokban:

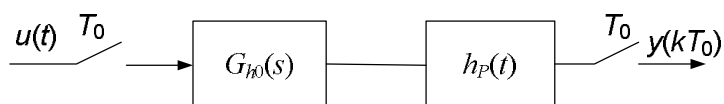
$$k = 0 \quad y(0) = 0,5y(-0,5) + 0,25u(-0,5) = 0 + 0 = 0 ,$$

$$k = 1 \quad y(0,5) = 0,5y(0) + 0,25u(0) = 0 + 0 = 0 ,$$

$$k = 2 \quad y(1) = 0,5y(0,5) + 0,25u(0,5) = 0 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 ,$$

$$k = 3 \quad y(1,5) = 0,5y(1) + 0,25u(1) = 0,125 + 0,25 \cdot 1 = 0,3125 .$$

29. Tekintsük az alábbi mintavételezett tagcsoportot!



$$h_p(t) = 0,5t, \quad G_{h_0}(s) = \frac{1 - e^{sT_0}}{s}.$$

Határozza meg a kimenet értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételezési pontokban, ha a bemenet:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \quad y(-2) = y(-4) = 0, \quad T_0 = 2s.$$

Megoldás:

Az eredő impulzus-átviteli függvény meghatározása:

$$h_p(t) = 0,5t \Rightarrow G_p(s) = \frac{0,5}{s^2},$$

$$G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_{h_0}(s)G_p(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\},$$

$$G_e(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{0,5}{s^3}\right\} = \frac{z-1}{z} \cdot 0,5 \frac{(z+1)zT_0^2}{2(z-1)^2} = \frac{z+1}{z^2 - 2z + 1}.$$

A differenciaegyenlet felírása:

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 - 2z + 1},$$

$$z^2Y(z) - 2zY(z) + Y(z) = zU(z) + U(z),$$

$$Y(z) = 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}U(z) + z^{-2}U(z),$$

$$y(kT_0) = 2y((k-1)T_0) + y((k-2)T_0) + u((k-1)T_0) + u((k-2)T_0).$$

A kimenet értékének meghatározása a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ mintavételi pontokban:

$$k = 0 \quad y(0) = 2y(-2) + y(-4) + u(-2) + u(-4) = 0 - 0 + 0 + 0 = 0,$$

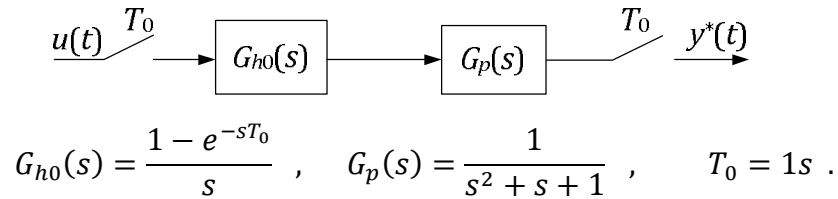
$$k = 1 \quad y(2) = 2y(0) + y(-2) + u(0) + u(-2) = 0 - 0 + 1 + 0 = 1,$$

$$k = 2 \quad y(4) = 2y(2) + y(0) + u(2) + u(0) = 2 - 0 + 1 + 1 = 4,$$

$$k = 3 \quad y(6) = 2y(4) + y(2) + u(4) + u(2) = 8 - 1 + 0 + 1 = 8,$$

$$k = 4 \quad y(8) = 2y(6) + y(4) + u(6) + u(4) = 16 - 4 + 0 + 0 = 12.$$

30. Határozza meg az alábbi tagcsoport eredő impulzus-átviteli függvényét és egységugrás bemenetre adott válaszát!



Megoldás:

A tagcsoport eredő impulzus átviteli függvénye:

$$\begin{aligned} G_e(z) &= \mathcal{Z}\{G_{h0}(s)G_p(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-sT_0}}{s} \frac{1}{s^2 + s + 1}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s^2 + s + 1)}\right\} = \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}\right\} = \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s + 0,5}{(s + 0,5)^2 + 0,866^2} - \frac{0,5}{(s + 0,5)^2 + 0,866^2}\right\}. \end{aligned}$$

A z -transzformációs táblázatból a következő kifejezéseket alkalmazzuk a transzformáció elvégzéséhez:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\Leftrightarrow \frac{z}{z - 1}, \\ \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} &\Leftrightarrow \frac{z^2 - ze^{-aT_0}\cos\omega T_0}{z^2 - 2ze^{-aT_0}\cos\omega T_0 + e^{-2aT_0}}, \\ \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} &\Leftrightarrow \frac{ze^{-aT_0}\sin\omega T_0}{z^2 - 2ze^{-aT_0}\cos\omega T_0 + e^{-2aT_0}}. \end{aligned}$$

Ennek alapján a tagcsoport eredő impulzus átviteli függvénye:

$$\begin{aligned} G_e(z) &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{z^2 - ze^{-0,5T_0}\cos 0,866T_0}{z^2 - 2ze^{-0,5T_0}\cos 0,866T_0 + e^{-2 \cdot 0,5T_0}} - \right. \\ &\quad \left. - 0,577 \frac{ze^{-0,5T_0}\sin 0,866T_0}{z^2 - 2ze^{-0,5T_0}\cos 0,866T_0 + e^{-2 \cdot 0,5T_0}} \right] = \\ &= \frac{z - 1}{z} \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{z^2 + e^{-0,5}(0,577\sin 0,866 - \cos 0,866)z}{z^2 - 2ze^{-0,5}\cos 0,866 + e^{-1}} \right] = \\ &= \frac{0,34z + 0,241}{z^2 - 0,787z + 0,368}. \end{aligned}$$

A tagcsoport egységugrás bemenetre adott válaszána meghatározása:

$$Y(z) = G_e(z)U(z) = \frac{0,34z + 0,241}{z^2 - 0,787z + 0,368} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{0,34z^2 + 0,241z}{z^3 - 1,787z^2 + 1,155z - 0,368} .$$

Az átmeneti függvény menetének meghatározása differenciaegyenlet segítségével:

$$G_e(z) = \frac{0,34z + 0,241}{z^2 - 0,787z + 0,368} = \frac{Y(z)}{U(z)} ,$$

$$z^2Y(z) - 0,787zY(z) + 0,368Y(z) = 0,34zU(z) + 0,241U(z) ,$$

$$Y(z) = 0,787z^{-1}Y(z) - 0,368z^{-2}Y(z) + 0,34z^{-1}U(z) + 0,241z^{-2}U(z) ,$$

$$y(kT_0) = 0,787y((k-1)T_0) - 0,368y((k-2)T_0) + 0,34u((k-1)T_0) + 0,241u((k-2)T_0) .$$

Az egyenlet megoldásánál tételezzük fel, hogy a kezdeti feltételek zérusok:

$$y(-1) = y(-2) = 0 .$$

A kimenet értékei az egyes mintavételezési időpontokban:

$$k = 0 , \quad y(0) = 0,787y(-1) - 0,368y(-2) + 0,34u(-1) + 0,241u(-2) = 0 - 0 + 0 + 0 = 0 ,$$

$$k = 1 , \quad y(1) = 0,787y(0) - 0,368y(-1) + 0,34u(0) + 0,241u(-1) = 0 - 0 + 0,34 + 0 = 0,34 ,$$

$$k = 2 , \quad y(2) = 0,787y(1) - 0,368y(0) + 0,34u(1) + 0,241u(0) = 0,787 \cdot 0,34 - 0 + 0,34 + 0,241 = 0,849 ,$$

$$k = 3 , \quad y(3) = 0,787y(2) - 0,368y(1) + 0,34u(2) + 0,241u(1) = 0,787 \cdot 0,849 - 0,368 \cdot 0,34 + 0,34 + 0,241 = 1,124 ,$$

$$k = 4 \quad y(4) = 1,153 ,$$

$$k = 5 \quad y(5) = 1,074 .$$

Belátható, hogy a tagcsoport stabil:

$$z^2 - 0,787z + 0,368 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 0,394 \pm j0,462 ,$$

$$|0,394 \pm j0,462| = 0,394^2 + 0,462^2 < 1 ,$$

és az erősítése

$$K = \frac{0,34 + 0,241}{1 - 0,787 + 0,368} = 1 .$$

Példák diszkrét rendszerek stabilitásvizsgálatára

31. Vizsgálja meg mindkét stabilitási definíció szempontjából az alábbi tagokat!
Aszimptotikusan stabil tag esetében adja meg az erősítés értékét!

$$G_1(z) = \frac{2z^2 + 4}{12z^2 + 15z + 3}, \quad G_2(z) = \frac{2z^{-1} + 3}{0,25z^{-2} + 0,5z^{-1} + 0,5},$$

$$G_3(z) = \frac{(z+2)(z+1)z}{2z^2 + 3z - 1}, \quad G_4(z) = \frac{2z^{-3} + 4z^{-2}}{4z^{-2} - z^{-1}}.$$

Megoldás:

a) $G_1(z)$ tag:

$$G_1(z) = \frac{2z^2 + 4}{12z^2 + 15z + 3},$$

$$z_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 144}}{24} = \frac{-15 \pm 9}{24}, \quad z_1 = -\frac{1}{4}, \quad z_2 = -1.$$

Miután a pólusok között van olyan, ami nem kisebb abszolút értékben 1-nél, de nem is nagyobb, így a tag aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

b) $G_2(z)$ tag:

$$G_2(z) = \frac{2z^{-1} + 3}{0,25z^{-2} + 0,5z^{-1} + 0,5} = \frac{3z^2 + 3z}{0,5z^2 + 0,5z + 0,25},$$

$$z_{1,2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,5}}{1} = 0,5 \pm j0,5,$$

$$|z_{1,2}| = 0,25 + 0,25 < 1.$$

Miután mindkét pólus kisebb abszolút értékben 1-nél, ezért a tag aszimptotikusan stabil és így BIBO stabil is.

Az erősítés:

$$K = \frac{2 + 3}{0,25 + 0,5 + 0,5} = 4.$$

c) $G_3(z)$ tag:

$$G_3(z) = \frac{(z+2)(z+1)z}{2z^2 + 3z - 1} = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z}{2z^2 + 3z - 1}.$$

Miután a számlálóbeli polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőbelié, ezért a tag nem realizálható (nem felel meg az oksági szabálynak).

d) $G_4(z)$ tag:

$$G_4(z) = \frac{2z^{-3} + 4z^{-2}}{4z^{-2} - z^{-1}} = \frac{4z + 2}{-z^2 + 4z},$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 4, \quad |z_1| < 1, \quad |z_2| > 1.$$

Miután van pólusok között abszolút értékben 1-nél nagyobb, ezért a tag sem aszimptotikusan, sem BIBO értelemben nem stabil.

32. Vizsgálja meg mindkét stabilitási definíció szempontjából az alábbi tagokat, és amennyiben aszimptotikusan stabil a tag, adja meg az erősítést is!

$$G_1(z) = \frac{2z^{-2} - 1}{1 + z^{-1} + z^{-2}}, \quad G_2(z) = \frac{2z + 1}{z^3 - 0,25z}, \quad G_3(z) = \frac{z}{(z + 2)(z^2 + 0,5z)}.$$

Megoldás:

a) $G_1(z)$ tag:

$$G_1(z) = \frac{2z^{-2} - 1}{1 + z^{-1} + z^{-2}} = \frac{2 - z^2}{z^2 + z + 1},$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \left| -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Miután a pólusok nem kisebbek abszolút értékben 1-nél, de nem is nagyobbak, így a tag aszimptotikusan nem stabil, de BIBO stabil.

b) $G_2(z)$ tag:

$$G_2(z) = \frac{2z + 1}{z^3 - 0,25z} = \frac{2z + 1}{z(z^2 - 0,25)},$$

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \sqrt{0,25} = \pm 0,5, \quad |z_{1,2,3}| < 1.$$

Miután mindhárom pólus kisebb abszolút értékben 1-nél, ezért a tag aszimptotikusan stabil és így BIBO stabil is.

Az erősítés:

$$K = \frac{2 + 1}{1 - 0,25} = 4.$$

c) $G_3(z)$ tag:

$$G_3(z) = \frac{z}{(z+2)(z^2+0,5z)},$$

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = -0,5, \quad |z_1| > 1, \quad |z_{2,3}| < 1.$$

Miután van pólusok között abszolút értékben 1-nél nagyobb, ezért a tag sem aszimptotikusan, sem BIBO értelemben nem stabil.

33. Vizsgálja meg az alábbi tag stabilitását:

$$G(z) = \frac{2z^2 + 5}{4z^3 + 3z^2 + 5z + 1}$$

Megoldás:

Stabilitásvizsgálat Jury-teszt segítségével:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{array} \quad \alpha_3 = \frac{1}{4} \quad a'_1 = 4 - \alpha_3 \cdot 1, \quad a'_2 = 3 - \alpha_3 \cdot 5, \quad a'_3 = 5 - \alpha_3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{15}{4} & \frac{7}{4} & \frac{17}{4} \\ \frac{17}{4} & \frac{7}{4} & \frac{15}{4} \end{array} \quad \alpha_2 = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{17}{15}, \quad a''_1 = \frac{15}{4} - \alpha_2 \cdot \frac{17}{4}, \quad a''_2 = \frac{7}{4} - \alpha_2 \cdot \frac{7}{4}$$

$$\begin{array}{cc} -\frac{64}{60} & -\frac{14}{60} \end{array}$$

Miután a második korigált együttható negatív, ezért nem kell a tesztet tovább végezni, és a tag instabil lesz.

34. Vizsgálja meg az alábbi tag stabilitását:

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 1,9z^2 + 1,2z + 0,25} !$$

Megoldás:

A stabilitásvizsgálatot w -teszt segítségével végezzük el. A teszt lényege, hogy egy egyszerű bilineáris transzformációval átírjuk az impulzus-átviteli függvényt, majd a Hurwitz-kritérium alapján ellenőrizzük a stabilitást.

A bilineáris transzformáció:

$$z = \frac{w+1}{w-1},$$

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 1,9z^2 + 1,2z + 0,25} ,$$

$$\begin{aligned} z^3 + 1,9z^2 + 1,2z + 0,25 &\Rightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 1,9\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 1,2\frac{w+1}{w-1} + 0,25 = \\ &= 4,35w^3 + 2,95w^2 + 0,65w + 0,05 . \end{aligned}$$

Hurwitz-kritérium:

a, feltétel: valamennyi együttható pozitív,

b, feltétel: determináns ellenőrzése:

$$H_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} 2,95 & 0,05 & 0 \\ 4,35 & 0,65 & 0 \\ 0 & 2,95 & 0,05 \end{vmatrix} ,$$

$$\Delta_1 = 2,95 > 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2,95 & 0,05 \\ 4,35 & 0,65 \end{vmatrix} = 2,95 \cdot 0,65 - 4,35 \cdot 0,05 = 1,7 > 0 ,$$

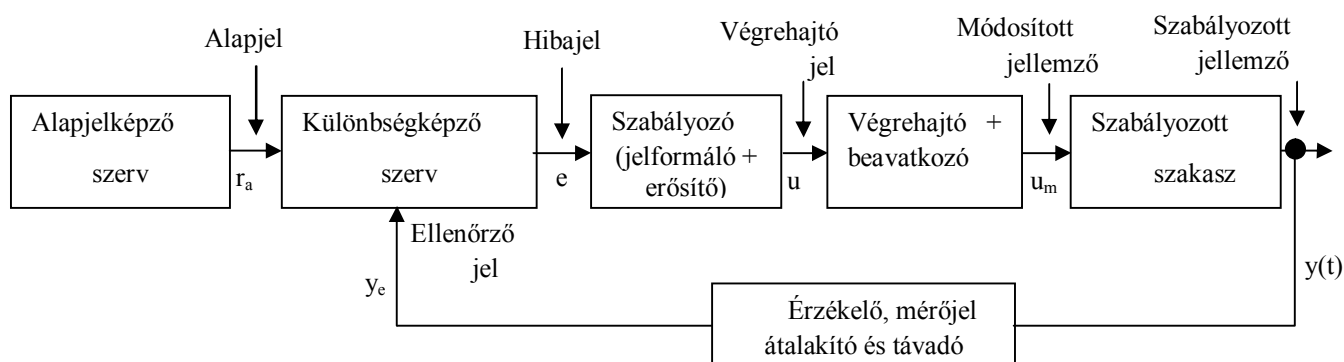
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2,95 & 0,05 & 0 \\ 4,35 & 0,65 & 0 \\ 0 & 2,95 & 0,05 \end{vmatrix} = 2,95 \cdot 0,65 \cdot 0,05 - 4,35 \cdot 0,05^2 = 0,085 > 0 .$$

Miután mindhárom al-determináns pozitív, így a tag stabil.

8. Szabályozók paraméter beállítása

Az irányítási rendszerek legjellegzetesebb információfeldolgozási feladatát a szabályozók végzik.

A szabályozó a szabályozási körnek az a része, amely összehasonlítja a szabályozott jellemzőből származó ellenőrző jelet az alapjellel, és a megállapított szabályozási eltéréstől (hibától) függően befolyásolja a végrehajtó, illetve a beavatkozó jelet, és a beavatkozó szerven keresztül a módosított jellemzőt. A szabályozó elhelyezését és feladatát a 8.1 -es ábra illusztrálja.



8.1 ábra. A szabályozási kör

A szabályozó tehát, a következő alapvető funkciókat látja el:

- fogadja a távadó által szolgáltatott és a szabályozott jellemzőtől függő ellenőrző jelet,
- létrehozza az alapjel és az ellenőrző jel közötti különbséget,
- a hibajellel olyan jelformálást végez, hogy a módosított jellemző változását kiváltó, és a szabályozó kimenetén megjelenő végrehajtó jel olyan módosítást eredményezzen, hogy a szabályozási rendszer az előírt minőségi követelményeknek megfeleljen.

Minden szabályozó legalább három funkcionális szerkezeti részből áll: különbségképző-, jelformáló és erősítő szervből, továbbá esetenként kiegészülhet az alapjelképző szervvel.

A különbségképző szerv, csak olyan jellemzőket tud egymással egybevetni, csak olyan jellemzők között tud különbséget képezni, amelyek fizikai szempontból azonosak, tehát például nyomások, feszültségek, erők, azonosan kódolt digitális információk stb., különbségét képezheti.

A szabályozó jelformálását leíró $u(e)$ függvénykapcsolat többnyire lineáris, általános esetben nemlineáris differenciálegyenlettel jellemezhető. A lineárisnak tekinthető szabályozott szakaszok szabályozására többnyire viszonylag egyszerű felépítésű, folytonos vagy mintavételezett, lineáris vagy állásos jelátvitelű szabályozókat is alkalmazhatunk.

8.1 PID szabályozók

A folytonos szabályozókat a szabályozástechnikai gyakorlatban rendszerint az időkéésés a PID szabályozási algoritmus egyes változatainak megszerkesztésével szokták megvalósítani.

A PID szabályozási algoritmus differenciálegyenletéből:

$$\dots A_3 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2 \frac{du(t)}{dt} + A_1 u(t) = B_0 \int_0^t e(\tau) d\tau + B_1 e(t) + B_2 \frac{de(t)}{dt}$$

kiolvasható, hogy a rendelkező jel a hibajellel, annak integráljával, s differenciálhányadosával arányos. A jelformálást több energiatároló is késleltetheti. Egyszerűbb esetekben az energiatárolók elhanyagolhatóak, így a PID szabályozási algoritmus leegyszerűsített differenciálegyenlete:

$$A_1 u(t) = B_0 \int_0^t e(\tau) d\tau + B_2 \frac{de(t)}{dt}.$$

Rendezés után felírható:

$$u(t) = \frac{B_1}{A_1} \left[e(t) + \frac{B_0}{B_1} \int_0^t e(\tau) d\tau + \frac{B_2}{B_1} \frac{de(t)}{dt} \right]$$

és a:

$$\frac{B_1}{A_1} = K_p, \text{ – a szabályozó arányossági átviteli tényezője (erősítése),}$$

$$\frac{B_0}{A_1} = A_I = \frac{K_p}{T_I}, \text{ – az integráló tag integrálási átviteli tényezője (} T_I \text{ - integrálási idő),}$$

$$\frac{B_2}{A_1} = A_D = K_p T_D, \text{ – a differenciáló tag differenciálási átviteli tényezője (} T_D \text{ -}$$

differenciálási idő)

jelöléseket bevezetve, az energiatárolómentes PID szabályozó átviteli függvénye, a következő módon írható fel:

$$W_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right].$$

Az ilyen átviteli függvénnyel rendelkező szabályozó – K_p , T_I és T_D megfelelően széles határok között történő beállítási lehetősége esetén– többnyire a szigorú minőségi követelményeket kielégítő rendszerekhez is alkalmazható. Egyes tagok kihagyásával a PID szabályozókból leszármaztathatók az egyszerűbb P, I, PI és PD szabályozók.

A szabályozók alaptípusai a következők:

- A P szabályozó átviteli függvénye: $W_r(s) = K_p$.

A legegyszerűbb szabályozó a P szabályozó. A szabályozó K_p erősítése állítható. A P szabályozó a hibával arányos irányító hatást a hiba fellépésének pillanatában megjeleníti. Arányos szabályozott szakaszok esetében a szabályozó csak állandósult állapotbeli hibával maradó szabályozási eltéréssel tud működni. Az erősítés növelésével csökken a maradandó szabályozási eltérés, növekszik a jel beállási sebessége, ezért túllendülés vagy lengés állhat elő.

- A PI szabályozó átviteli függvénye: $W_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$.

A PI szabályozó alkalmazásakor a K_p erősítés és a T_i integrálási idő állítható. A PI szabályozó az arányos szabályozott szakaszok esetében is állandósult hiba nélkül működik. Az erősítés növelése növeli a túllendülést, a túlzott szabályozó paraméter-beállítások (hogyan arányossági, illetve integrálási átviteli tényezők) instabil működést eredményezhetnek.

- A PID szabályozó átviteli függvénye: $W_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$.

A PID szabályozó esetében a K_p erősítés a T_i integrálási idő és a T_d differenciálási idő állítható. A kimenőjel a hibajel differenciálhányadosával is arányos, így gyorsan növekvő hibákra az arányos értéket meghaladó túlvezérléssel reagál, de ezt már a hiba változási sebességének csökkenésekor ill. megfordulásakor nagyrészt visszaveszi anélkül, hogy magának a hibának a csökkenését megvárna.

A szabályozók beállítására több szerző tett közzé általános szabályt. Néhány szabály beállítási viszonyai és alkalmazási lehetőségei a következők:

A rendszer átviteli függvénye	A szabályozó beállítási módszer
$W(s) = \frac{K_{ob}}{1 + sT_{ob}} e^{-s\tau_{ob}}$	<ul style="list-style-type: none"> • Tapasztalati módszer • <i>Oppelt módszer</i> • Chien-Hrones-Reswick módszer • Kessler módszer • Samal módszer • Ziegler-Nichols módszer
$W(s) = \frac{K_{ob}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	<ul style="list-style-type: none"> • Kessler módszer
$W(s) = \frac{K_{ob}}{1 + 2\xi T_s + T^2 s^2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Ziegler-Nichols módszer

Tapasztalati módszer

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei		
	K_p	T_i	T_d
P	$\leq \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0
PI	$\leq 0.9 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$> 3.3\tau_{ob}$	0
PD	$\leq 1.2 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	$< 0.25\tau_{ob}$
PID	$\leq 1.2 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$> 2\tau_{ob}$	$< 0.5\tau_{ob}$

Oppelt módszere

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei		
	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0
PI	$0.8 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$3\tau_{ob}$	0
PD	$1.2 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	$0.25\tau_{ob}$
PID	$1.2 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$2\tau_{ob}$	$0.42\tau_{ob}$

Chien-Hrones-Reswick módszer

- Értéktartó szabályozás

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei			Az átmenet alakja
	K_p	T_i	T_d	
P	$0.3 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$0.7 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0	20%-os túllendülés
PI	$0.6 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$4\tau_{ob}$	0	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$0.7 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$2.3\tau_{ob}$	0	20%-os túllendülés
PID	$0.95 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$2.4\tau_{ob}$	$0.42\tau_{ob}$	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$1.2 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$2\tau_{ob}$	$0.42\tau_{ob}$	20%-os túllendülés

- Követő szabályozás

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei			Az átmenet alakja
	K_p	T_i	T_d	
P	$0.3 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$0.7 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	∞	0	20%-os túllendülés
PI	$0.35 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$1.2T_{ob}$	0	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$0.6 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	T_{ob}	0	20%-os túllendülés

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei			Az átmenet alakja
	K_p	T_i	T_d	
PID	$0.6 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	T_{ob}	$0.5\tau_{ob}$	kúszó (aperiodikus) átmenet
	$0.95 \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}$	$1.35T_{ob}$	$0.47\tau_{ob}$	20%-os túllendülés

Kessler módszere

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei		
	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{\left(\frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}\right)^2}{1 + 2\frac{T_{ob}}{\tau_{ob}}}$	∞	0
PI	$\approx \frac{1}{2} \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}} + \frac{1}{12} \frac{\tau_{ob}}{T_{ob}}$	$\approx T_{ob} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau_{ob}}{T_{ob}} \right)^3 \right]$	0
PID	$\approx \frac{3}{4} \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{80} \frac{\tau_{ob}}{T_{ob}}$	$\approx T_{ob} + \frac{1}{3} \tau_{ob}$	$\approx \frac{1}{4} T_{ob} \left[1 + \frac{1}{20} \left(\frac{\tau_{ob}}{T_{ob}} \right)^2 \right]$

Ziegler-Nichols módszere

Szabályozó típusa	A szabályozó paraméterei		
	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_{krit}$	∞	0
PI	$0.45 K_{krit}$	$0.85 T_{krit}$	0
PID	$0.6 K_{krit}$	$0.5 T_{krit}$	$0.125 T_{krit}$

1. Feladat

Egy szakasz átviteli függvénye a következő $W(s) = \frac{10e^{-0.816s}}{3.2s+1}$. CHR módszerrel határozzuk meg egy alkalmazható PID szabályozó paramétereit. A szabályozás értéktartó és 20%-os túllendülés engedélyezett.

A megoldás menete:

$$K_R = \frac{1}{K_{ob}} \cdot 1.2 \cdot \frac{T_{ob}}{\tau_{ob}} = \frac{1}{10} \cdot 1.2 \cdot \frac{3.2}{0.816} = 0.47,$$

$$T_I = 2 \cdot \tau_{ob} = 2 \cdot 0.816 = 1.63,$$

$$T_D = 0.42 \cdot \tau_{ob} = 0.42 \cdot 0.816 = 0.34,$$

$$W_{PID}(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right),$$

$$W_{PID}(p) = 0.47 \left(1 + \frac{1}{1.63 p} + 0.34 p \right).$$

2. Feladat

Ziegler-Nichols módszer alkalmazásával határozzuk meg a PID szabályozó paramétereit, amennyiben a szakasz átviteli függvénye:

$$W(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+3)}.$$

A megoldás menete:

A rendszert P szabályozó beiktatásával a stabilitás határára kell hozni. A szabályozó kritikus erősítését és a szabályozott jellemző periódusát feljegyezzük.

$$W(s) = \frac{3K_p}{s^3 + 5s^2 + 6s},$$

$$s = j\omega,$$

$$W(j\omega) = \frac{3K_p}{-j\omega^3 - 5\omega^2 + 6j\omega} = \frac{3K_p}{-5\omega^2 + j\omega(6 - \omega^2)} \cdot \frac{-5\omega^2 - j\omega(6 - \omega^2)}{-5\omega^2 - j\omega(6 - \omega^2)},$$

$$W(j\omega) = \frac{-15K_p\omega^2 - j3K_p\omega(6 - \omega^2)}{25\omega^4 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} = -1 + j0.$$

A stabilitás határon a rendszer akkor van ha a frekvencia átviteli függvény felveszi a $-1+j0$ értéket.

$$\frac{-15K_p\omega^2}{25\omega^4 + \omega^2(6-\omega^2)^2} = -1, \quad \frac{3K_p\omega(6-\omega^2)}{25\omega^4 + \omega^2(6-\omega^2)^2} = 0,$$

$$K_{pkrit} = \frac{25\omega^4 + \omega^2(6-\omega^2)^2}{15\omega^2}, \quad \omega = 0 \quad \text{ill.} \quad 6-\omega^2 = 0,$$

$$K_{pkrit} = \frac{5}{3}\omega^2 = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10, \quad \omega = \sqrt{6},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{krit}}, \quad T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} = 2.5651.$$

A táblázati értékek alapján:

$$K_p = 0.6, \quad K_{Rkrit} = 6,$$

$$T_i = 0.8, \quad T_{krit} = 2.0521,$$

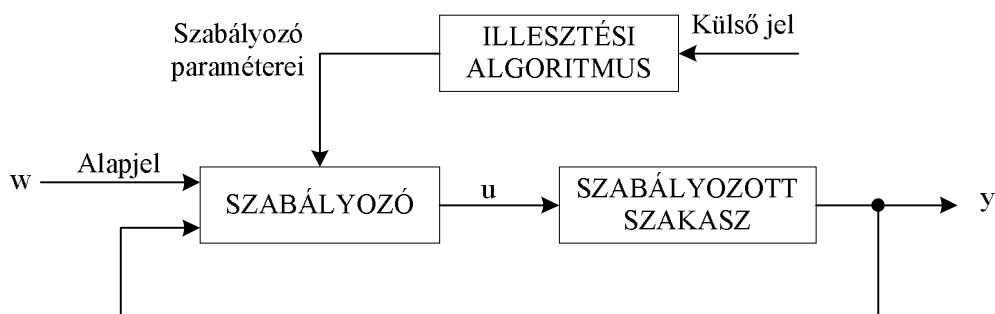
$$T_d = 0.2, \quad T_{krit} = 0.513,$$

$$W_R(p) = 6\left(1 + \frac{1}{2.05p} + 0.513p\right).$$

8.2. A szabályozó paramétereit változtató irányítás

Egyes nemlineáris rendszerek irányítása folyamán a rendszer egy megfigyelhető jele alapján eldönthetők a várható dinamikai változások menetei. Ha ezek a változások nem felelnek meg az irányítási feladat által meghatározott követelményeknek akkor a szabályozó paramétereit illeszteni kell a fellépő állapothoz. Az elvet igen sikeresen lehet alkalmazni a digitális szabályozási rendszerekben.

Ha létezik egy olyan külsőleg megfigyelhető jel, amely alapján eldönthető a szabályozott szakasz paraméterváltozása, vagy a statikus nemlinearitás munkapontja –s ha ezek a paraméterváltozások vagy nemlinearitások ismertek– akkor a felismert helyzetben egy digitális szabályozási rendszerben relatív könnyen illeszthető a szabályozó.

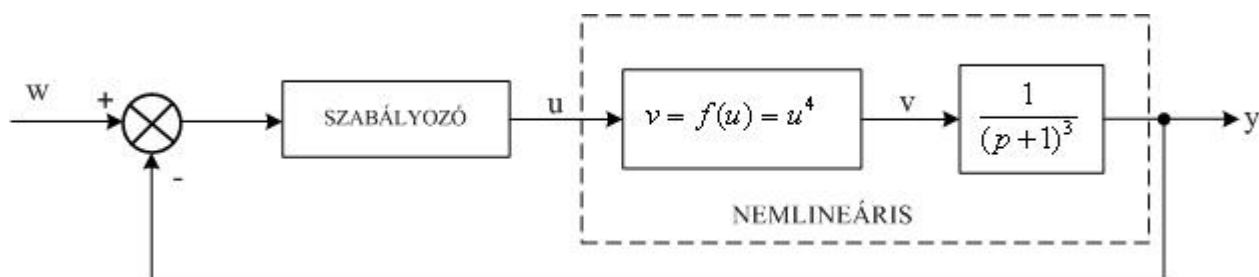


8.2. ábra. A szabályozó paramétereit változtató irányítás hatásvázlata.

A külső jel alapján az illesztési algoritmus eldönti, hogy a szabályozó paramétereinek milyen értéket kell felvenniük, hogy a szabályozás eleget tegyen a szabályozás minőségi követelményeinek.

Az illesztési algoritmust ebben az esetben nem lehet általánosítani. A következőkben egy példa kerül bemutatásra az illesztési algoritmus meghatározására.

Változó erősítésű szabályozó alkalmazása a szelep nemlinearitásának kompenzálására

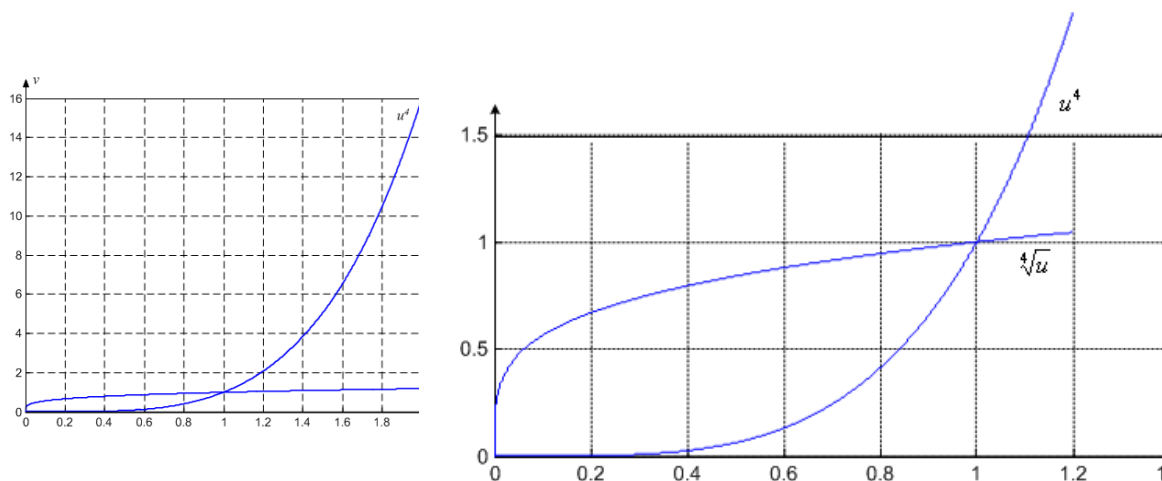


8.3. ábra. Nemlineáris szabályozási kör

A nemlineáris $v = u^4$ karakterisztikájú szelep működése miatt a rendszer instabil lehet. A rendszerbe beiktatunk egy inverz nemlinearitást, amelyre érvényes lesz a következő összefüggés:

$$f^{-1}(f(u)) = u.$$

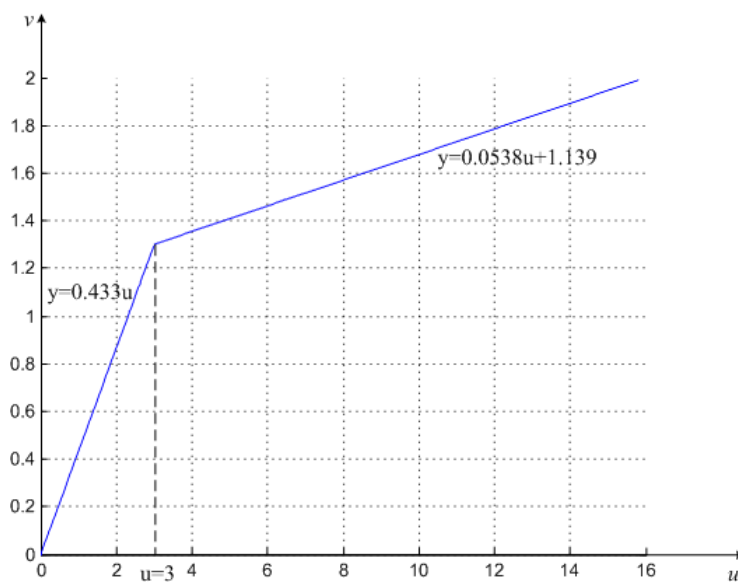
A szelep esetében a $v = u^4$ függvény változásai a 8.4. ábrán láthatók. A nemlinearitás megfigyelése alapján megállapítható, hogy a nemlinearitás szakaszonként linearizálható.



8.4. ábra. Az alap és inverz nemlineáris jelleggörbék.

A szakaszváltás legyen akkor, amikor az u bemenet eléri a váltást meghatározó C értéket. A szakaszosan linearizált rendszer inverzének egyenlete a 8.4. ábrán látható nemlinearitás esetében a következő:

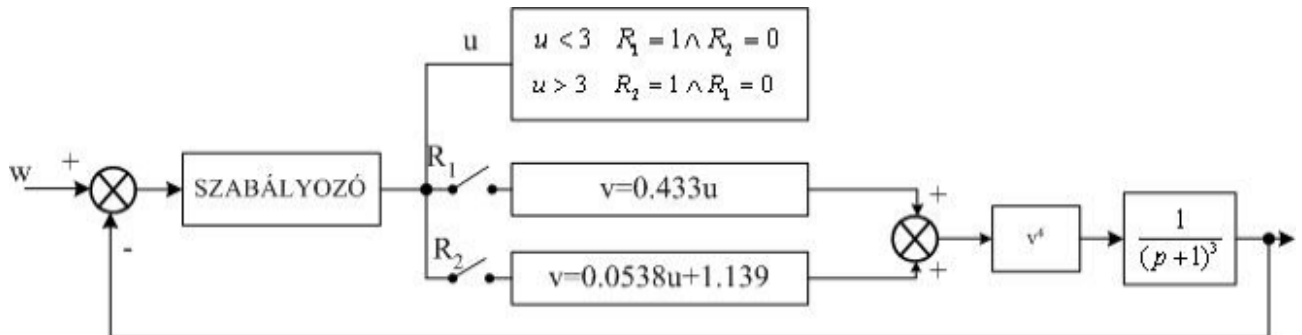
$$v = f^{-1}(u) = \begin{cases} 0.433 u & 0 \leq u \leq 3 \\ 0.0538u + 1.139 & 3 \leq u \leq 16 \end{cases} ,$$



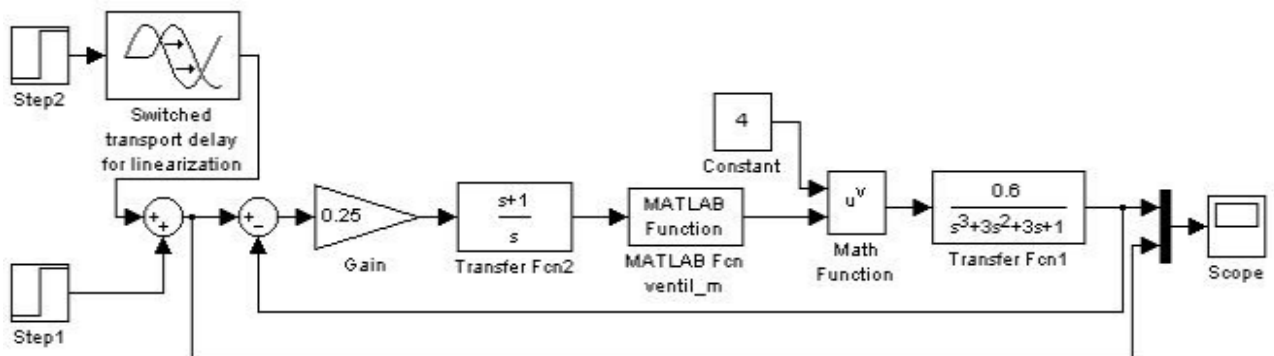
8.5. ábra. A szakaszosan linearizált inverz jelleggörbe.

A szelep nemlinearitását kompenzáló tag most nem a $\sqrt[4]{u}$ képlet alapján lesz meghatározva, hanem a v szerint.

Az így tervezett szabályozóval kiegészített rendszer hatásvázlata és válaszfüggvényei különböző értékű egységugrásnyi bemenetek esetére a 8.6 ábrán láthatók.



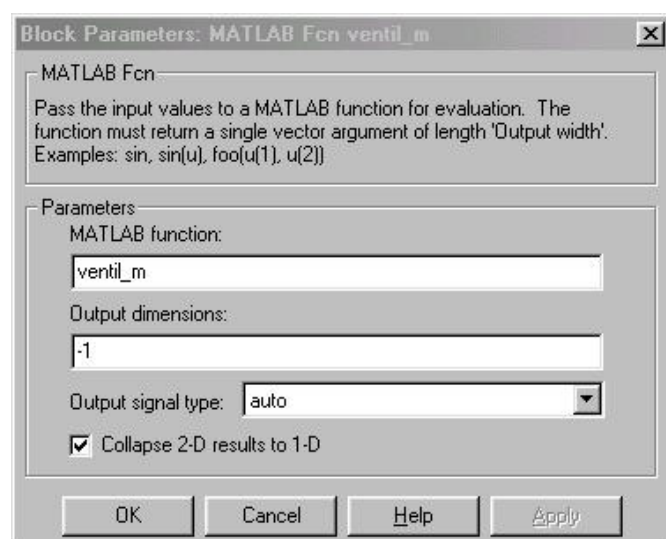
8.6. ábra. A kompenzátorral kiegészített rendszer



8.7. ábra. A kompenzátorral kiegészített rendszer Simulink ábrája

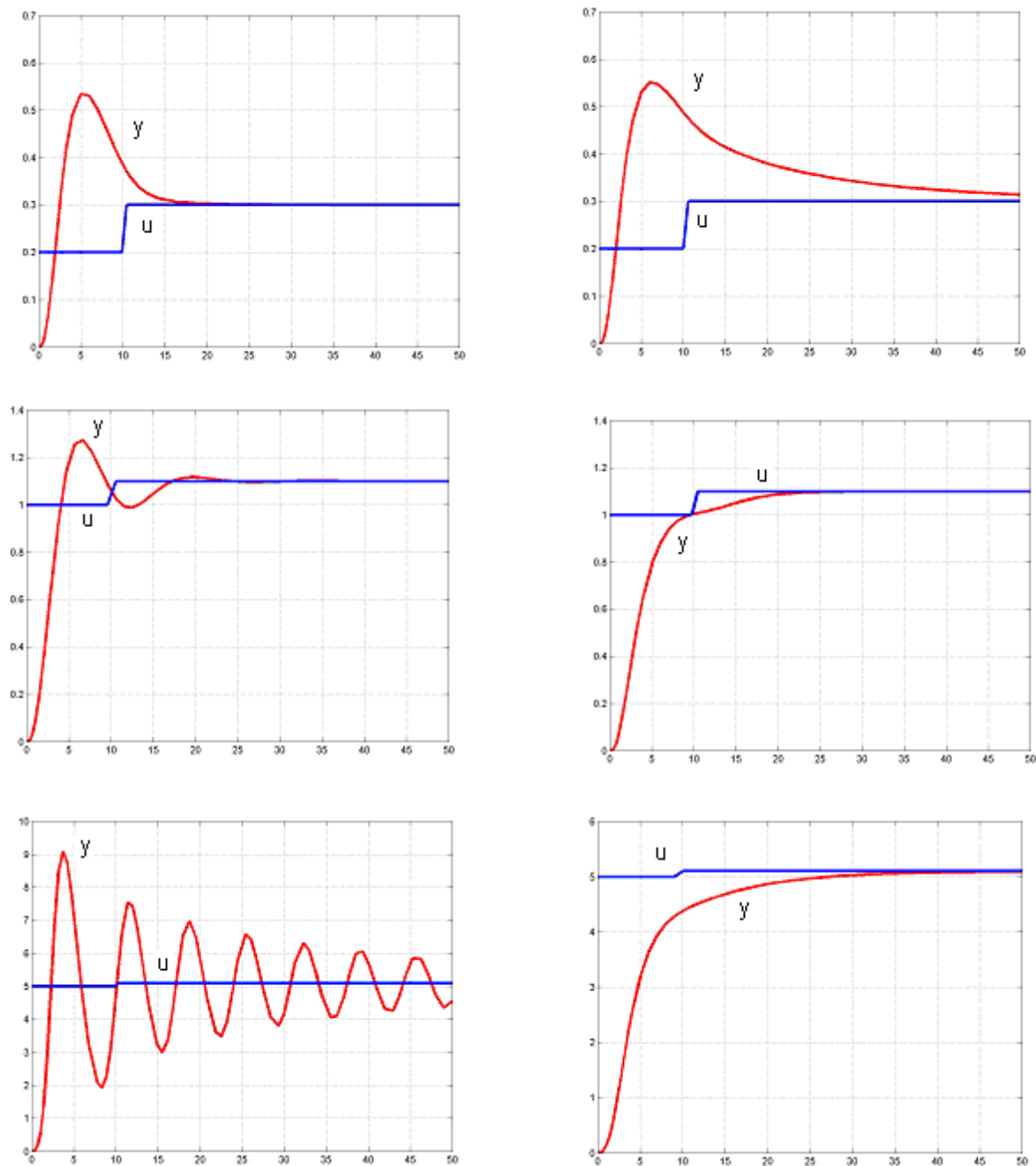
A matlab függvényt megvalósító m file:

```
function y=ventil_m(x)
    if x>3
        y=0.0538*x+1.139;
    else
        y=0.433*x;
    end
```



8.8. ábra. A nemlinearitást kompenzáló függvény beillesztése

A nemlineáris rendszer és a szakaszosan linearizált jelleggörbét tartalmazó rendszer válaszfüggvényei és bemenetei különböző munkapontokban a 8.9. ábrán láthatók.



8.9. ábra. A nemlineáris rendszer és a szakaszosan linearizált jelleggörbét tartalmazó rendszer válaszfüggvényei és bemenetei különböző munkapontokban.

Ábrajegyzék

1.1. ábra. A rendszer és környezete.....	7
1.2. ábra. A rendszer szimbolikus jelölése.....	8
1.3. ábra. Additív és nem additív jelleggörbék.....	10
1.4. ábra. A dinamikus rendszer szimbolikus ábrázolása.....	15
1.5. ábra. Sima nemlineáris rendszer hatásvázlata.....	16
1.6. ábra. Sima lineáris rendszer hatásvázlata.....	17
1.7. ábra. Lineáris időinvariáns rendszer hatásvázlata.....	18
1.8. ábra. A rendszer és jellemzői.....	20
1.9. ábra. A dinamikus rendszer üzemmódjai.....	22
1.10. ábra. Illusztráció a példához.....	22
1.11. ábra. Illusztráció a példához.....	24
1.12. ábra. Illusztráció a példához.....	26
1.13. ábra. Egy két tárolós hidraulikus rendszer vázlat.....	28
1.14. ábra. Illusztráció a példához.....	29
1.15. ábra. A matematikai inga leegyszerűsített vázlat.....	41
2.1. ábra. A konvolúciós integrál értelmezése.....	49
4.1. ábra. Az irányított technológiai rendszer szerkezeti vázlat formájú megjelenítése.....	62
4.2. ábra. Az irányított technológiai rendszer működési vázlat formájú megjelenítése.....	63
4.3. ábra. Az irányított technológiai rendszer megjelenítése hatásvázlat formájában.....	63
4.4. ábra. A szabályozási kör tömbvázlat és jel-folyam gráf típusú ábrázolása.....	64
4.5. ábra. Az 1. példa hatásvázlata.....	70
4.6. ábra. Az átalakítás első lépése.....	70
4.7. ábra. Az átalakítás első lépése után kapott rendszer.....	71
4.8. ábra. Az átalakítás második lépése.....	71
4.9. ábra. Az átalakítás második lépése után.....	71
4.10. ábra. Az átalakítás harmadik lépése.....	72
4.11. ábra. Az átalakítás harmadik lépése után.....	72
4.12. ábra. A belső visszacsatolás és az előreccatolás eredőjének meghatározása.....	73
4.13. ábra. A belső visszacsatolás és az előreccatolás eredője.....	73
4.14. ábra. A 2. példa hatásvázlata.....	74
4.15. ábra. A 3. példa hatásvázlata.....	75
5.1. ábra. A pólusok helyének alakulása a csillapítási tényező függvényében.....	90
6.1. ábra. Zárt kör.....	116
6.2. ábra. A stabilitás vizsgálat Nyquist-digardon.....	117
6.3. ábra. A Nyquist-féle stabilitás értelmezése.....	118
6.4. ábra. A Nyquist-féle stabilitás értelmezése (folyt.).....	118
6.5. ábra. A fázistartalék értelmezése.....	119
6.6. ábra. Az erősítési tartalék értelmezése.....	119
6.7. ábra. A Bode-féle stabilitási kritérium.....	120
6.8. ábra. A fázis- és erősítési tartalék értelmezése Bode diagramon.....	121
6.9. ábra. A gyökhelygörbe levezetési ábrája.....	122
6.10. ábra. A gyökhelygörbe példáinak kiinduló hatásvázlata.....	123
6.11. ábra. Integráló tag gyökhelygörbéje.....	124
6.11. ábra. Az elsőrendű tag gyökhelygörbéje.....	125
6.11. ábra. Az elsőrendű tag gyökhelygörbéje, ha a számláló fokszáma 1.....	126

6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($\zeta \geq 1$).....	126
6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($0 < \zeta < 1$).....	127
6.13. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($\tau_1 > \tau_2 > T$, a számláló első fokú polinom) ...	129
6.14. ábra. Másodrendű tag gyökhelygörbéje ($0 < \zeta < 1$, a számláló első fokú polinom).	129
6.15. ábra. Harmadrendű tag gyökhelygörbéje ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$).....	130
6.16. ábra. A példa harmadrendű tagjának gyökhelygörbéje ($\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$).....	132
7.1. ábra. A mintavételezés elvi folyamatábrája.....	145
7.3. ábra. Mintavételezett bemenetű és kimenetű tag.....	157
7.4. ábra. Mintavételezett bemenet és kimenet közötti kapcsolat	158
7.5. ábra. Mintavételező tagcsoport hatásvázlata	165
7.6. ábra. Tartószervvel kiegészített mintavételező tagcsoport hatásvázlata	165
7.7. ábra. Stabilitási tartományok közötti megfeleltetés	169
7.8. ábra. A stabilitási tartományok közötti leképezés.....	169
7.9. ábra. A stabilitási tartományok leképezése az előre felé vett differenciák közelítésnél ...	170
7.10. ábra. A stabilitási tartományok leképezése a visszafelé vett differenciák közelítésnél ..	171
7.11. ábra. A stabilitási tartományok leképezése a Tustin-módszeren alapuló közelítésnél ..	171
8.1. ábra. A szabályozási kör.....	206
8.2. ábra. A szabályozó paramétereit változtató irányítás hatásvázlata.	214
8.3. ábra. Nemlineáris szabályozási kör.....	214
8.4. ábra. Az alap és inverz nemlineáris jelleggörbék.....	215
8.5. ábra. A szakaszosan linearizált inverz jelleggörbe.....	215
8.6. ábra. A kompenzátorral kiegészített rendszer.....	216
8.7. ábra. A kompenzátorral kiegészített rendszer Simulink ábrája	216
8.8. ábra. A nemlinearitást kompenzáló függvény beillesztése.....	216
8.9. ábra. A nemlineáris rendszer és a szakaszosan linearizált jelleggörbét tartalmazó rendszer válaszfüggvényei és bemenetei különböző munkapontokban.....	217